28.08.2022

PROBLEM DECYZYJNY

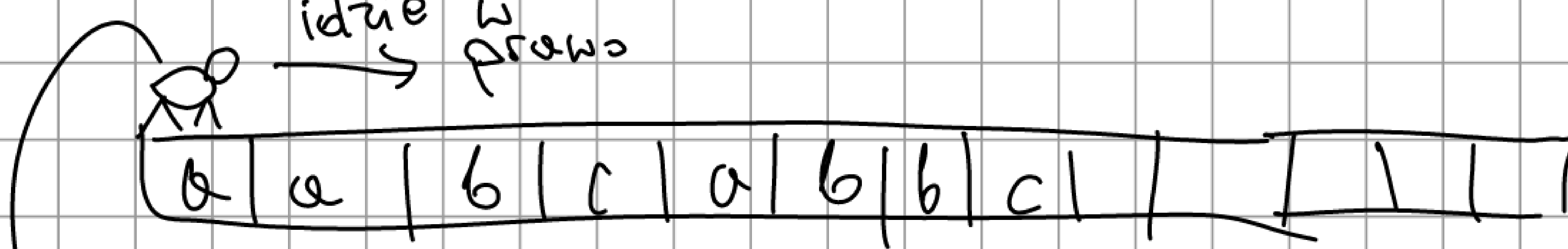
- Σ – skończony alfabet
- Σ^* – zbiór skończonych słów nad alfabetem Σ
- $\Sigma^* \supseteq L$ – język / problem
- pytamy o "zasoby obliczeniowe" potrzebne do rozstrzygania tych problemów.

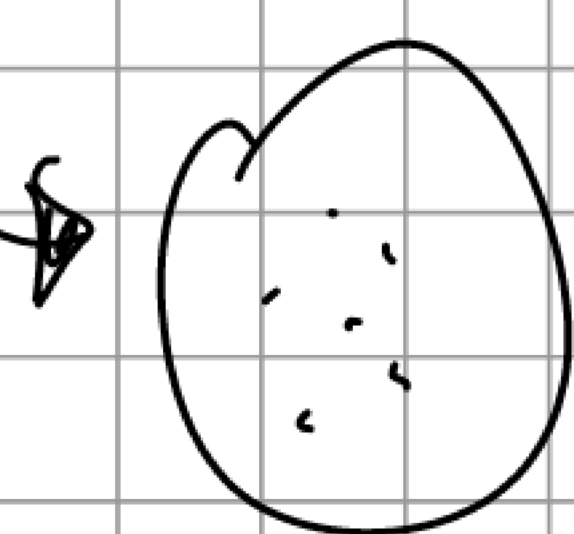
- klasyfikujemy problemy ze względu na te zasoby

Bla bla...

CZĘŚĆ I

Automaty skończone





skończony zbiór stanów Q, Funkcja przejścia $\delta : Q \times \Sigma \to Q$

- Stan początkowy $q_0 \in Q$
- zbiór stanów akceptujących $F \subseteq Q$

Ćw. Skonstruuj δ, Q dla $\Sigma = \{0,1\}$,

$L = \{ w \in \{0,1\}^* : |w|_1 \text{ jest parzysta} \}$

Ale dla $L = \{ w \in \{0,1\}^* : |w|_1 = |w|_0 \}$ się nie da!

D-d. (A.a.) Niech Zenon będzie żuczkiem rozstrzygającym L. Zał. że $|Q| = k$.

$$w_0 = \varepsilon \rightsquigarrow s_0 \in Q$$

$$w_1 = 0 \rightsquigarrow s_1 \in Q$$

$$\vdots$$

$$w_i = 0^i \rightsquigarrow s_i \in Q$$

$$\vdots$$

$$w_k = 0^k \rightsquigarrow s_k \in Q$$

Jest i, j t. że

$$s_i = s_j$$

Spójrzmy na

$$a = w_i 1^i \rightsquigarrow s \in F$$

$$b = w_j 1^i \rightsquigarrow s \notin F \quad ↯.$$

Deterministyczny automat skończony (DFA) to krotka $\langle \Sigma, Q, q_0, \delta, F \rangle$.

Mamy $\delta : Q \times \Sigma \to Q$, definiujemy $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$:

$$\begin{cases} \hat{\delta}(q, \varepsilon) = q \\ \hat{\delta}(q, wa) = \delta(\hat{\delta}(q, w), a) \end{cases}$$

LUB

równoważne ćw. $\hat{\delta}(q, aw) = \hat{\delta}(\delta(q, a), w)$

Dla DFA $A = \langle \Sigma, Q, q_0, \delta, F \rangle$ przez L_A oznaczamy $\{ w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q_0, w) \in F \}$.

<u>Def.</u> $L \subseteq \Sigma^*$ nazywamy regularnym gdy istnieje DFA A t.że $L = L_A$.

<u>Lemat</u> (o pompowaniu dla języków regularnych)
Dla każdego j.reg. L istnieje $n \in \mathbb{N}$ t.że dla każdego $w \in L$ t.że $|w| \geq n$ istnieją słowa x, y, z t.że $xyz = w$

oraz $y \neq \varepsilon$, $|xy| \leq n$ takie że dla
każdego $k \in \mathbb{N}$ $xy^k z \in L$.

Przykład Weźmy $L = \{ w \in \{0,1\}^* : |w|_0 = |w|_1 \}$.
Zał. że L regularny. Weźmy n jak z
lematu. Niech $w = 0^n 1^n \in L$. Weźmy x, y, z
jak w lemacie. Ale $|xy| \leq n$.
więc $|y|_1 = 0$. Dla $k = 0$: $xz \in L$
(nie ma "1" w y) ale $|xz|_0 < |xz|_1$ ↯

Dowód lematu

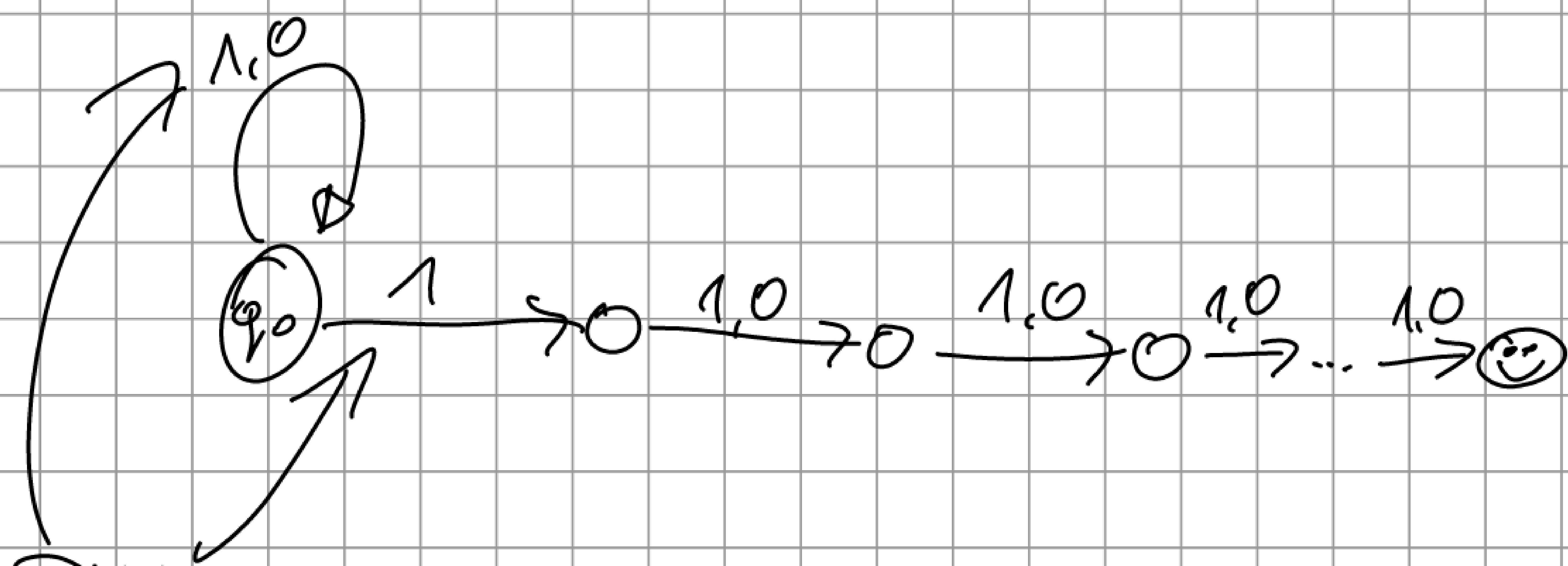
Weźmy $L = L_A$ regularny $(A = \langle \Sigma, Q, q_0, \delta, F \rangle)$.
Niech $n = |Q| + 1$. Weźmy $w \in L$ t.że $|w| \geq n$.
Niech $w = a_1 a_2 \ldots a_l$, niech $s_i = \hat{\delta}(q_0, a_1 \ldots a_i)$.
Wtedy $s_i = s_j$ dla pewnych $i < j \leq n$.
Niech $x = a_1 \ldots a_i$, $y = a_{i+1} \ldots a_j$,
$z = a_{j+1} \ldots a_l$. Wtedy dla $k \in \mathbb{N}$ ...

1.03.2022

NIEDETERMINISTYCZNE AUTOMATY SKOŃCZONE (NFA)

Przykład

$L = \{ w1v \in \{0,1\}^* : |v| = 9 \}$



DWA PRZEJŚCIA Z 1 → ŻUCZEK PYTA NIEBIOS

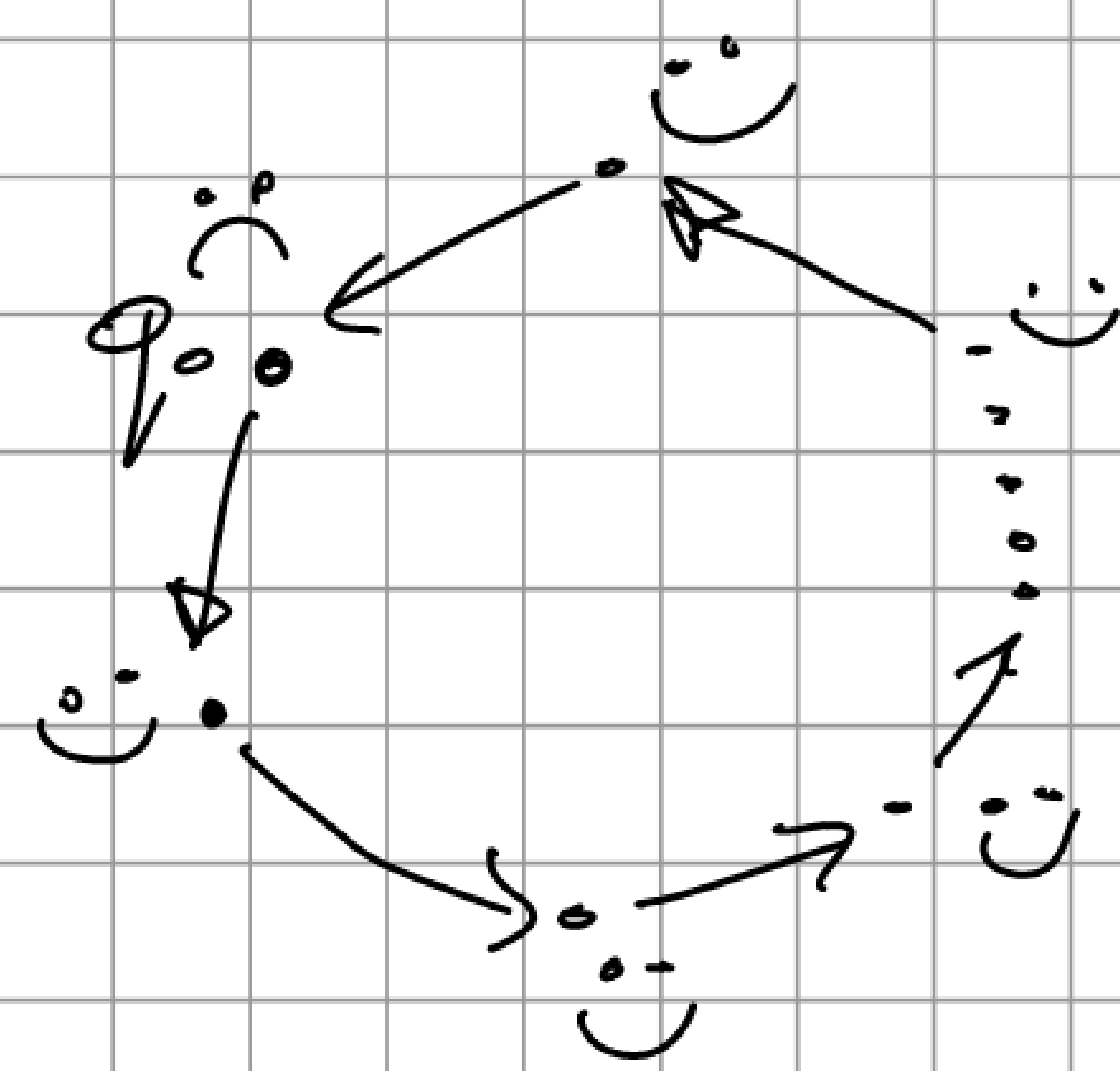
"CO ROBIĆ? JAK ŻYĆ"

A NIEBIOSA ODPOWIADAJĄ

Taki automat daje gwarancję, że na pewno nie trafimy w stan akceptujący, jeśli słowo nie jest z języka (nie ma "false-positive", są "false-negative")

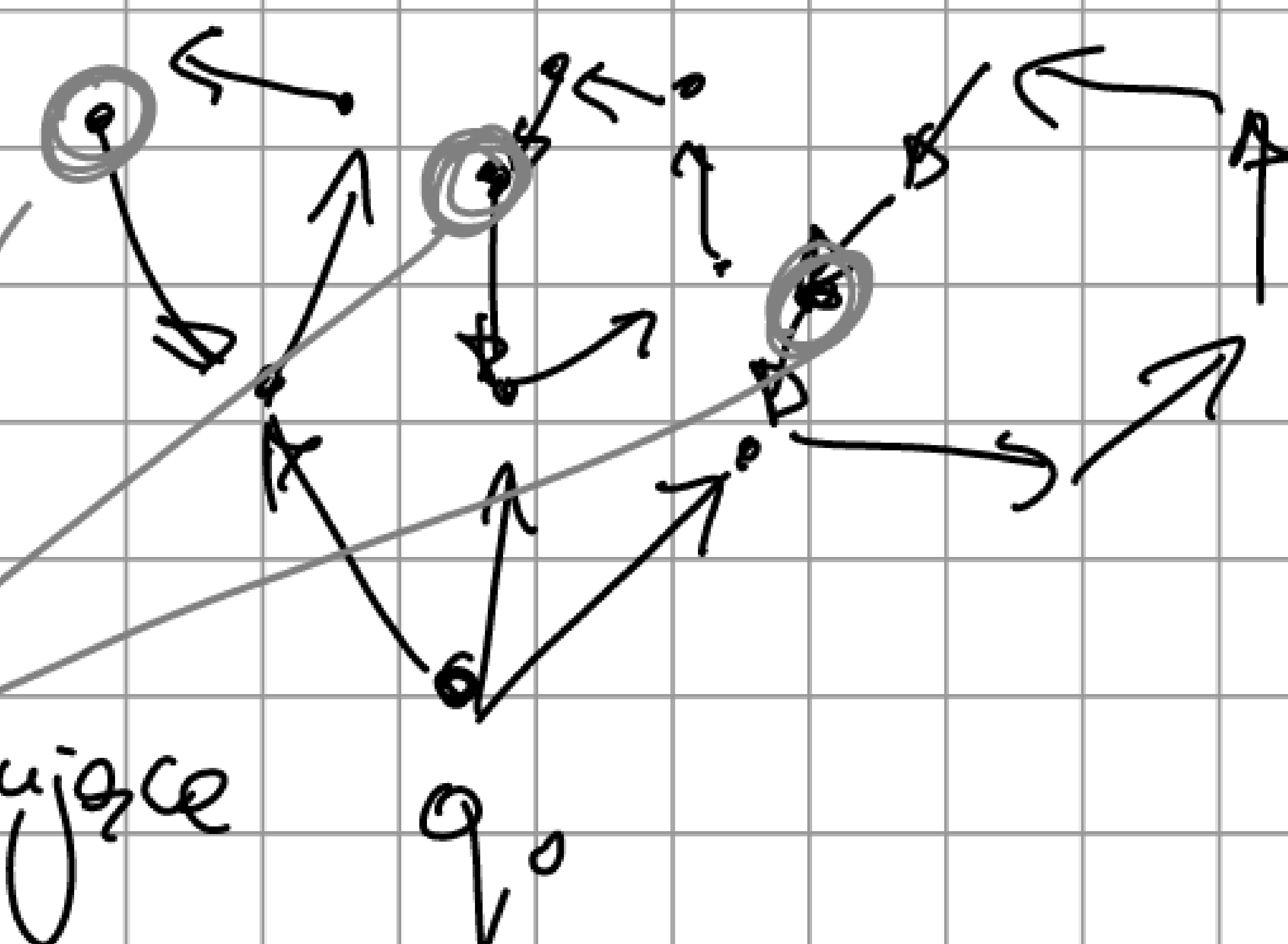
Przykład 2 $L = \{0^i : 105 \nmid i\}$

Det. aut.:



105 stanów

Niedet.:



Stany nieakceptujące

Znowu: na pewno jeśli $105 \mid i$, to trafimy w stan nieakcept.

Def. Niedeterministyczny automat skończony to krotka $\langle \Sigma, Q, q_0, \delta, F \rangle$ jak w DFA poza δ, gdzie

$$\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q.$$

$\delta(q, a, q')$ ~ z q do q' jest strzałka z etykietą a.

Teraz $\hat{\delta} \subseteq Q \times \Sigma^* \times Q$:

$$\begin{cases} \hat{\delta}(q, \varepsilon, q') \Leftrightarrow q = q' \\ \hat{\delta}(q, wa, q') \Leftrightarrow \exists p \in Q \ \hat{\delta}(q, w, p) \wedge \delta(p, a, q') \end{cases}$$

Alternatywna wersja wg JMa.

Dla każdego $w \in \Sigma^*$ definiujemy $\delta_w \subseteq Q \times Q$:

$$\begin{cases} \delta_\varepsilon = id_Q \\ \text{jeśli } a \in \Sigma \text{ to } \delta_a(q, q') \Leftrightarrow \delta(q, a, q') \\ \delta_{wa} = \delta_w \circ \delta_a \end{cases}$$

Wtedy $\hat{\delta}(q, w, q') \iff \delta_w(q, q')$.

<u>Def.</u> A: NFA. Wtedy

$$L_A = \{ w \in \Sigma^* : \exists q \in F \ \hat{\delta}(q_0, w, q) \}$$

<u>Tw.</u> Niech A: NFA. Wtedy $\exists A'$: DFA

t. że $L_A = L_{A'}$.

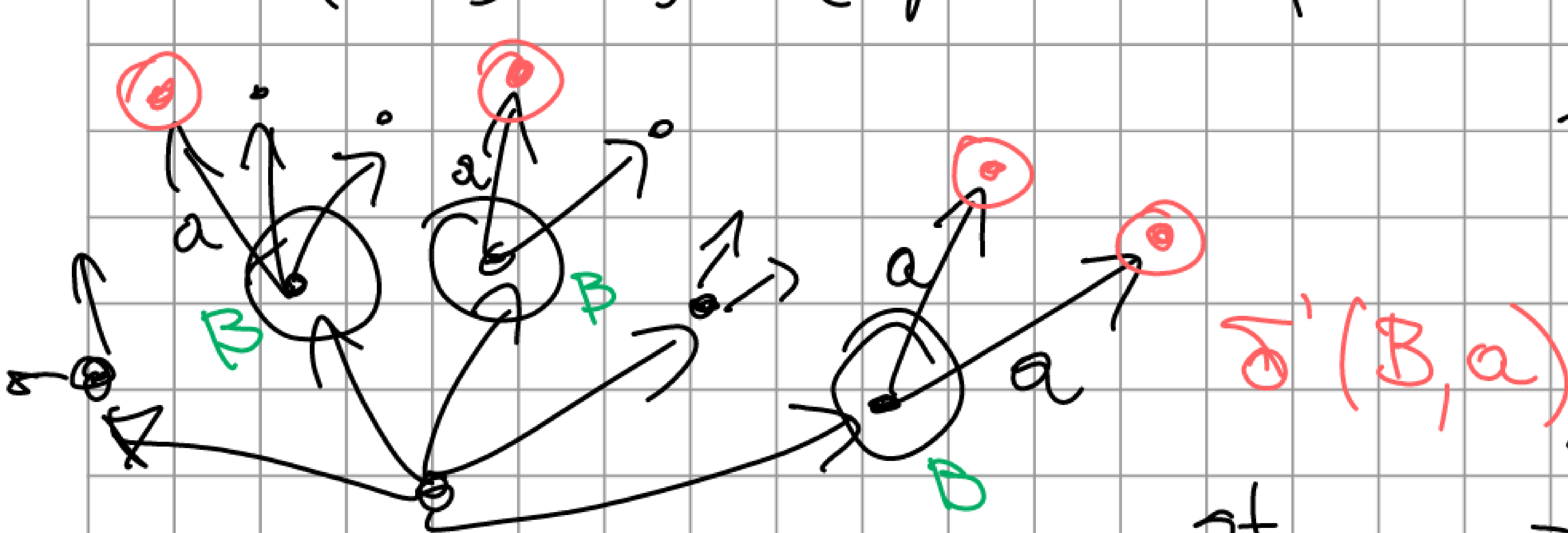
<u>D-d.</u> Weźmy dowolne NFA $A = \langle \Sigma, Q, q_0, \delta, F \rangle$.

Zbudujemy $A' = \langle \Sigma, Q', q_0', \delta', F' \rangle$.

Niech $Q' = \mathcal{P}(Q)$, $q_0' = \{q_0\}$,

$F' = \{ B \subseteq Q : B \cap F \neq \emptyset \}$,

$$\delta'(B, a) = \{ q \in Q : \exists p \in B \ \delta(p, a, q) \}.$$



Te stany, do których można dojść z któregoś stanu z B po kraw. z etykietą a.

NFA Z ε-PRZEJŚCIAMI

Takie coś, że możemy czasem sobie przejść ze stanu do stanu bez wczytania znaków. Je też można zdeterminizować.

7.03.2022

WYRAŻENIA REGULARNE (nad Σ)

- $\emptyset$ jest wyrażeniem regularnym i $L_\emptyset = \emptyset$
- ε jest wyr. reg. i $L_\varepsilon = \{\varepsilon\}$
- jeśli $a \in \Sigma$ to a jest wyr. reg. oraz $L_a = \{a\}$
- jeśli φ, ψ są wyr. reg. to $\varphi + \psi$ jest wyrażeniem regularnym i $L_{\varphi+\psi} = L_\varphi \cup L_\psi$, $\varphi\psi$ jest wyrażeniem regularnym i $L_{\varphi\psi} = L_\varphi L_\psi$. $= \{ w_1 w_2 : w_1 \in L_\varphi, w_2 \in L_\psi \}$.

$L_1 L_2 = \{ w_1 w_2 : w_1 \in L_1, w_2 \in L_2 \}$

$L \subseteq \Sigma^*$, wtedy $L^0 = L_\varepsilon$, $L^1 = L$, $L^{i+1} = L^i L$

$$L^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$$

- jeśli φ jest wyr. reg. to φ^* też jest oraz $L_{\varphi^*} = (L_\varphi)^*$

Przykład $\Sigma = \{0,1\}$, $0^*(10^*10^*)^*$

Tw. Niech $L \subseteq \Sigma^*$. Wtedy NWSR:

(1) L jest regularny, tj. istnieje DFA A t. że $L = L_A$.

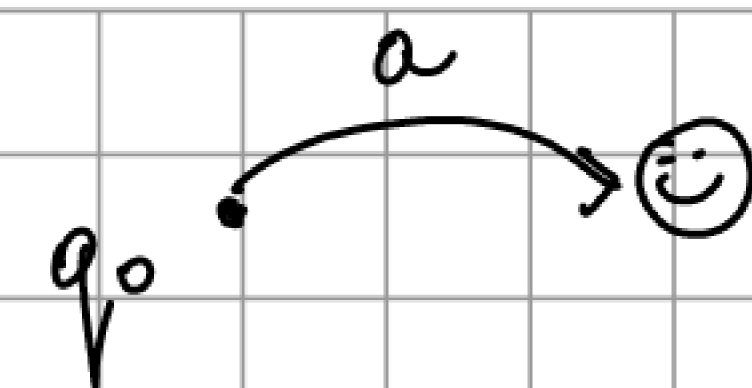
(2) Istnieje wyrażenie regularne φ t. że $L = L_\varphi$.

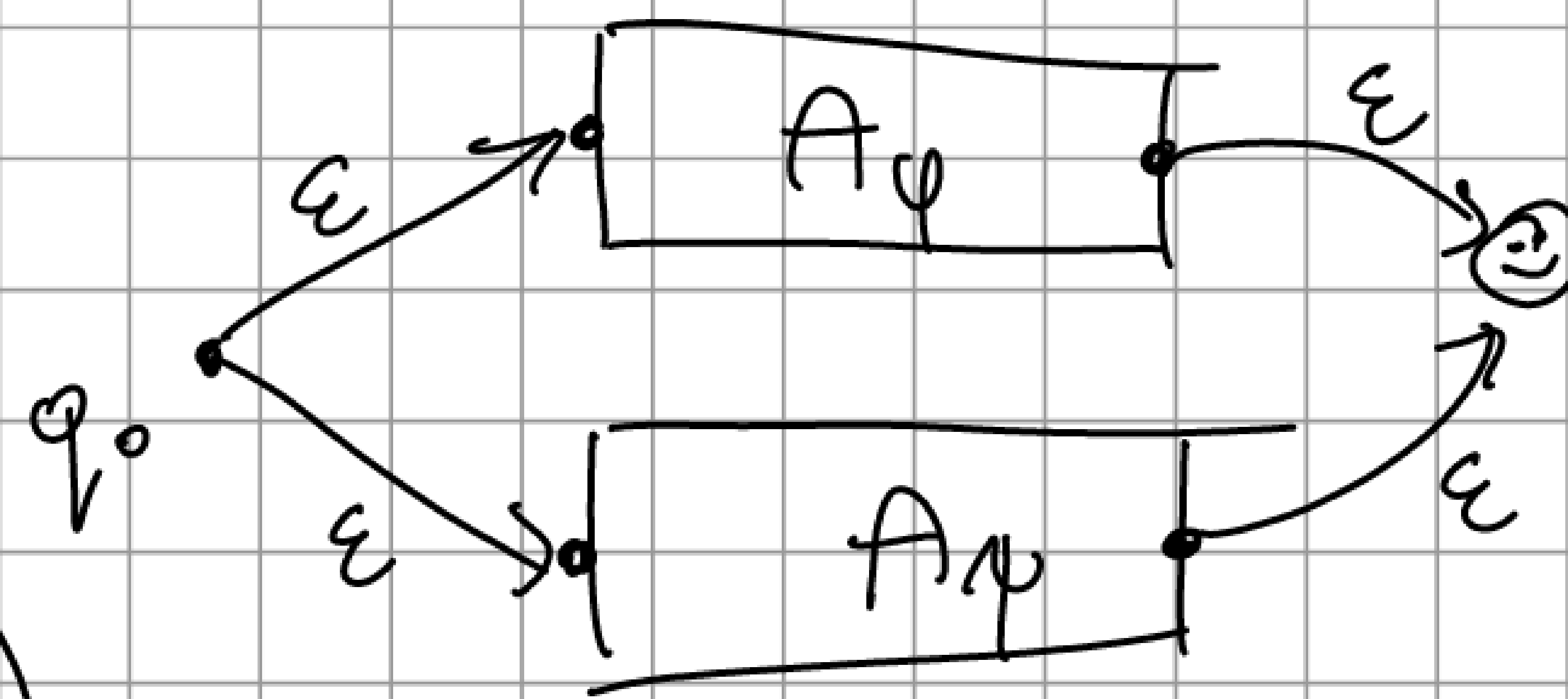
(3) Istnieje NFA z ε-przejściami A' t. że $L = L_{A'}$.

D-d. (3) $\Rightarrow$ (1) Było. ∎

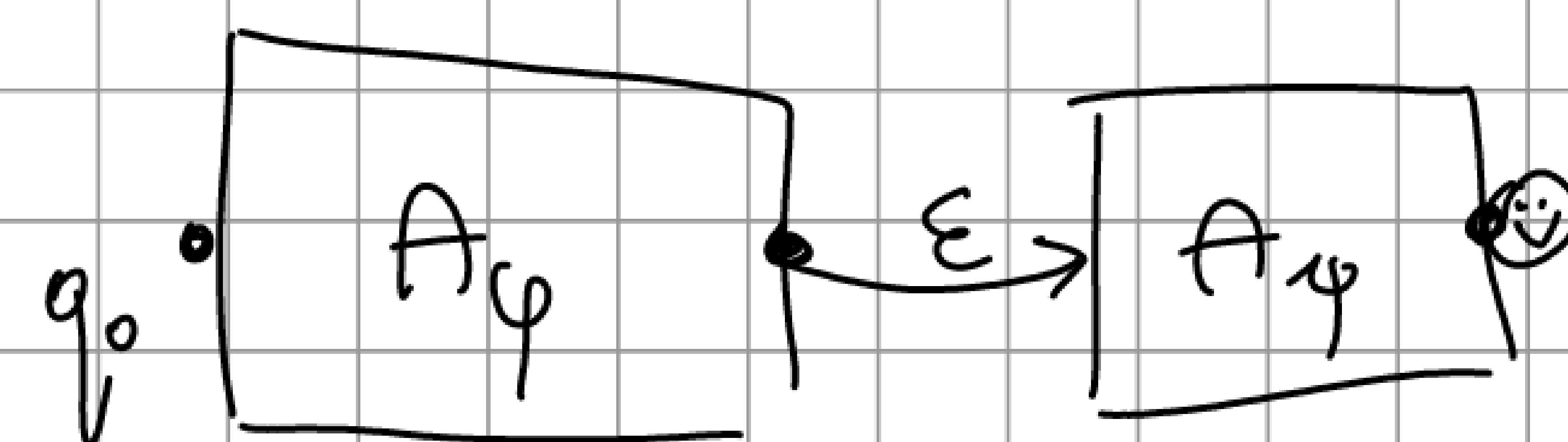
(2) $\Rightarrow$ (3) Indukcja względem długości wyrażenia. Każdy NFA który zbudujemy będzie miał jeden stan wejściowy niebędący akceptującym i jeden akceptujący.

- $\emptyset \rightsquigarrow q_0 \bullet \quad$ ☺
- $\varepsilon \rightsquigarrow q_0 \bullet \xrightarrow[\varepsilon]{}$ ☺

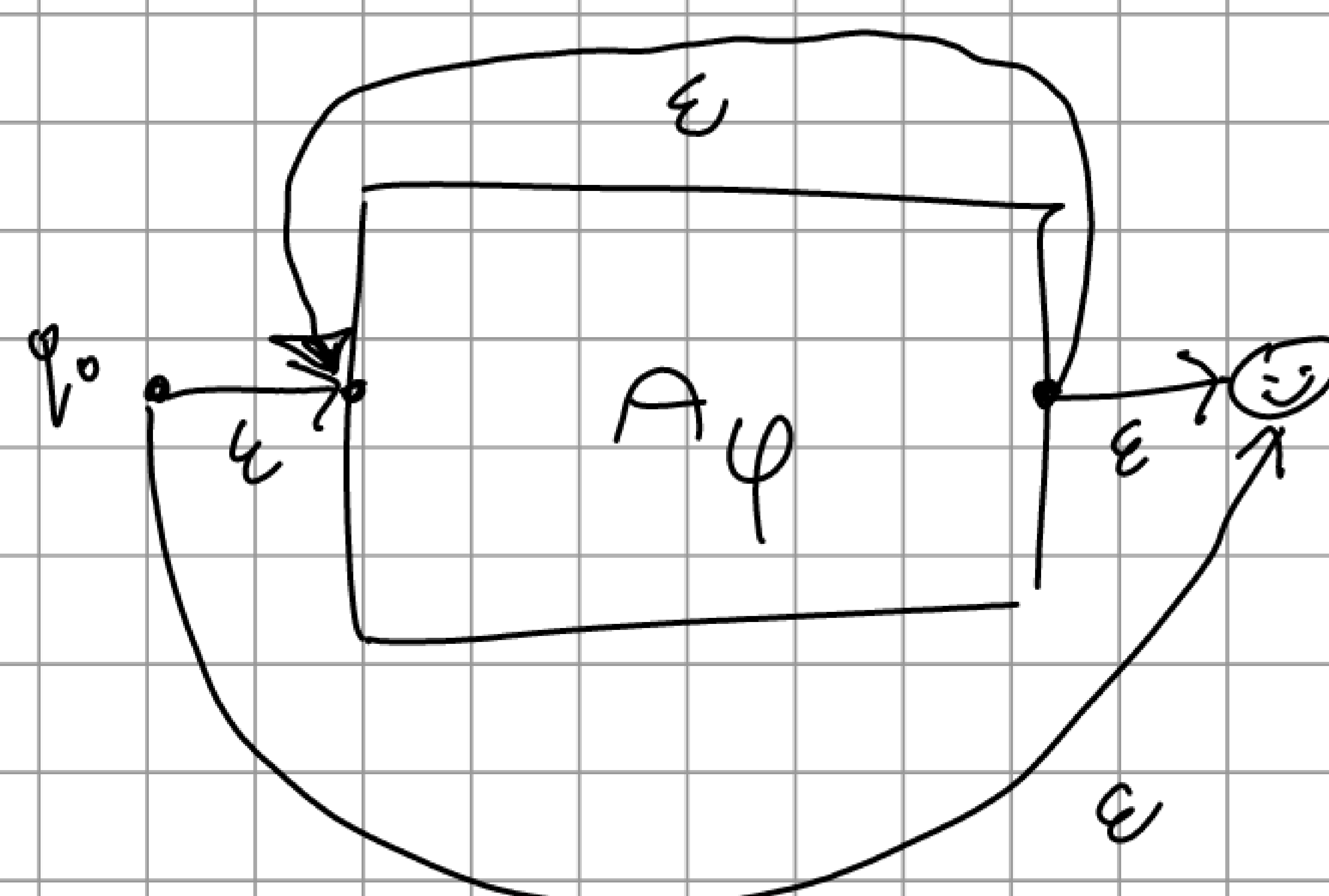
- $a \rightsquigarrow$ 

- $\varphi, \psi \rightsquigarrow$ 

  (automat dla $\varphi + \psi$)

- $\varphi, \psi \rightsquigarrow$ 

  (Automat dla $\varphi\psi$)

- $\varphi \rightsquigarrow$ 

  (Automat dla φ^*) ■

(1) $\Rightarrow$ (2) Mamy DFA $A = \langle \Sigma, Q, q_0, \delta, F \rangle$

$Q = \{q_1, \dots, q_n\}$ (gdzie $q_0 = q_1$).

Dla $1 \le i, j \le n, 0 \le k \le n$ napiszemy wyrażenie regularne $\varphi^k_{i,j}$ wyrażające język niepusty oraz $\neq v$

$$\{ w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q_i, w) = q_j \;\wedge\; \forall v \in \Sigma^* \big(\text{jeśli } v \text{ jest właściwym prefiksem } w \text{ oraz } \hat{\delta}(q_i, w) = q_l \text{, to } l < k\big)\}$$

Po drodze z q_i do q_j chodzimy tylko po stanach o indeksach $< k$.

Indukcję względem k:

- $\varphi^0_{i,i} = \varepsilon + \bigoplus_{\substack{a \in \Sigma \\ \delta(q_i, a) = q_i}} a$ (Suma po literach spełniających warunek)

- $\varphi^0_{i,j} = \bigoplus_{\substack{a \in \Sigma \\ \delta(q_i, a) = q_j}} a$

- $\varphi^{k+1}_{i,j} = \varphi^k_{i,j} + \varphi^k_{i,k+1} \left(\varphi^k_{k+1,k+1}\right)^* \varphi^k_{k+1,j}$

Mając te wyrażenia regularne piszemy ψ t. że $L_A = L_\psi$:

$$\psi = \bigoplus_{q_i \in F} \varphi^{n}_{1,i}$$

$\blacksquare$

UOGÓLNIENIA

Są dwa możliwe kierunki:

- słowa nieskończone
- drzewa

$\Big\}$ można iść w oba tych kierunkach jednocześnie

Automat skończony na słowach nieskończonych.

$$\langle \underbrace{\Sigma}_{\text{skończony}}, Q, q_0, \delta, \text{CO TUTAJ?} \rangle$$

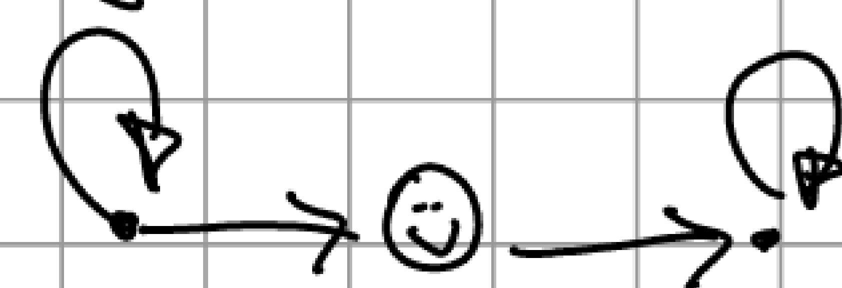
Dużo warunków akceptacji Büchiego, Rabina...

Interpretacja Büchiego: $F \subseteq Q$.

Słowo jest akceptowane, gdy automat nieskończenie wiele razy odwiedza stany z F.

Pytanie: czy deterministyczne automaty Büchiego robią to samo co niedeterministyczne?

Odpowiedź: nie w ten sposób co poprzednio. Przykład: $|\Sigma| = 1$,

NFA: 

Lepsza odpowiedź: L – zbiór słów nieskończonych nad $\Sigma = \{0,1\}$, w których jest tylko skończenie wiele zer.

L jest rozstrzygany przez 

Deterministycznym się nie da: ćwiczenie.