28.08.2022

PROBLEM DECYZYJNY

- Σ – skończony alfabet
- Σ^* – zbiór skończonych słów nad alfabetem Σ
- $\Sigma^* \supseteq L$ – język / problem

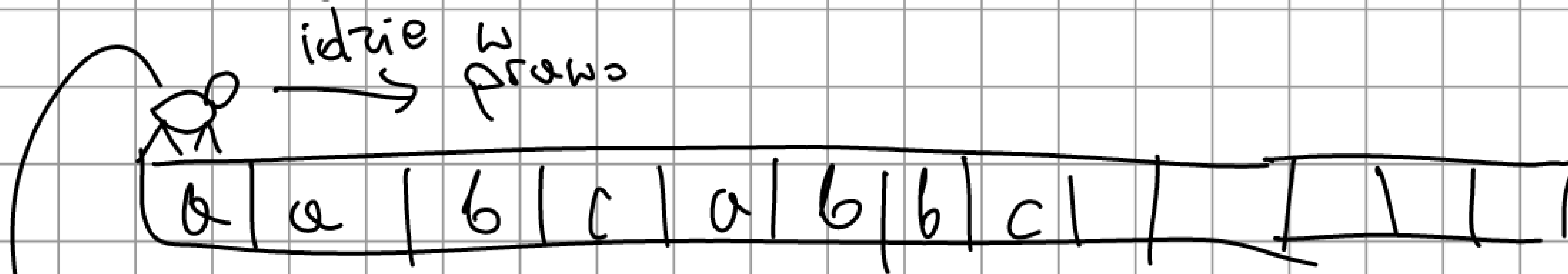
- pytamy o "zasoby obliczeniowe" potrzebne do rozstrzygania tych problemów.

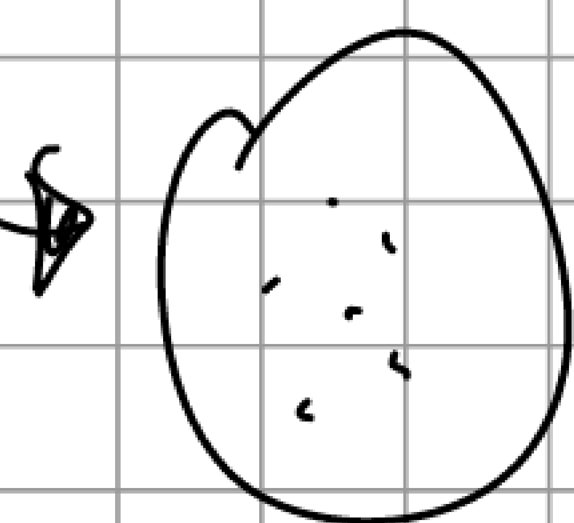
- klasyfikujemy problemy ze względu na te zasoby

Bla bla...

CZĘŚĆ I

Automaty skończone





skończony zbiór stanów Q, Funkcja przejścia $\delta : Q \times \Sigma \to Q$

- Stan początkowy $q_0 \in Q$
- zbiór stanów akceptujących $F \subseteq Q$

Ćw. Skonstruuj δ, Q dla $\Sigma = \{0,1\}$,

$L = \{ w \in \{0,1\}^* : |w|_1 \text{ jest parzysta} \}$

Ale dla $L = \{ w \in \{0,1\}^* : |w|_1 = |w|_0 \}$

się nie da!

D-d. (A.a.) Niech Zenon będzie żuczkiem rozstrzygającym L. Zał. że $|Q| = k$.

$$w_0 = \varepsilon \rightsquigarrow s_0 \in Q$$
$$w_1 = 0 \rightsquigarrow s_1 \in Q$$
$$\vdots$$
$$w_i = 0^i \rightsquigarrow s_i \in Q$$
$$\vdots$$
$$w_k = 0^k \rightsquigarrow s_k \in Q$$

Jest i, j t. że
$$s_i = s_j$$

Spójrzmy na
$$a = w_i 1^i \rightsquigarrow s \in F$$
$$b = w_j 1^i \rightsquigarrow s \notin F \quad \lightning$$

<u>Deterministyczny automat skończony</u> (DFA) to krotka $\langle \Sigma, Q, q_0, \delta, F \rangle$.

Mamy $\delta : Q \times \Sigma \to Q$, definiujemy $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$:

$$\begin{cases} \hat{\delta}(q, \varepsilon) = q \\ \hat{\delta}(q, wa) = \delta(\hat{\delta}(q, w), a) \end{cases}$$

LUB

równoważne ćw.: $\hat{\delta}(q, aw) = \hat{\delta}(\delta(q, a), w)$

Dla DFA $A = \langle \Sigma, Q, q_0, \delta, F \rangle$ przez L_A oznaczamy $\{w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q_0, w) \in F\}$.

<u>Def.</u> $L \subseteq \Sigma^*$ nazywamy regularnym gdy istnieje DFA A t.że $L = L_A$.

<u>Lemat</u> (o pompowaniu dla języków regularnych)
Dla każdego j. reg. L istnieje $n \in \mathbb{N}$ t.że dla każdego $w \in L$ t.że $|w| \geq n$ istnieją słowa x, y, z t.że $xyz = w$

oraz $y \neq \varepsilon$, $|xy| \leq n$ takie że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ $xy^k z \in L$.

Przykład Weźmy $L = \{ w \in \{0,1\}^* : |w|_0 = |w|_1 \}$.

Załóżmy że L regularny. Weźmy n jak z lematu. Niech $w = 0^n 1^n \in L$. Weźmy x, y, z jak w lemacie. Ale $|xy| \leq n$, więc $|y|_1 = 0$. Dla $k = 0$: $xz \in L$ (nie ma "1" w y) ale $|xz|_0 < |xz|_1$ $\lightning$

Dowód lematu

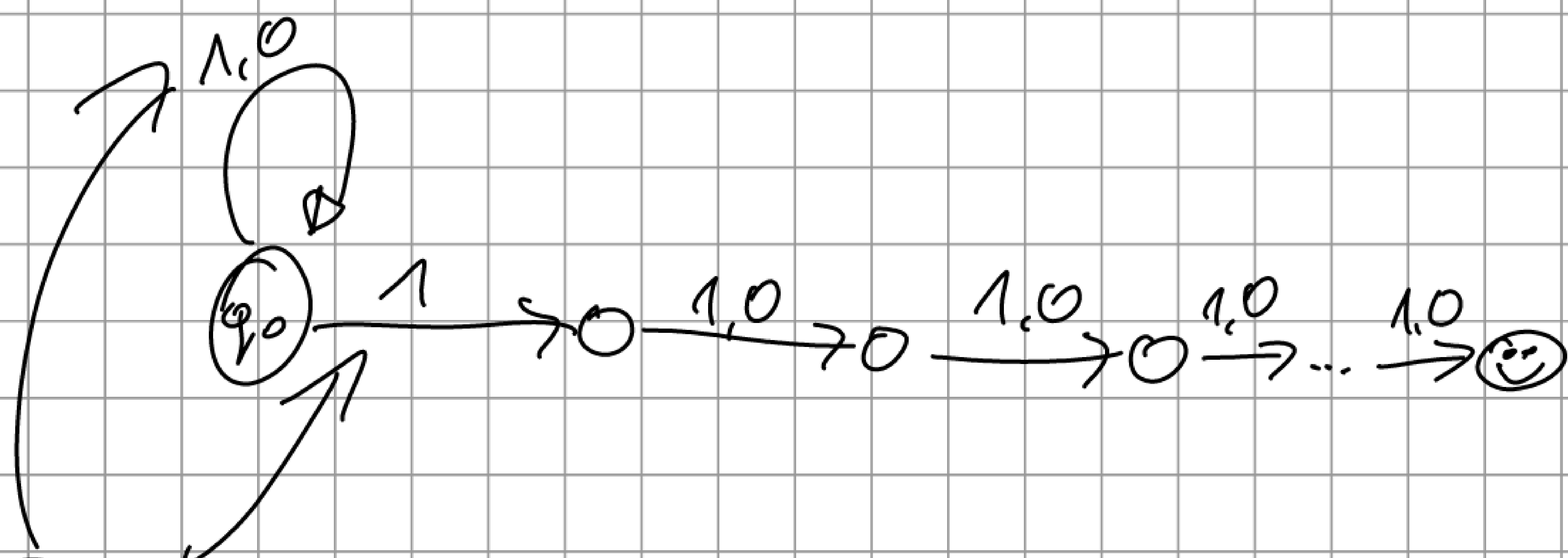
Weźmy $L = L_A$ regularny $(A = \langle \Sigma, Q, q_0, \delta, F \rangle)$.
Niech $n = |Q| + 1$. Weźmy $w \in L$ t.że $|w| \geq n$.
Niech $w = a_1 a_2 \ldots a_l$, niech $s_i = \hat{\delta}(q_0, a_1 \ldots a_i)$.
Wtedy $s_i = s_j$ dla pewnych $i < j \leq n$.
Niech $x = a_1 \ldots a_i$, $y = a_{i+1} \ldots a_j$, $z = a_{j+1} \ldots a_l$. Wtedy dla $k \in \mathbb{N}$ ...

1.03.2022

NIEDETERMINISTYCZNE AUTOMATY SKOŃCZONE (NFA)

Przykład

$L = \{ w1v \in \{0,1\}^* : |v| = 9 \}$



DWA PRZEJŚCIA Z 1 $\longrightarrow$ ŻUCZEK PYTA NIEBIOS

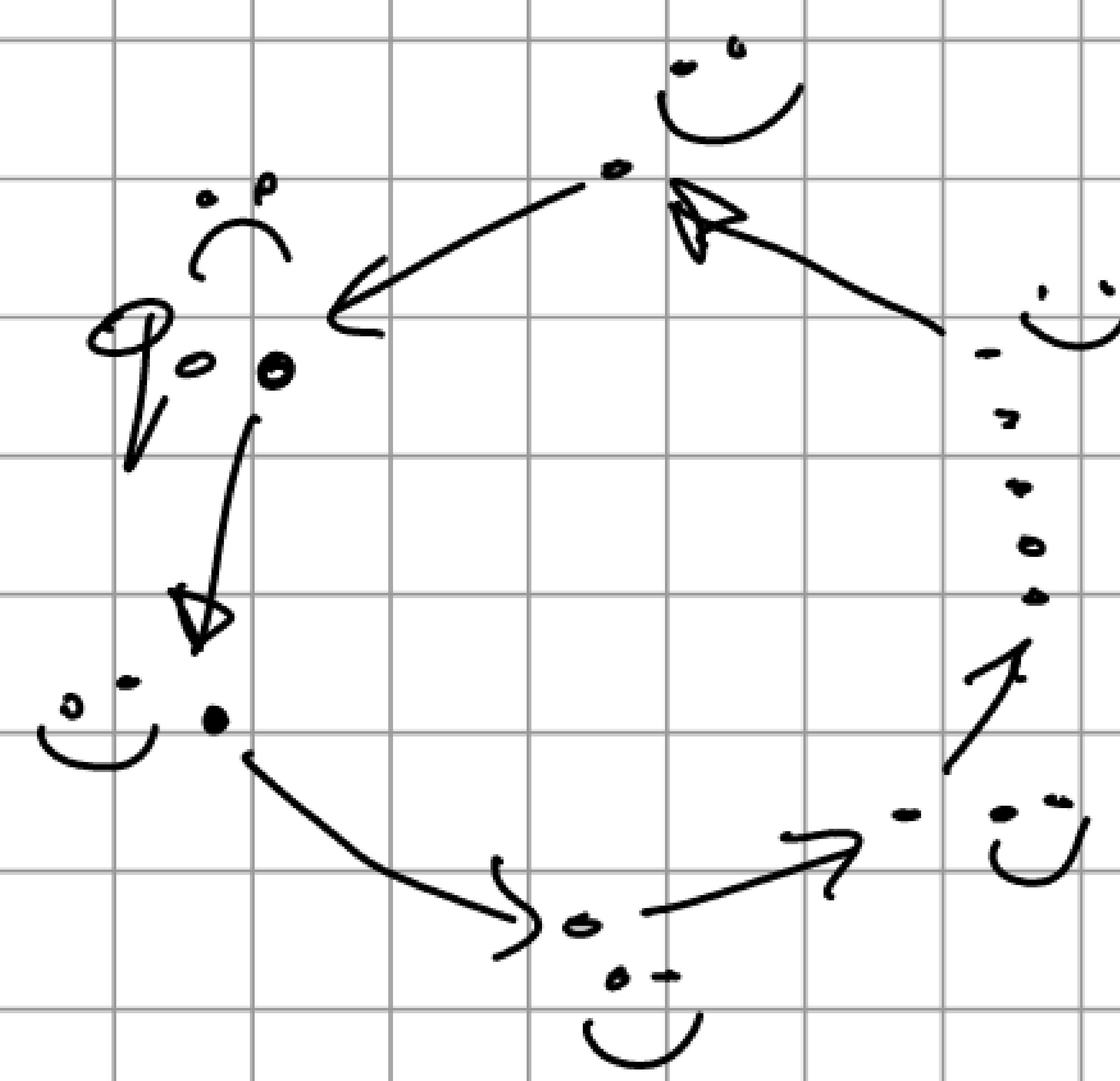
"CO ROBIĆ?
JAK ŻYĆ"

A NIEBIOSA ODPOWIADAJĄ

Taki automat daje gwarancję, że na pewno nie trafimy w stan akceptujący, jeśli słowo nie jest z języka (nie ma "false-positive" są "false-negative")

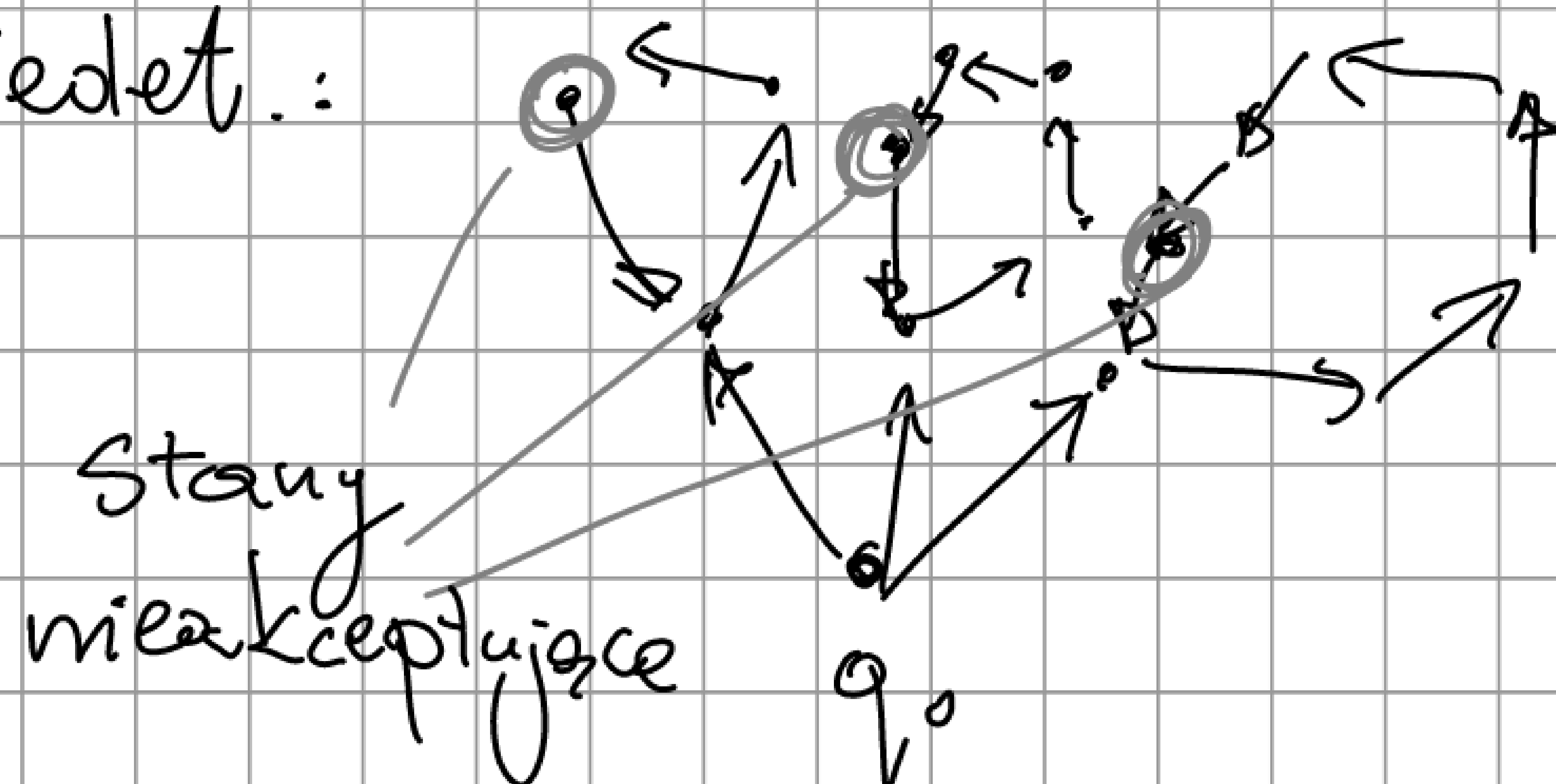
Przykład 2 $\quad L = \{0^i : 105 \nmid i\}$

Det. aut.:



105 stanów

Niedet.:



Znowu: na pewno jeśli $105 \mid i$, to trafimy w stan nieakcept.

Def. Niedeterministyczny automat skończony to krotka $\langle \Sigma, Q, q_0, \delta, F \rangle$ jak w DFA poza δ, gdzie

$$\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q.$$

$\delta(q, a, q')$ ~ z q do q' jest strzałka z etykietą a.

Teraz $\hat{\delta} \subseteq Q \times \Sigma^* \times Q$:

$$\begin{cases} \hat{\delta}(q, \varepsilon, q') \Leftrightarrow q = q' \\ \hat{\delta}(q, wa, q') \Leftrightarrow \exists p \in Q \ \hat{\delta}(q, w, p) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \wedge\, \delta(p, a, q') \end{cases}$$

Alternatywna wersja wg JMa.

Dla każdego $w \in \Sigma^*$ definiujemy $\delta_w \subseteq Q \times Q$:

$$\begin{cases} \delta_\varepsilon = id_Q \\ \text{jeśli } a \in \Sigma \text{ to } \delta_a(q, q') \Leftrightarrow \delta(q, a, q') \\ \delta_{wa} = \delta_w \circ \delta_a \end{cases}$$

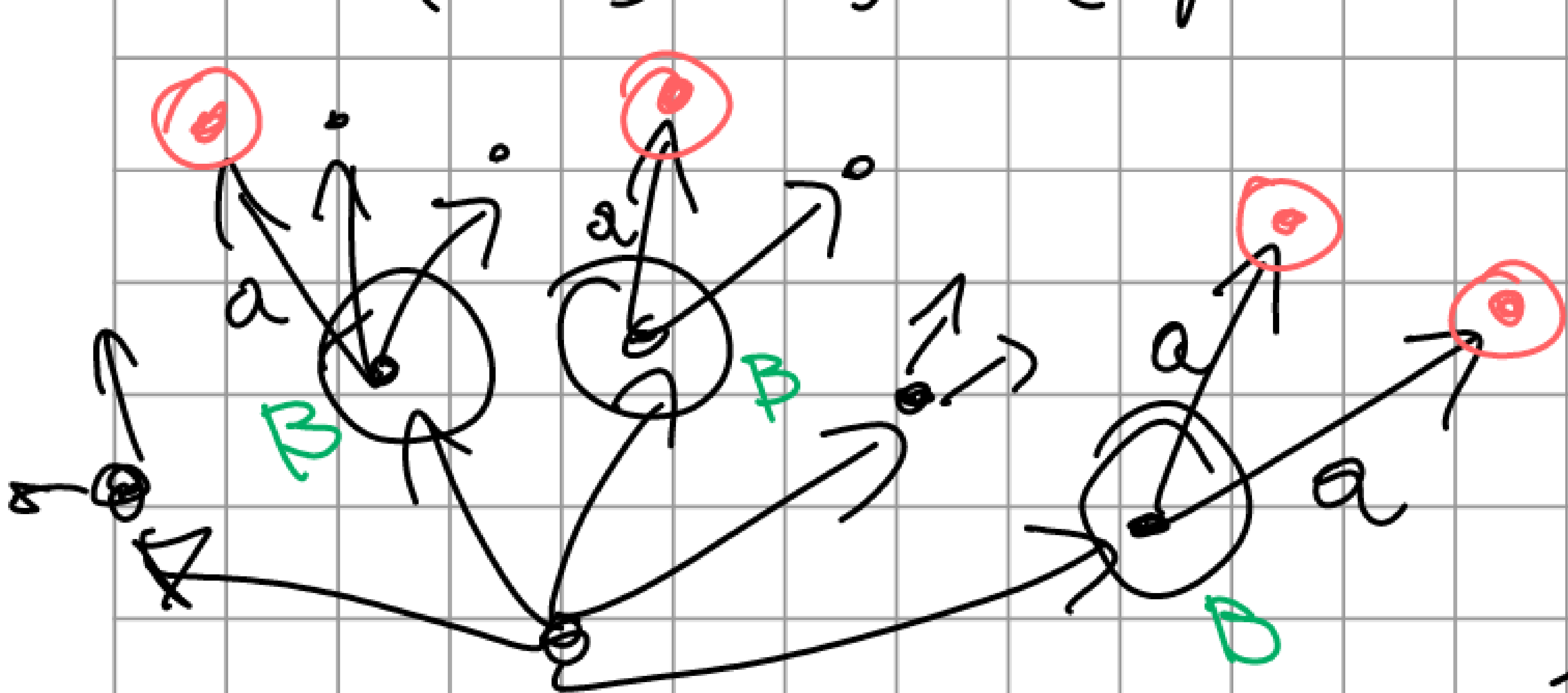
Wtedy $\hat{\delta}(q, w, q') \iff \delta_w(q, q')$.

Def. A: NFA. Wtedy
$$L_A = \{ w \in \Sigma^* : \exists q \in F \ \hat{\delta}(q_0, w, q) \}$$

Tw. Niech A: NFA. Wtedy $\exists A'$: DFA t. że $L_A = L_{A'}$.

D-d. Weźmy dowolne NFA $A = \langle \Sigma, Q, q_0, \delta, F \rangle$.
Zbudujemy $A' = \langle \Sigma, Q', q_0', \delta', F' \rangle$.
Niech $Q' = \mathcal{P}(Q)$, $q_0' = \{q_0\}$,
$F' = \{ B \subseteq Q : B \cap F \neq \emptyset \}$,

$$\delta'(B, a) = \{ q \in Q : \exists p \in B \ \delta(p, a, q) \}.$$



Te stany, do których można dojść z któregoś stanu z B po kraw. z etykietą a.

NFA Z ε-PRZEJŚCIAMI

Takie coś, że możemy czasem sobie przejść ze stanu do stanu bez wczytania znaków. Je też można zdeterminizować.

7.03.2022

WYRAŻENIA REGULARNE (nad Σ)

- $\emptyset$ jest wyrażeniem regularnym i $L_\emptyset = \emptyset$
- ε jest wyr. reg. i $L_\varepsilon = \{\varepsilon\}$
- jeśli $a \in \Sigma$ to a jest wyr. reg. oraz $L_a = \{a\}$
- jeśli φ, ψ są wyr. reg. to $\varphi + \psi$ jest wyrażeniem regularnym i $L_{\varphi+\psi} = L_\varphi \cup L_\psi$,
  $\varphi\psi$ jest wyrażeniem regularnym i $L_{\varphi\psi} = L_\varphi L_\psi = \{w_1 w_2 : w_1 \in L_\varphi, w_2 \in L_\psi\}$.

$L_1 L_2 = \{w_1 w_2 : w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$

$L \subseteq \Sigma^*$, wtedy $L^0 = L_\varepsilon$, $L^1 = L$, $L^{i+1} = L^i L$

$$L^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$$

- jeśli φ jest wyr. reg. to φ^* też jest oraz $L_{\varphi^*} = (L_\varphi)^*$

Przykład $\Sigma = \{0,1\}$, $0^*(10^*10^*)^*$

Tw. Niech $L \subseteq \Sigma^*$. Wtedy NWSR:

(1) L jest regularny, tj. istnieje DFA A t.że $L = L_A$.

(2) Istnieje wyrażenie regularne φ t.że $L = L_\varphi$.

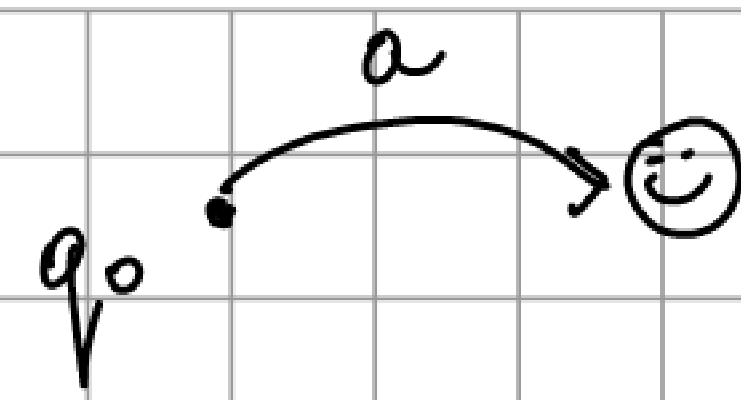
(3) Istnieje NFA z ε-przejściami A' t.że $L = L_{A'}$.

D-d. (3) $\Rightarrow$ (1) Było. ■

(2) $\Rightarrow$ (3) Indukcja względem długości wyrażenia. Każdy NFA który zbudujemy będzie miał jeden stan wejściowy niebędący akceptującym i jeden akceptujący.

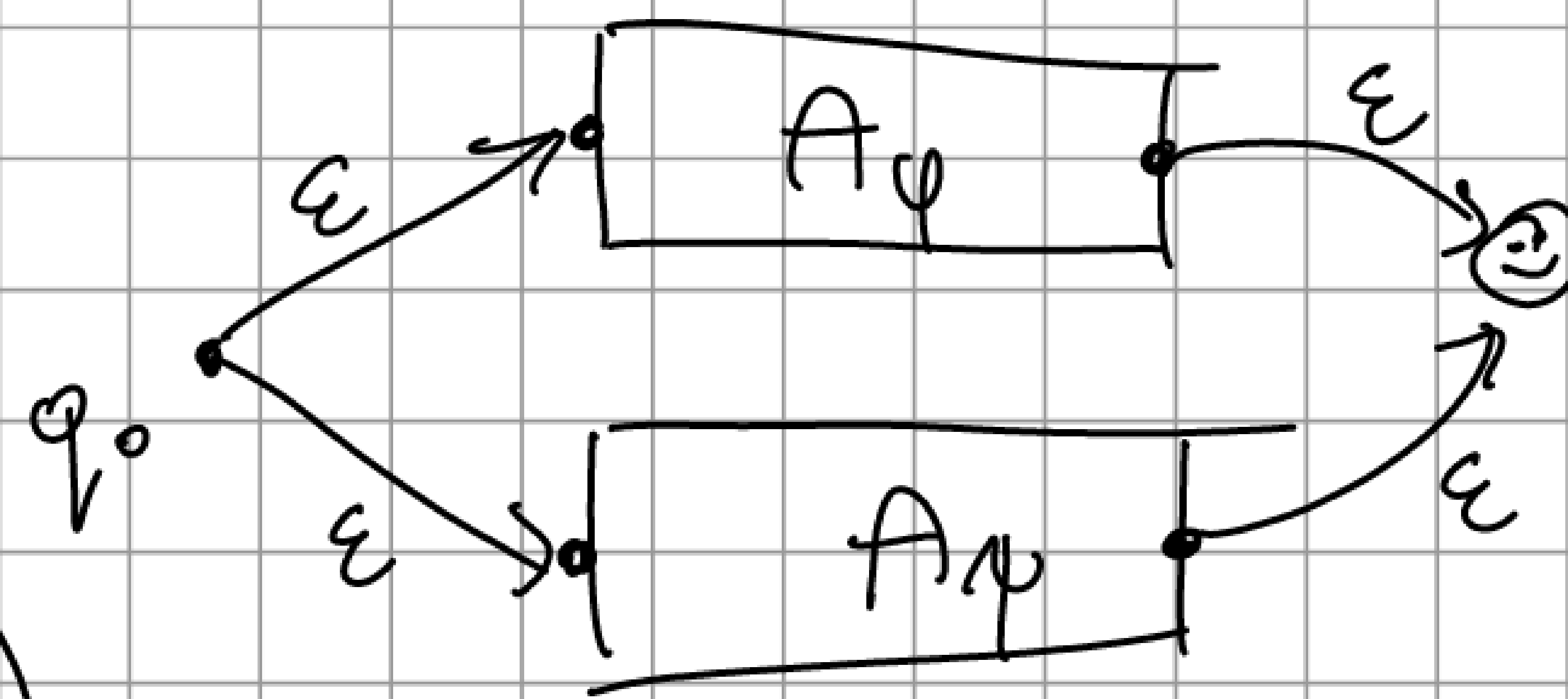
- $\emptyset \rightsquigarrow q_0 \bullet \quad ☺$
- $\varepsilon \rightsquigarrow q_0 \bullet \xrightarrow{\varepsilon} ☺$

- $a \rightsquigarrow$



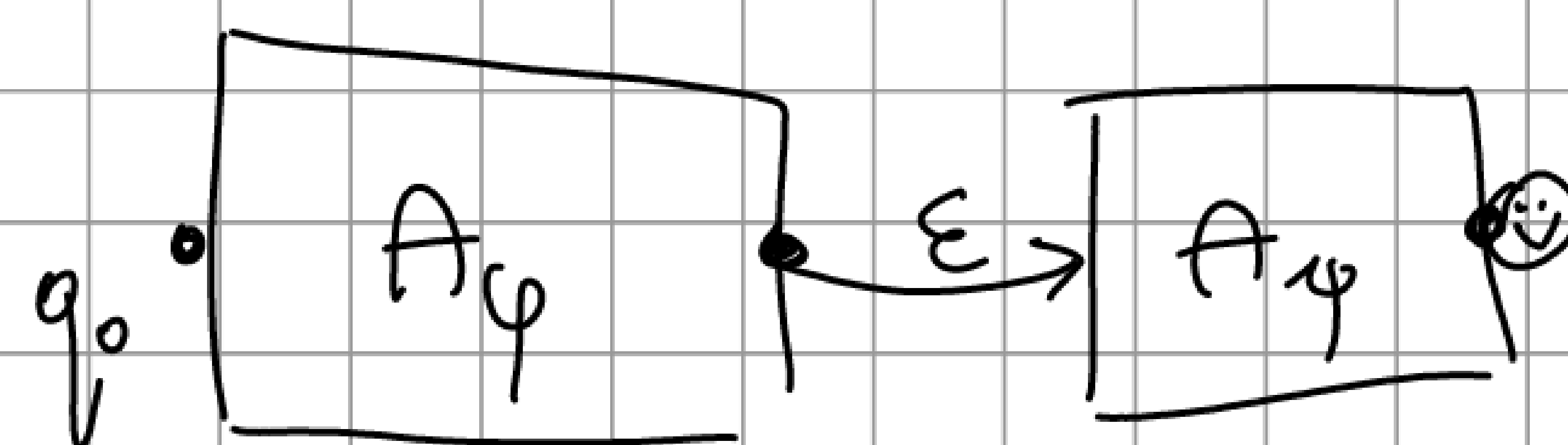
- $\varphi, \psi \rightsquigarrow$

(automat dla $\varphi + \psi$)



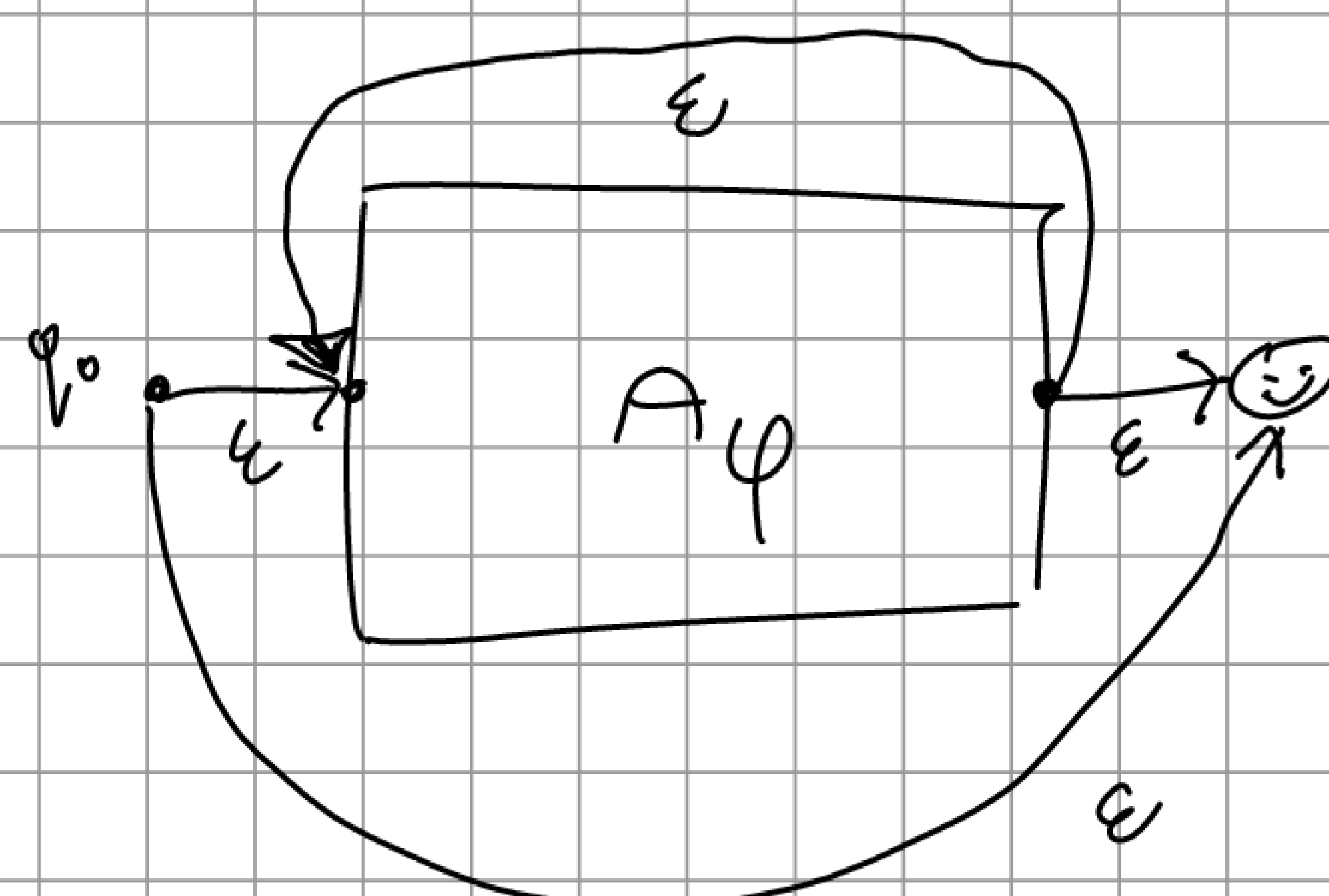
- $\varphi, \psi \rightsquigarrow$

(Automat dla $\varphi\psi$)



- $\varphi \rightsquigarrow$

(Automat dla φ^*)



■

(1) ⇒ (2) Mamy DFA $A = \langle \Sigma, Q, q_0, \delta, F \rangle$

$Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$ (gdzie $q_0 = q_1$).

Dla $1 \leq i, j \leq n$, $0 \leq k \leq n$ napiszemy wyrażenie regularne $\varphi^k_{i,j}$ wyrażające język niepusty oraz $\neq v$

$\{ w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q_i, w) = q_j \wedge$
$\forall v \in \Sigma^*$ (jeśli v jest właściwym prefiksem w oraz $\hat{\delta}(q_i, w) = q_L$, to $L < k$) $\}$

Po drodze z q_i do q_j chodzimy tylko po stanach o indeksach $< k$.

Indukcja względem k:

- $\varphi^0_{i,i} = \varepsilon + \bigoplus_{\substack{a \in \Sigma \\ \delta(q_i, a) = q_i}} a$ (Suma po literach spełniających warunek)

- $\varphi^0_{i,j} = \bigoplus_{\substack{a \in \Sigma \\ \delta(q_i, a) = q_j}} a$

- $\varphi^{k+1}_{i,j} = \varphi^k_{i,j} + \varphi^k_{i,k+1} (\varphi^k_{k+1,k+1})^* \varphi^k_{k+1,j}$

Mając te wyrażenia regularne piszemy ψ t. że $L_A = L_\psi$:

$$\psi = \bigoplus_{q_i \in F} \varphi_{1,i}^{n}$$

∎

UOGÓLNIENIA

Są dwa możliwe kierunki:

- słowa nieskończone
- drzewa

} można iść w oba tych kierunkach jednocześnie

Automat skończony na słowach nieskończonych.

$$\langle \Sigma, Q, q_0, \delta, \text{CO TUTAJ?} \rangle$$

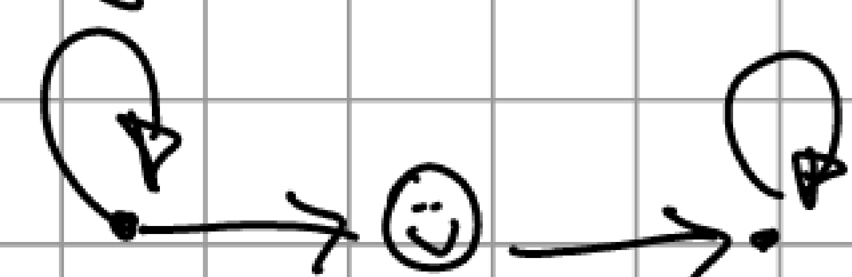
Σ – skończony

CO TUTAJ? – Dużo warunków akceptacji Büchiego, Robina...

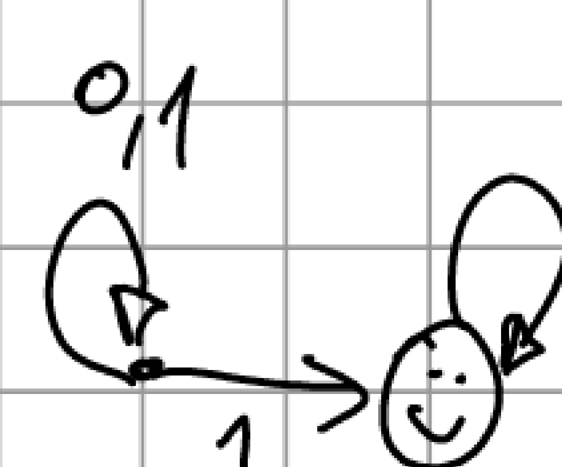
Interpretacja Büchiego: $F \subseteq Q$.
Słowo jest akceptowane, gdy automat nieskończenie wiele razy odwiedza stany z F.

Pytanie: czy deterministyczne automaty Büchiego robią to samo co niedeterministyczne?

Odpowiedź: nie w ten sposób co poprzednio. Przykład: $|\Sigma| = 1$,

NFA: 

Lepsza odpowiedź: L - zbiór słów nieskończonych nad $\Sigma = \{0,1\}$, w których jest tylko skończenie wiele zer.

L jest rozstrzygany przez 

Deterministycznym się nie da: ćwiczenie.

14.03.2022

Uwaga Klasa języków regularnych nad Σ jest najmniejszą klasą języków nad Σ, która:
- zawiera wszystkie języki skończone (*) (i)
- jest zamknięta na sumę, konkatenację (ii) i gwiazdkę Kleene'go (iii) $(L \rightsquigarrow L^*)$

Istnienie: proste, Najmniejszość: pokazać, że dowolna klasa języków spełniająca powyższe warunki zawiera języki regularne.

GRAMATYKI BEZKONTEKSTOWE

Def. **Gramatyka bezkontekstowa** (CFG) to krotka $\langle N, \Sigma, S, \Pi \rangle$, $S \in N$,

$\Pi \subseteq_{\text{skończone}} N \times (N \cup \Sigma)^*$, $N \cap \Sigma = \emptyset$

CFG – Context Free Grammar

Dygresja $\mathcal{A}$: alfabet, $\Pi \subseteq \mathcal{A}^* \times \mathcal{A}^*$ skończone

Dla $w, v \in \mathcal{A}^*$ definiujemy $w \longrightarrow_{\Pi} v$ gdy istnieją słowa $x, y \in \mathcal{A}^*$ i para $\langle l, r \rangle \in \Pi$ t. że $w = xly$ oraz $v = xry$

Po ludzku: bierzemy w, znajdujemy w nim infiks l, zamieniamy go na r i dostajemy v.

Relacje $\xrightarrow{*}_{\Pi}$ i $\xleftrightarrow{*}_{\Pi}$ definiujemy odpowiednio jako tranzytywne i równoważnościowe domknięcie relacji $\longrightarrow_{\Pi}$.

- $\xrightarrow{*}_{\Pi}$ osiągalność w grafie
- $\xleftrightarrow{*}_{\Pi}$ bycie w jednej spójnej składowej (osiągalność w grafie bez skierowania)

KONIEC DYGRESJI

Dla danej CFG $G = \langle N, \Sigma, S, \Pi \rangle$ przez $\overline{L}_G$ oznaczamy $\{ w \in (N \cup \Sigma)^* : S \xrightarrow{*}_{\Pi} w \}$, przez $L_G = \overline{L}_G \cap \Sigma^*$

Def. $L \subseteq \Sigma^*$ jest **bezkontekstowy** (CFL), gdy istnieje CFG G t.że $L = L_G$

Obserwacja Każdy język regularny jest bezkontekstowy.

Dowód Klasa CFL spełnia warunki z uwagi (*), (i), (ii), (iii):

(*): proste, dodajemy reguły $S \to w$ dla w z języka

(i): bierzemy sumę rozłączną dwóch gramatyk i dodajemy reguły $\langle S, S' \rangle$, $\langle S, S'' \rangle$

nowy S

(ii): $G' = \langle N', \Sigma, S', \Pi' \rangle$, $G'' = \langle N'', \Sigma, S'', \Pi'' \rangle$,

konstruujemy $G = \langle N' \sqcup N'' \sqcup \{S\}, \Sigma, S, \Pi' \sqcup \Pi'' \sqcup \langle S, S'S'' \rangle \rangle$

(iii) Podobnie gwiazdka.

Przykład • Notacja: $S \to aSa \mid bSb \mid \varepsilon$ oznacza, że $\Pi = \{\langle S, aSa \rangle, \langle S, bSb \rangle, \langle S, \varepsilon \rangle\}$ (to konkretnie daje język palindromów parzystej długości).

• $S \to SS \mid \varepsilon \mid aSb \mid bSa$

$\rightsquigarrow$ język słów, które mają tyle samo liter a co b.

• $S \to (S) \mid [S] \mid SS \mid \varepsilon$

poprawne nawiasowanie z (,), [,].

Konwencja notacyjna (niemoralna Marcinkowskiego):

Dla języków L, L' piszemy $L = L'$ gdy $L \dot{-} L' \subseteq \{\varepsilon\}$

różnica symetryczna

Def CFG $G = \langle N, \Sigma, S, \Pi \rangle$ jest postaci **normalnej Chomskiego**, gdy każda produkcja z Π jest postaci $A \longrightarrow BC$ dla $A, B, C \in N$ lub $A \longrightarrow a$ dla $A \in N$, $a \in \Sigma$.

TW. (Chomskiego o postaci normalnej)

Dla każdego CFL L istnieje CFG G w postaci Chomsky'ego t. że $L = L_G$.

Dowód: Nudny :(

Lemat (o pompowaniu dla CFG)

Dla każdego CFL L istnieje $n \in \mathbb{N}$ t. że dla każdego $w \in L$, $|w| \geqslant n$, istnieją słowa

s, z, t, y, x t. że $|zty| \leq n$, $|zy| > 0$, $w = sztyx$

dla każdego $k \in \mathbb{N}$ $sz^k t y^k x \in L$.

<u>Uwaga</u> Czy język $\{a^i b^i c^j : i, j \in \mathbb{N}\}$ jest CFG?

Odp.: TAK (proste)

A co z $\{a^i b^j c^j : i, j \in \mathbb{N}\}$?

Odp.: TAK (to samo)

A czym jest przekrój tych języków?

Odp.: $\{a^i b^i c^i : i \in \mathbb{N}\}$

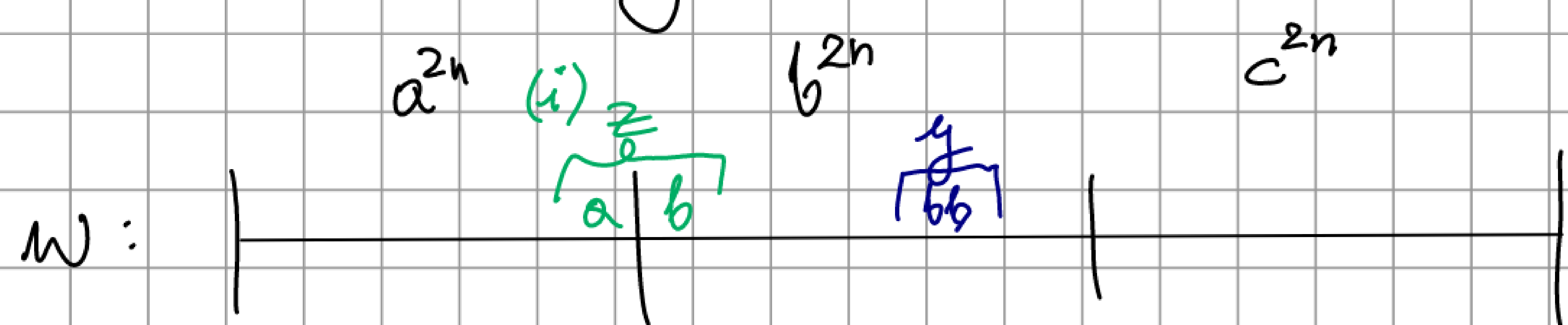
Ten język jednak nie jest CFL!

<u>Dowód</u> Załóżmy, że L jest CF. Niech

n: stała z lematu o pompowaniu.

Niech $w = a^{2n} b^{2n} c^{2n}$. Wtedy są

stałe s, z, t, y, x z lematu.



Przypadki: (i) z lub y zawiera dwie różne literki, to dla $k=2$ wygrywamy

(ii) jeżeli x, y mają tylko po jednej literce, to $k=0$ wygrywamy bo tej trzeciej literki jest więcej.