28.08.2022

PROBLEM DECYZYJNY

- Σ – skończony alfabet
- Σ^* – zbiór skończonych słów nad alfabetem Σ
- $\Sigma^* \supseteq L$ – język / problem

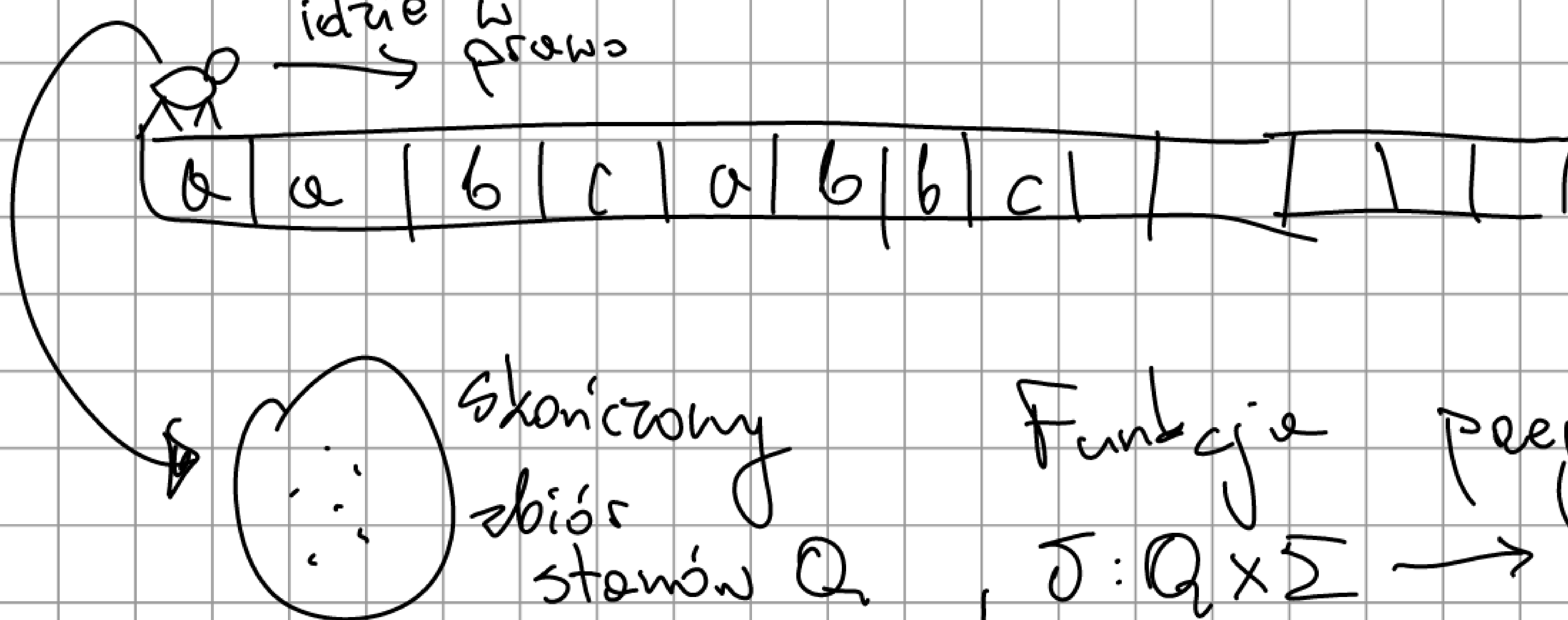
- pytamy o "zasoby obliczeniowe" potrzebne do rozstrzygania tych problemów.

- klasyfikujemy problemy ze względu na te zasoby

Bla bla...

Część I

Automaty skończone



skończony zbiór stanów Q, Funkcja przejścia $\delta : Q \times \Sigma \to Q$

- Stan początkowy $q_0 \in Q$
- zbiór stanów akceptujących $F \subseteq Q$

Ćw. Skonstruuj δ, Q dla $\Sigma = \{0,1\}$,

$L = \{ w \in \{0,1\}^* : |w|_1 \text{ jest parzysta} \}$

Ale dla $L = \{ w \in \{0,1\}^* : |w|_1 = |w|_0 \}$ się nie da!

D-d. (A.a.) Niech Zenon będzie żuczkiem rozstrzygającym L. Zał. że $|Q| = k$.

$$w_0 = \varepsilon \rightsquigarrow s_0 \in Q$$

$$w_1 = 0 \rightsquigarrow s_1 \in Q$$

$$\vdots$$

$$w_i = 0^i \rightsquigarrow s_i \in Q$$

$$\vdots$$

$$w_k = 0^k \rightsquigarrow s_k \in Q$$

Jest i, j t. że

$$s_i = s_j$$

Spójrzmy na

$$a = w_i 1^i \rightsquigarrow s \in F$$

$$b = w_j 1^i \rightsquigarrow s \notin F \ \text{↯}$$

Deterministyczny automat skończony (DFA) to krotka $\langle \Sigma, Q, q_0, \delta, F \rangle$.

Mamy $\delta : Q \times \Sigma \to Q$, definiujemy $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$:

$$\begin{cases} \hat{\delta}(q, \varepsilon) = q \\ \hat{\delta}(q, wa) = \delta(\hat{\delta}(q, w), a) \end{cases}$$

LUB

równoważne ćw.

$$\hat{\delta}(q, aw) = \hat{\delta}(\delta(q, a), w)$$

Dla DFA $A = \langle \Sigma, Q, q_0, \delta, F \rangle$ przez L_A oznaczamy $\{ w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q_0, w) \in F \}$.

<u>Def.</u> $L \subseteq \Sigma^*$ nazywamy regularnym gdy istnieje DFA A t. że $L = L_A$.

<u>Lemat</u> (o pompowaniu dla języków regularnych)
Dla każdego j. reg. L istnieje $n \in \mathbb{N}$ t. że dla każdego $w \in L$ t. że $|w| \geq n$ istnieją słowa x, y, z t. że $xyz = w$

oraz $y \neq \varepsilon$, $|xy| \leq n$ takie że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ $xy^k z \in L$.

<u>Przykład</u> Weźmy $L = \{ w \in \{0,1\}^* : |w|_0 = |w|_1 \}$.

Zał. że L regularny. Weźmy n jak z lematu. Niech $w = 0^n 1^n \in L$. Weźmy x, y, z jak w lemacie. Ale $|xy| \leq n$. więc $|y|_1 = 0$. Dla $k = 0$: $xz \in L$

(nie ma "1" w y) ale $|xz|_0 < |xz|_1$ ↯

<u>Dowód lematu</u>

Weźmy $L = L_A$ regularny $(A = \langle \Sigma, Q, q_0, \delta, F \rangle)$.

Niech $n = |Q| + 1$. Weźmy $w \in L$ t.że $|w| \geq n$.

Niech $w = a_1 a_2 \ldots a_l$, niech $s_i = \hat{\delta}(q_0, a_1 \ldots a_i)$.

Wtedy $s_i = s_j$ dla pewnych $i < j \leq n$.

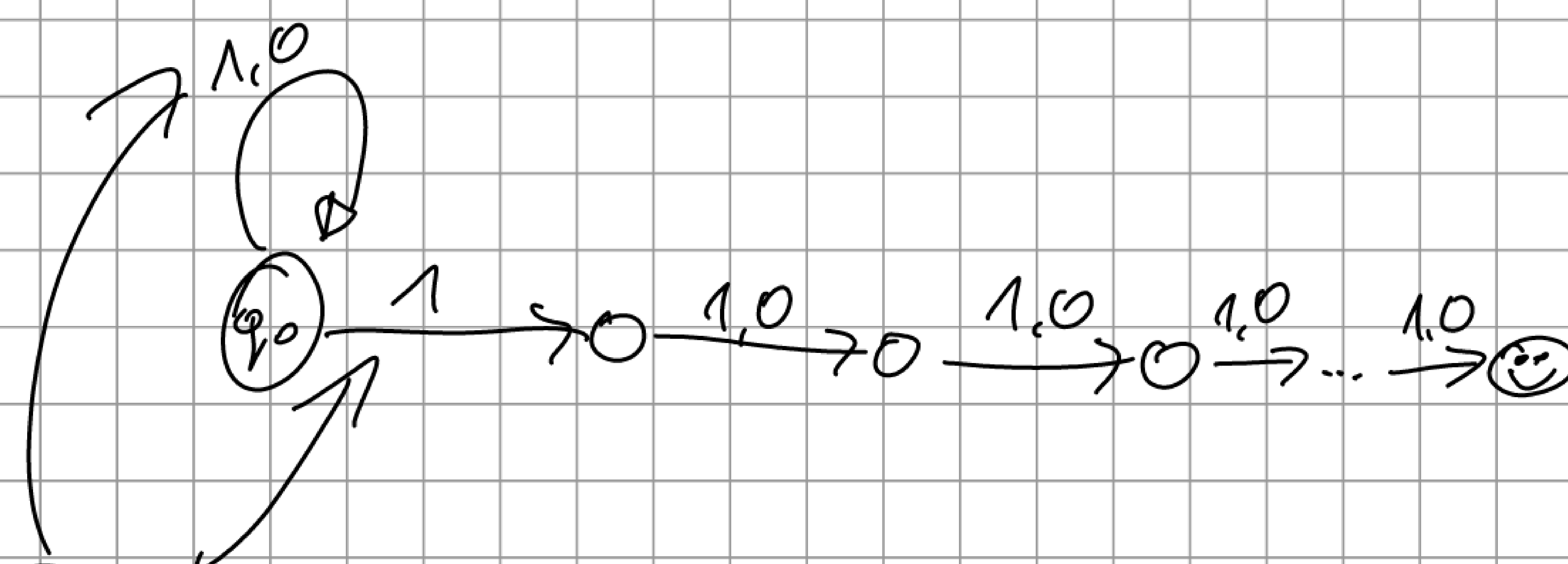
Niech $x = a_1 \ldots a_i$, $y = a_{i+1} \ldots a_j$, $z = a_{j+1} \ldots a_l$. Wtedy dla $k \in \mathbb{N}$ ...

1.03.2022

NIEDETERMINISTYCZNE AUTOMATY SKOŃCZONE (NFA)

Przykład

$L = \{ w1v \in \{0,1\}^* : |v| = 9 \}$



DWA PRZEJŚCIA Z 1 $\longrightarrow$ ŻUCZEK PYTA NIEBIOS

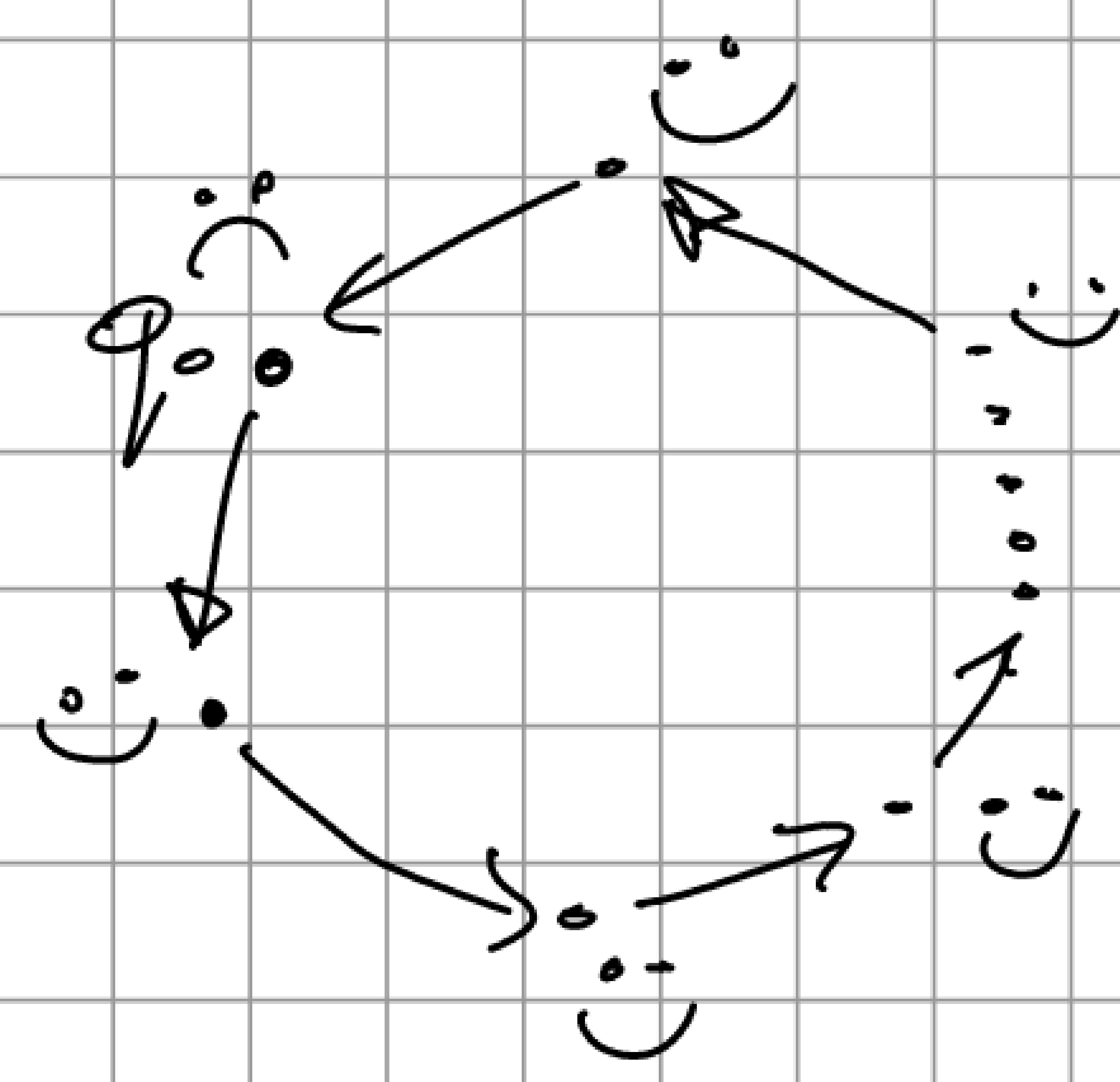
"CO ROBIĆ? JAK ŻYĆ"

A NIEBIOSA ODPOWIADAJĄ

Taki automat daje gwarancję, że na pewno nie trafimy w stan akceptujący, jeśli słowo nie jest z języka (nie ma "false-positive", są "false-negative")

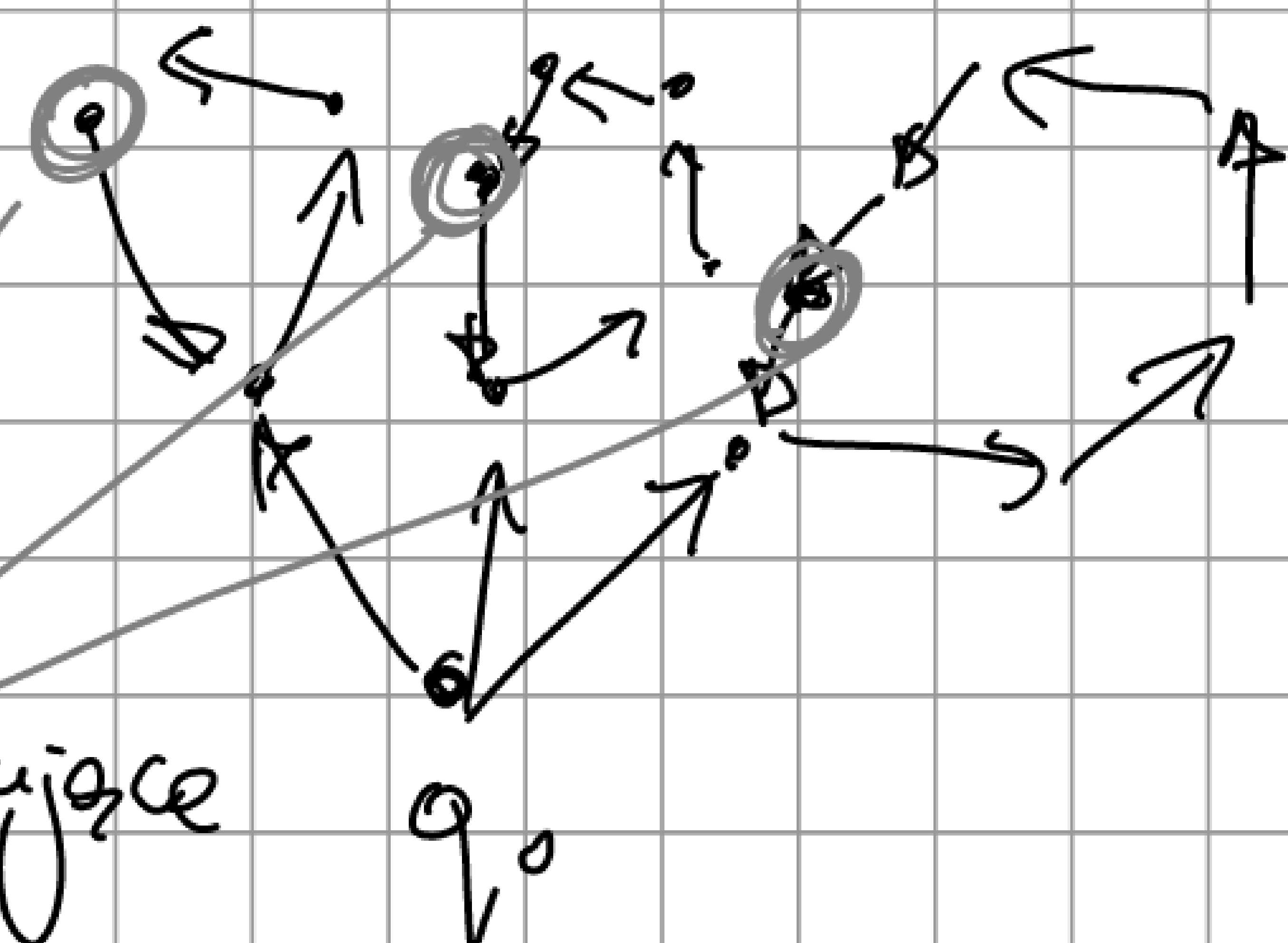
Przykład 2 $\quad L = \{0^i : 105 \nmid i\}$

Det. aut.:



105 stanów

Niedet.:



Znowu: na pewno jeśli $105 \mid i$, to trafimy w stan nieakcept.

Def. Niedeterministyczny automat skończony to krotka $\langle \Sigma, Q, q_0, \delta, F \rangle$ jak w DFA poza δ, gdzie

$$\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q.$$

$\delta(q, a, q')$ ~ z q do q' jest strzałka z etykietą a.

Teraz $\hat{\delta} \subseteq Q \times \Sigma^* \times Q$:

$$\begin{cases} \hat{\delta}(q, \varepsilon, q') \iff q = q' \\ \hat{\delta}(q, wa, q') \iff \exists p \in Q \ \hat{\delta}(q, w, p) \wedge \delta(p, a, q') \end{cases}$$

Alternatywna wersja wg JMa.

Dla każdego $w \in \Sigma^*$ definiujemy $\delta_w \subseteq Q \times Q$:

$$\begin{cases} \delta_\varepsilon = id_Q \\ \text{jeśli } a \in \Sigma \text{ to } \delta_a(q, q') \iff \delta(q, a, q') \\ \delta_{wa} = \delta_w \circ \delta_a \end{cases}$$

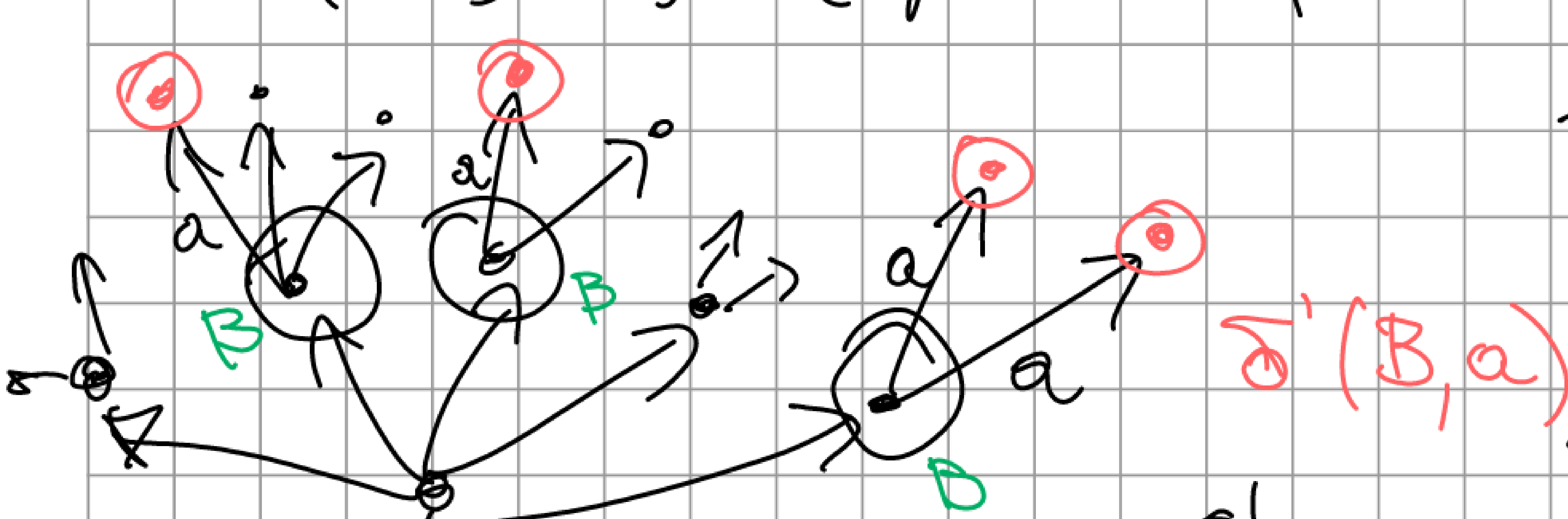
Wtedy $\hat{\delta}(q, w, q') \iff \delta_w(q, q')$.

Def. A: NFA. Wtedy
$$L_A = \{w \in \Sigma^* : \exists q \in F \ \hat{\delta}(q_0, w, q)\}$$

Tw. Niech A: NFA. Wtedy $\exists A'$: DFA t. że $L_A = L_{A'}$.

D-d. Weźmy dowolne NFA $A = \langle \Sigma, Q, q_0, \delta, F \rangle$.
Zbudujemy $A' = \langle \Sigma, Q', q_0', \delta', F' \rangle$.
Niech $Q' = \mathcal{P}(Q)$, $q_0' = \{q_0\}$,
$F' = \{B \subseteq Q : B \cap F \neq \emptyset\}$,

$$\delta'(B, a) = \{q \in Q : \exists p \in B \ \delta(p, a, q)\}.$$



Te stany, do których można dojść z któregoś stanu z B po kraw. z etykietą a.

NFA Z ε-PRZEJŚCIAMI

Takie coś, że możemy czasem sobie przejść ze stanu do stanu bez wczytania znaków. Je też można zdeterminizować.

7.03.2022

WYRAŻENIA REGULARNE (nad Σ)

- $\emptyset$ jest wyrażeniem regularnym i $L_\emptyset = \emptyset$
- ε jest wyr. reg. i $L_\varepsilon = \{\varepsilon\}$
- jeśli $a \in \Sigma$ to a jest wyr. reg. oraz $L_a = \{a\}$
- jeśli φ, ψ są wyr. reg. to $\varphi + \psi$ jest wyrażeniem regularnym i $L_{\varphi+\psi} = L_\varphi \cup L_\psi$,
  $\varphi\psi$ jest wyrażeniem regularnym i $L_{\varphi\psi} = L_\varphi L_\psi = \{w_1 w_2 : w_1 \in L_\varphi, w_2 \in L_\psi\}$.

$$L_1 L_2 = \{w_1 w_2 : w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$$

$L \subseteq \Sigma^*$, wtedy $L^0 = L_\varepsilon$, $L^1 = L$, $L^{i+1} = L^i L$

$$L^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$$

- jeśli φ jest wyr. reg. to φ^* też jest oraz $L_{\varphi^*} = (L_\varphi)^*$

Przykład $\Sigma = \{0,1\}$, $0^*(10^*10^*)^*$

Tw. Niech $L \subseteq \Sigma^*$. Wtedy NWSR:

(1) L jest regularny, tj. istnieje DFA A t.że $L = L_A$.

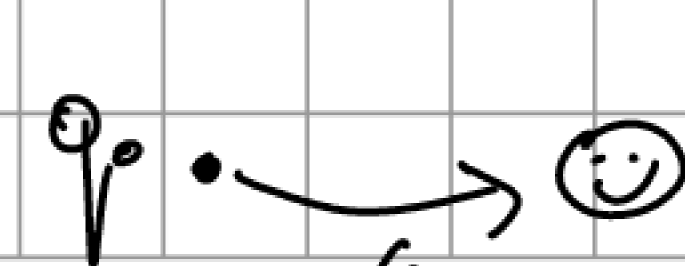
(2) Istnieje wyrażenie regularne φ t.że $L = L_\varphi$.

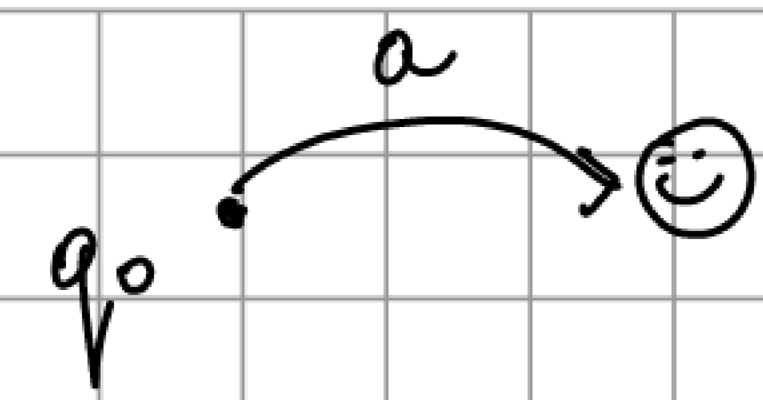
(3) Istnieje NFA z ε-przejściami A' t.że $L = L_{A'}$.

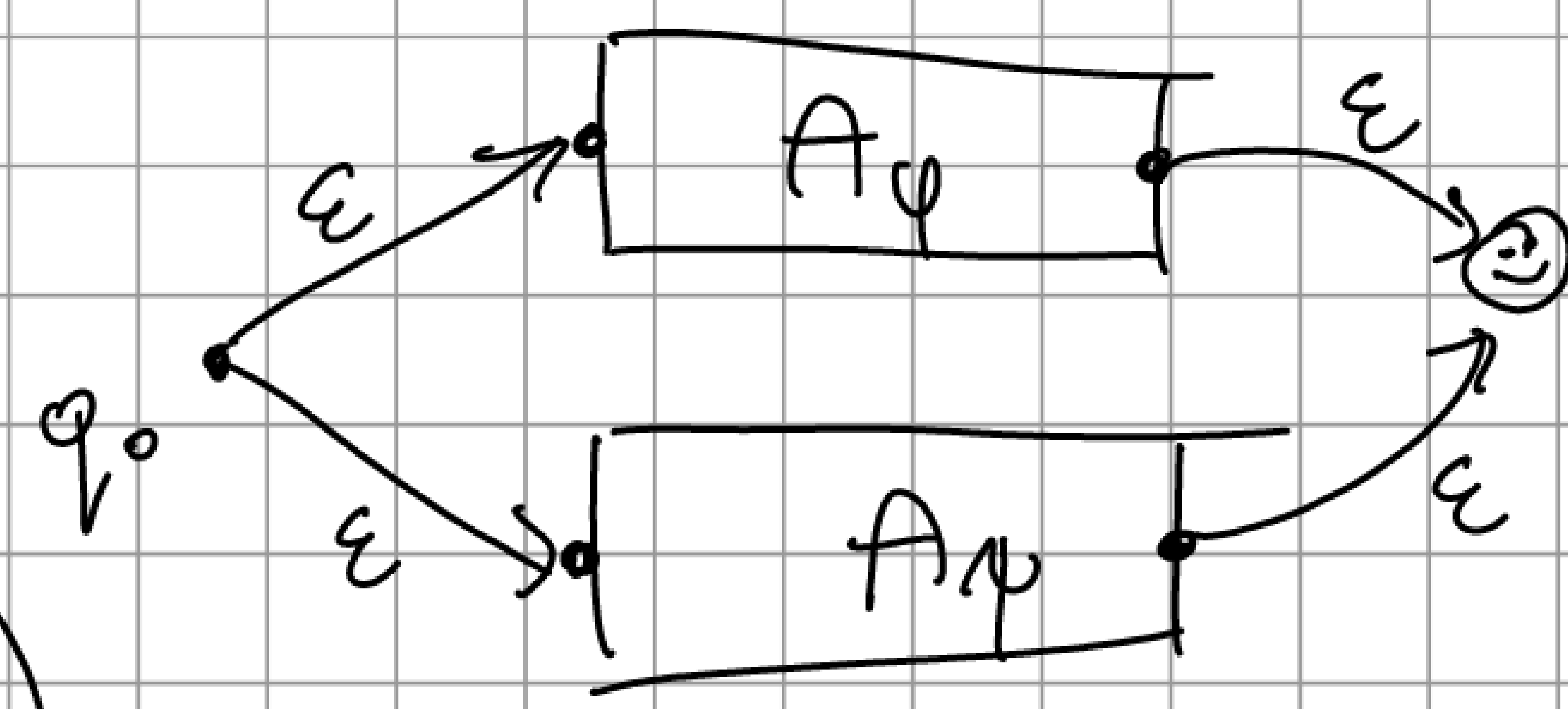
D-d. (3) $\Rightarrow$ (1) Było. ∎

(2) $\Rightarrow$ (3) Indukcja względem długości wyrażenia. Każdy NFA który zbudujemy będzie miał jeden stan wejściowy niebędący akceptującym i jeden akceptujący.

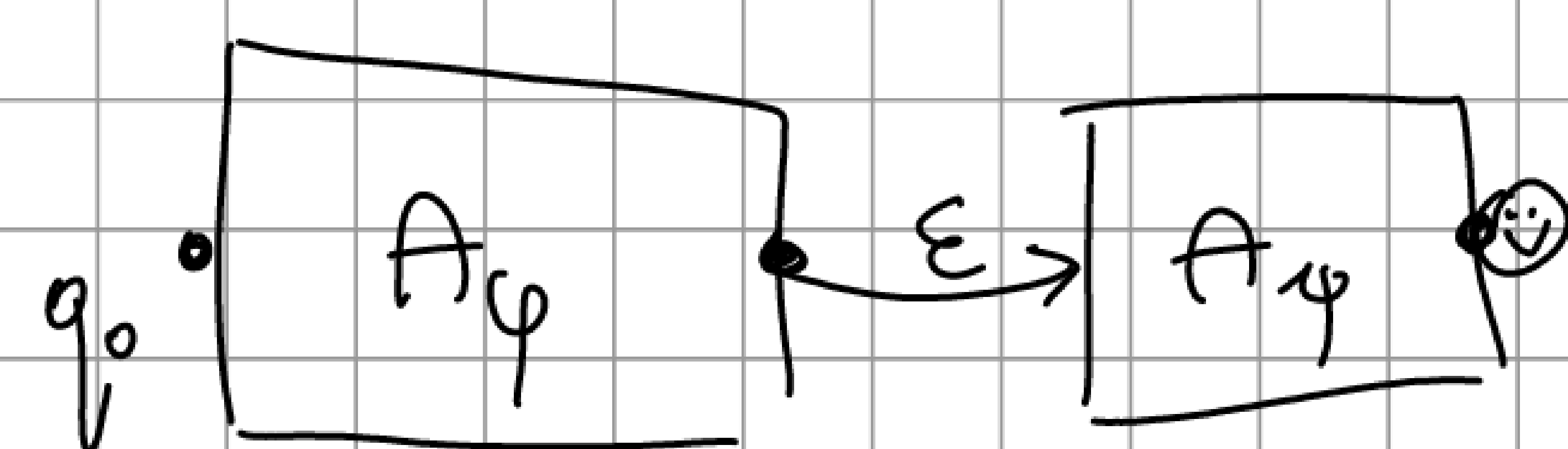
- $\emptyset \rightsquigarrow$ 

- $\varepsilon \rightsquigarrow$ 

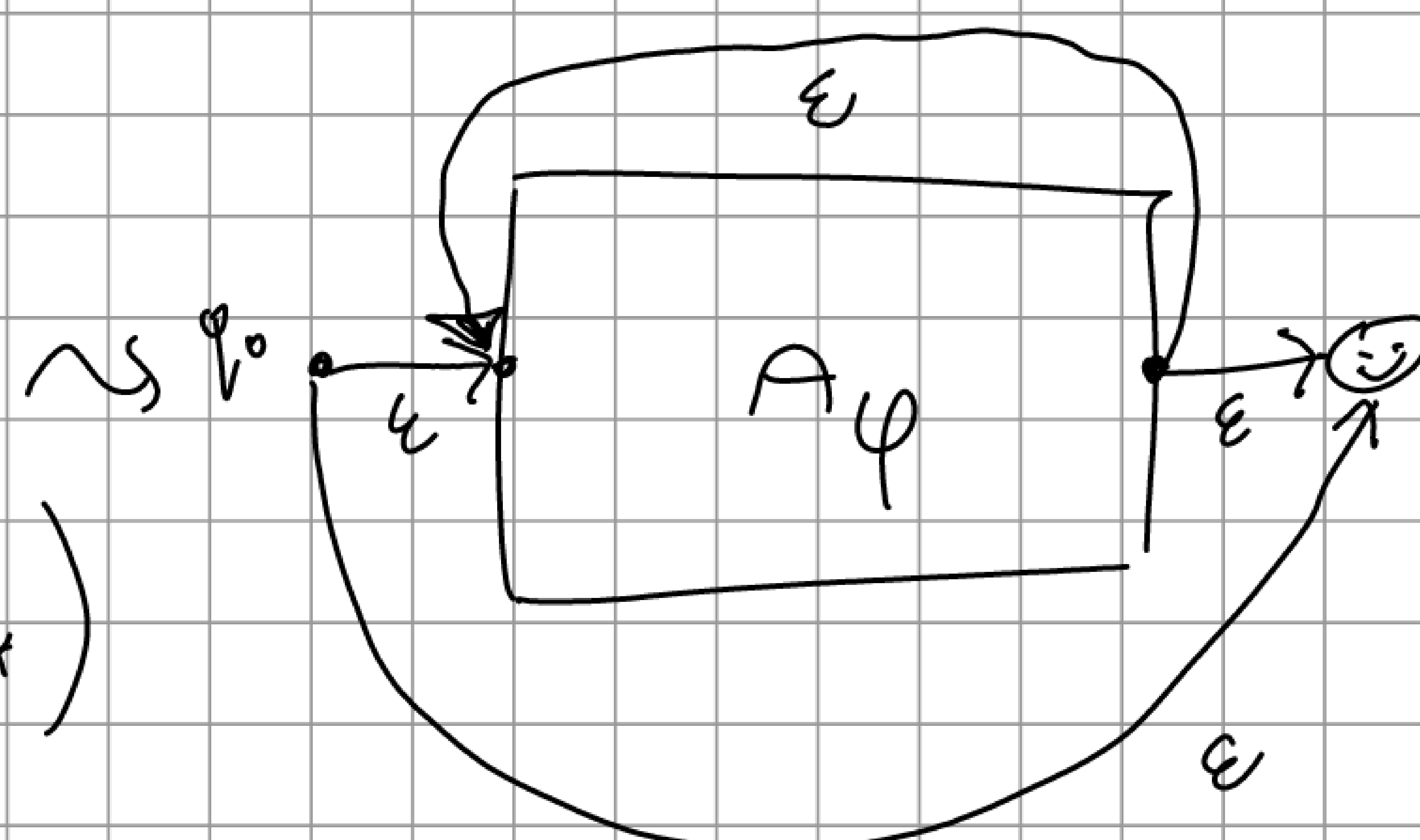
- $a \rightsquigarrow$ 

- $\varphi, \psi \rightsquigarrow$ 

(automat dla $\varphi + \psi$)

- $\varphi, \psi \rightsquigarrow$ 

(Automat dla $\varphi\psi$)

- $\varphi \rightsquigarrow$ 

(Automat dla φ^*)

(1) $\Longrightarrow$ (2) Mamy DFA $A = \langle \Sigma, Q, q_0, \delta, F \rangle$
$Q = \{q_1, \dots, q_n\}$ (gdzie $q_0 = q_1$).

Dla $1 \le i, j \le n, 0 \le k \le n$ napiszemy wyrażenie regularne $\varphi^k_{i,j}$ wyrażające język niepusty oraz $\neq v$

$\{ w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q_i, w) = q_j \wedge$

$\forall v \in \Sigma^* ($jeśli v jest właściwym prefiksem w oraz $\hat{\delta}(q_i, w) = q_L$, to $L < k) \}$

Po drodze z q_i do q_j chodzimy tylko po stanach o indeksach $< k$.

Indukcja względem k:

- $\varphi^0_{i,i} = \varepsilon + \bigoplus_{\substack{a \in \Sigma \\ \delta(q_i, a) = q_i}} a$ (Suma po literach spełniających warunek)

- $\varphi^0_{i,j} = \bigoplus_{\substack{a \in \Sigma \\ \delta(q_i, a) = q_j}} a$

- $\varphi^{k+1}_{i,j} = \varphi^k_{i,j} + \varphi^k_{i,k+1} (\varphi^k_{k+1,k+1})^* \varphi^k_{k+1,j}$

Mając te wyrażenia regularne piszemy ψ t. że $L_A = L_\psi$:

$$\psi = \bigoplus_{q_i \in F} \varphi^n_{1,i}$$

$\blacksquare$

UOGÓLNIENIA

Są dwa możliwe kierunki:

- słowa nieskończone
- drzewa

} można iść w obu tych kierunkach jednocześnie

Automat skończony na słowach nieskończonych.

$$\langle \underset{\text{skończony}}{\Sigma}, Q, q_0, \delta, \text{CO TUTAJ?} \rangle$$

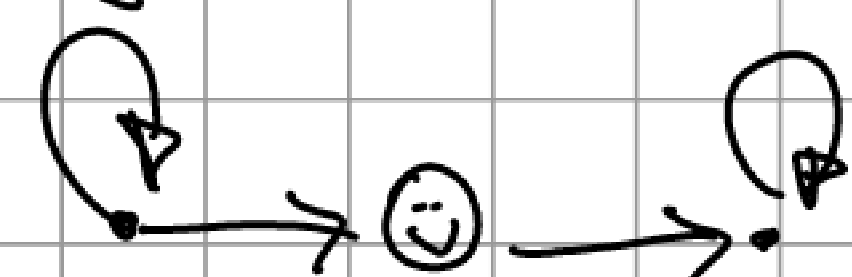
Dużo warunków akceptacji Büchiego, Rabina...

Interpretacja Büchiego: $F \subseteq Q$.

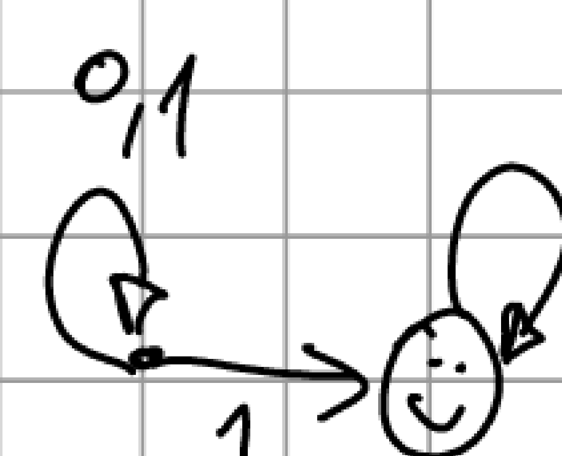
Słowo jest akceptowane, gdy automat nieskończenie wiele razy odwiedza stany z F.

Pytanie: czy deterministyczne automaty Büchiego robią to samo co niedeterministyczne?

Odpowiedź: nie w ten sposób co poprzednio. Przykład: $|\Sigma| = 1$,

NFA: 

Lepsza odpowiedź: L - zbiór słów nieskończonych nad $\Sigma = \{0,1\}$, w których jest tylko skończenie wiele zer.

L jest rozstrzygany przez 

Deterministycznym się nie da: ćwiczenie.

14.03.2022

Uwaga Klasa języków regularnych nad Σ jest najmniejszą klasą języków nad Σ, która:
- zawiera wszystkie języki skończone (*) (i)
- jest zamknięta na sumę, konkatenację (ii) i gwiazdkę Kleene'go (iii) ($L \rightsquigarrow L^*$)

Istnienie: proste, Najmniejszość: pokazać, że dowolna klasa języków spełniająca powyższe warunki zawiera języki regularne.

GRAMATYKI BEZKONTEKSTOWE

Def. **Gramatyka bezkontekstowa** (CFG) to krotka $\langle N, \Sigma, S, \Pi \rangle$, $S \in N$, $\underset{\text{skończone}}{\Pi \subseteq N \times (N \cup \Sigma)^*}$, $N \cap \Sigma = \emptyset$

CFG – Context Free Grammar

Dygresja $\mathcal{A}$: alfabet, $\Pi \subseteq \mathcal{A}^* \times \mathcal{A}^*$ skończone

Dla $w, v \in \mathcal{A}^*$ definiujemy $w \longrightarrow_\Pi v$ gdy istnieją słowa $x, y \in \mathcal{A}^*$ i para $\langle l, r \rangle \in \Pi$ t. że $w = xly$ oraz $v = xry$

Po ludzku: bierzemy w, znajdujemy w nim infiks l, zamieniamy go na r i dostajemy v.

Relacje $\xrightarrow{*}_\Pi$ i $\xleftrightarrow{*}_\Pi$ definiujemy odpowiednio jako tranzytywne i równoważnościowe domknięcie relacji $\longrightarrow_\Pi$.

- $\xrightarrow{*}_\Pi$ osiągalność w grafie
- $\xleftrightarrow{*}_\Pi$ bycie w jednej spójnej składowej (osiągalność w grafie bez skierowania)

KONIEC DYGRESJI

Dla danej CFG $G = \langle N, \Sigma, S, \Pi \rangle$ przez $\overline{L}_G$ oznaczamy $\{ w \in (N \cup \Sigma)^* : S \xrightarrow{*}_\Pi w \}$, przez $L_G = \overline{L}_G \cap \Sigma^*$

Def. $L \subseteq \Sigma^*$ jest **bezkontekstowy** (CFL), gdy istnieje CFG G t.że $L = L_G$

Obserwacja Każdy język regularny jest bezkontekstowy.

Dowód Klasa CFL spełnia warunki z uwagi (*), (i), (ii), (iii):

(*): proste, dodajemy reguły $S \to w$ dla w z języka

(i): bierzemy sumę rozłączną dwóch gramatyk i dodajemy reguły $\langle S, S' \rangle$, $\langle S, S'' \rangle$

nowy S

(ii): $G' = \langle N', \Sigma, S', \Pi' \rangle$, $G'' = \langle N'', \Sigma, S'', \Pi'' \rangle$,

konstruujemy $G = \langle N' \sqcup N'' \sqcup \{S\}, \Sigma, S, \Pi' \sqcup \Pi'' \sqcup \langle S, S'S'' \rangle \rangle$

(iii) Podobnie gwiazdka.

<u>Przykład</u> • Notacja: $S \to aSa \mid bSb \mid \varepsilon$

oznacza, że $\Pi = \{\langle S, aSa \rangle, \langle S, bSb \rangle, \langle S, \varepsilon \rangle\}$

(to konkretnie daje język palindromów parzystej długości).

• $S \to SS \mid \varepsilon \mid aSb \mid bSa$

$\rightsquigarrow$ język słów, które mają tyle samo liter a co b.

• $S \to (S) \mid [S] \mid SS \mid \varepsilon$

poprawne nawiasowanie z (,), [,].

Konwencja notacyjna (niemoralna Marcinkowskiego):

Dla języków L, L' piszemy $L = L'$ gdy $L \dot{-} L' \subseteq \{\varepsilon\}$

różnica symetryczna

Def CFG $G = \langle N, \Sigma, S, \Pi \rangle$ jest postaci **normalnej Chomskiego**, gdy każda produkcja z Π jest postaci $A \to BC$ dla $A, B, C \in N$ lub $A \to a$ dla $A \in N$, $a \in \Sigma$.

Tw. (Chomskiego o postaci normalnej)
Dla każdego CFL L istnieje CFG G w postaci Chomsky'ego t. że $L = L_G$.

Dowód: Nudny :(

Lemat (o pompowaniu dla CFG)
Dla każdego CFL L istnieje $n \in \mathbb{N}$ t. że dla każdego $w \in L$, $|w| \geq n$, istnieją słowa

s, z, t, y, x t.że $|zty| \le n$, $|zy| > 0$, $w = sztyx$

dla każdego $k \in \mathbb{N}$ $sz^k t y^k x \in L$.

<u>Uwaga</u> Czy język $\{a^i b^i c^j : i, j \in \mathbb{N}\}$ jest CFG?

Odp.: TAK (proste)

A co z $\{a^i b^j c^j : i, j \in \mathbb{N}\}$?

Odp.: TAK (to samo)

A czym jest przekrój tych języków?

Odp.: $\{a^i b^i c^i : i \in \mathbb{N}\}$

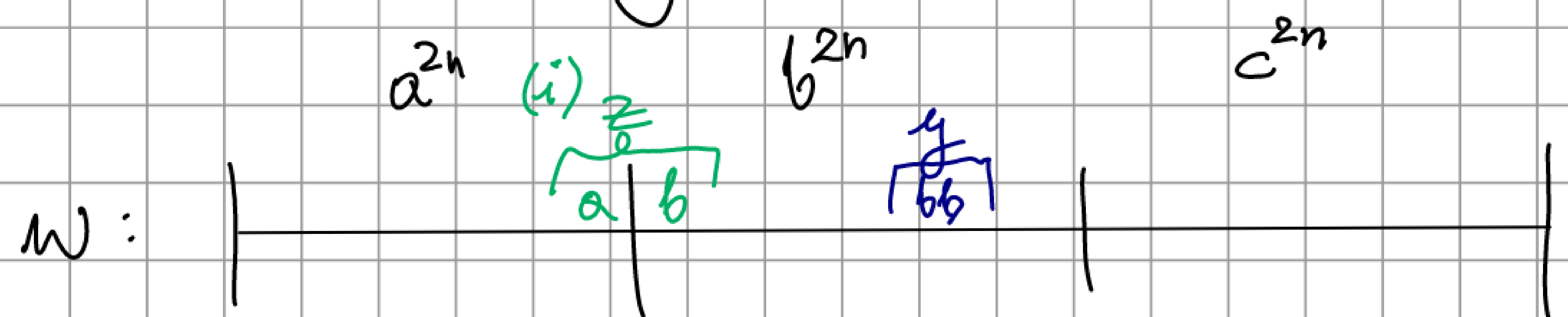
Ten język jednak nie jest CFL!

<u>Dowód</u> Załóżmy, że L jest CF. Niech

n: stała z lematu o pompowaniu.

Niech $w = a^{2n} b^{2n} c^{2n}$. Wtedy są

stałe s, z, t, y, x z lematu.



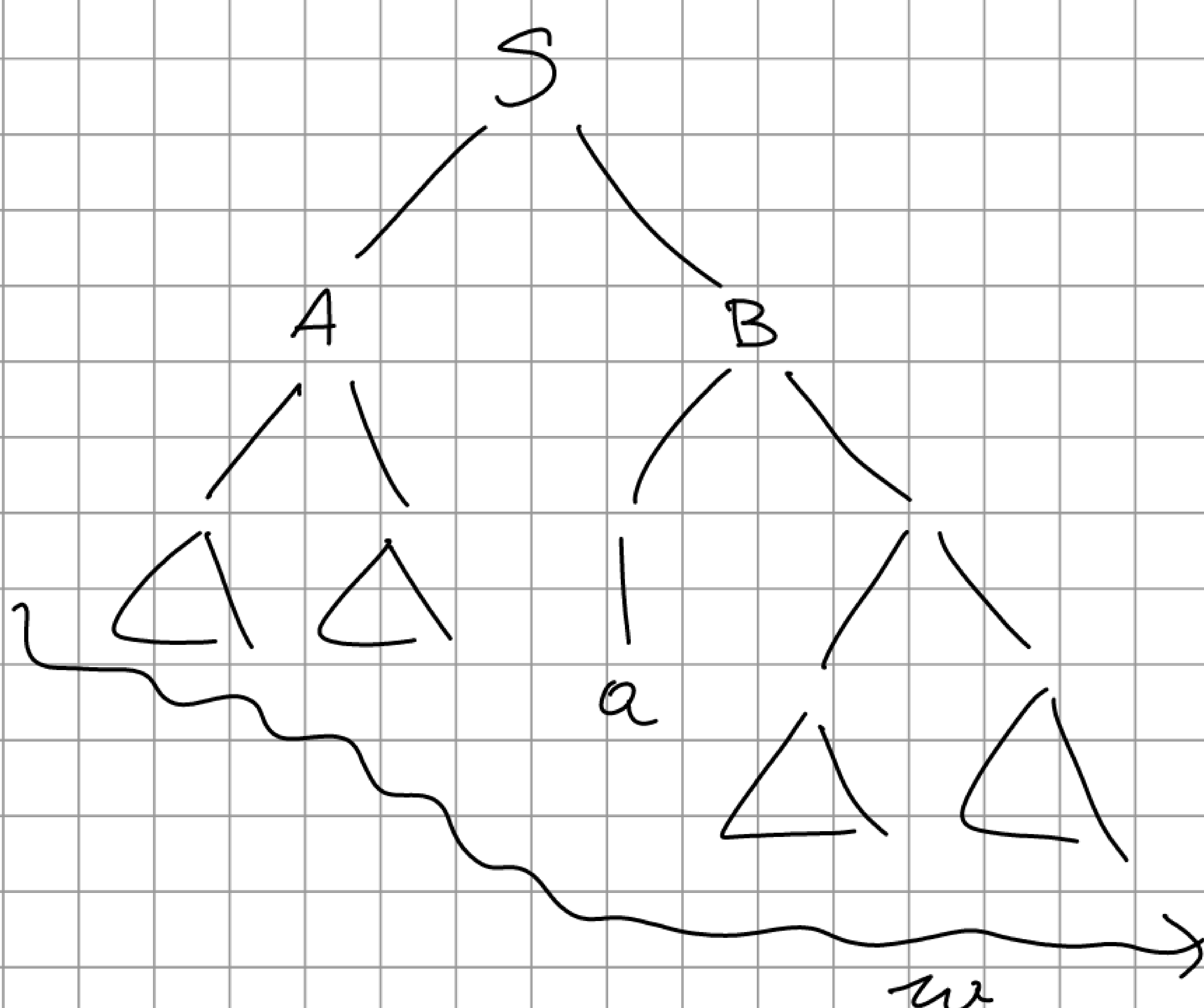
Przypadki: (i) z lub y zawiera dwie różne literki, to dla $k=2$ wygrywamy

(ii) jeżeli x, y mają tylko po jednej literce, to $k=0$ wygrywamy bo tej trzeciej literki jest więcej.

21.03.2022

D-d. (lematu o pompowaniu)

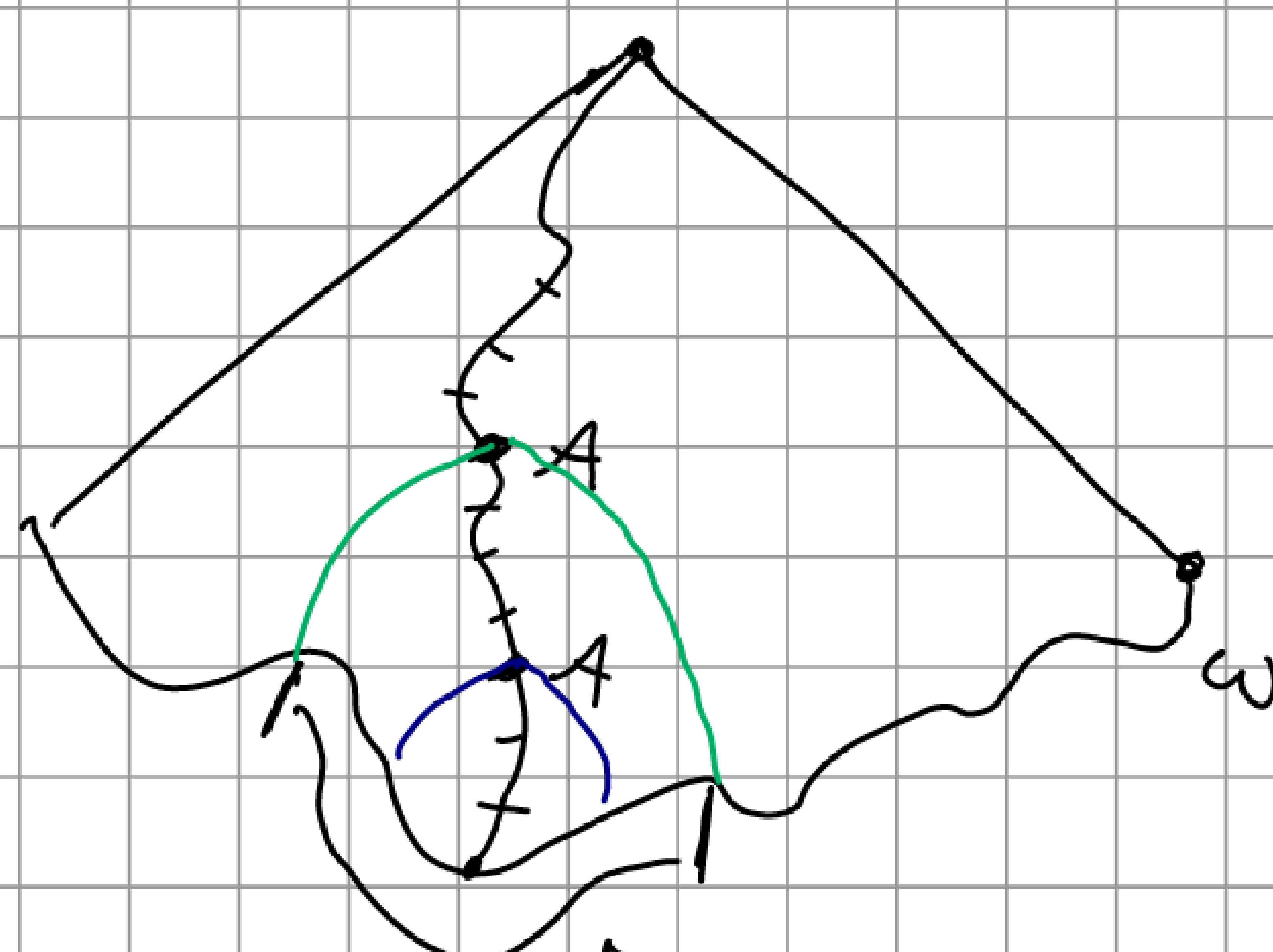
Weźmy $L \in CFL$ oraz CFG $G = \langle N, \Sigma, S, \Pi \rangle$ w postaci normalnej Chomsky'ego i niech $n = 2^{|N|+3}$. Niech $w \in L$, $|w| \geq n$.



Drzewo słowa w.

Jaka jest najdłuższa ścieżka od korzenia do liścia? Co najmniej ma długość $|N|+3$ ($\log n$).

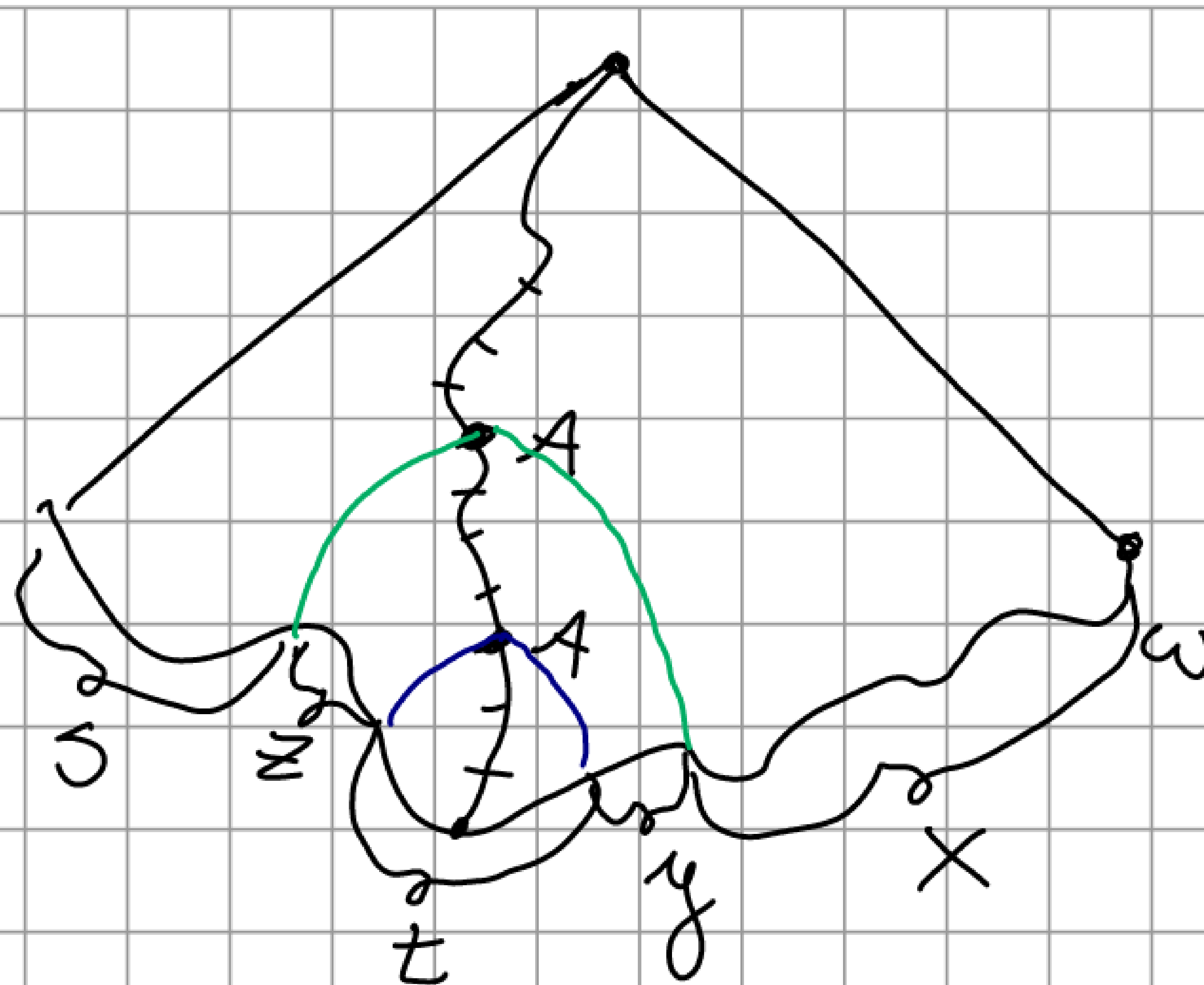
Na tej ścieżce są same nieterminale (poza liściem), zatem musi być jakiś nieterminal, który się powtarza. Niech A będzie takim nieterminalem który jest <u>najniżej</u> na tej ścieżce.



← to ma dł. $\leq 2^{|N|+1}$

(no bo tylko A się może powtórzyć na tej ścieżce)

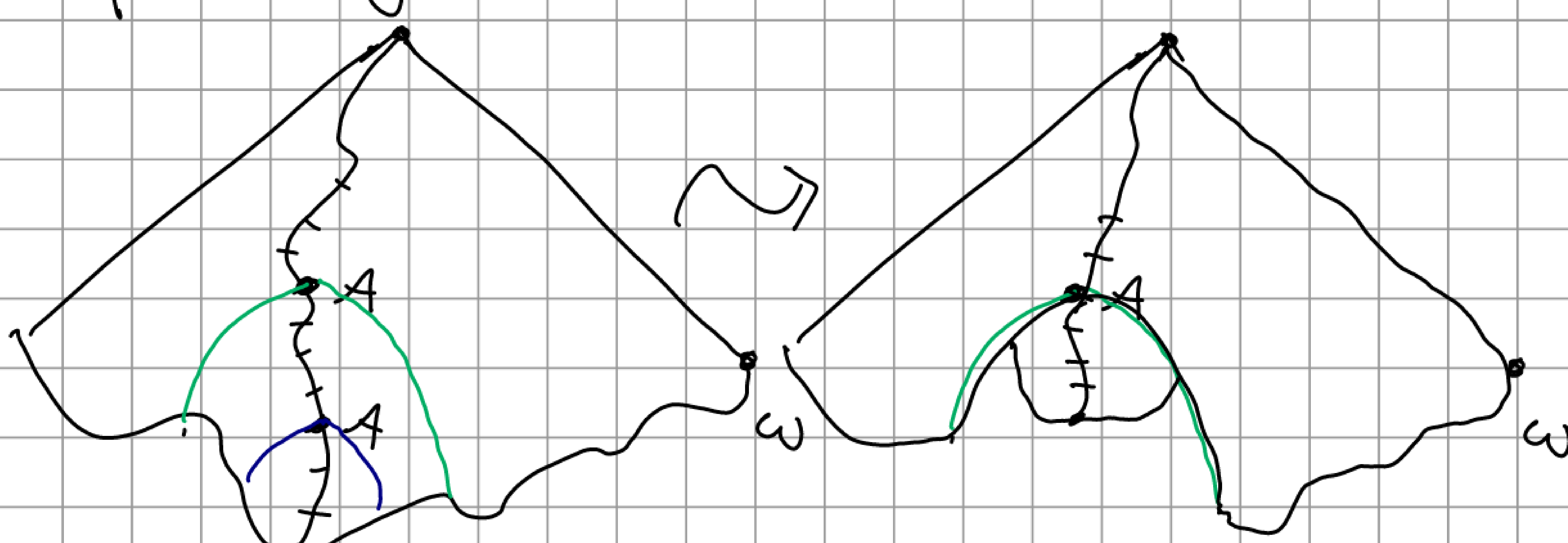
Podział jest naturalny:



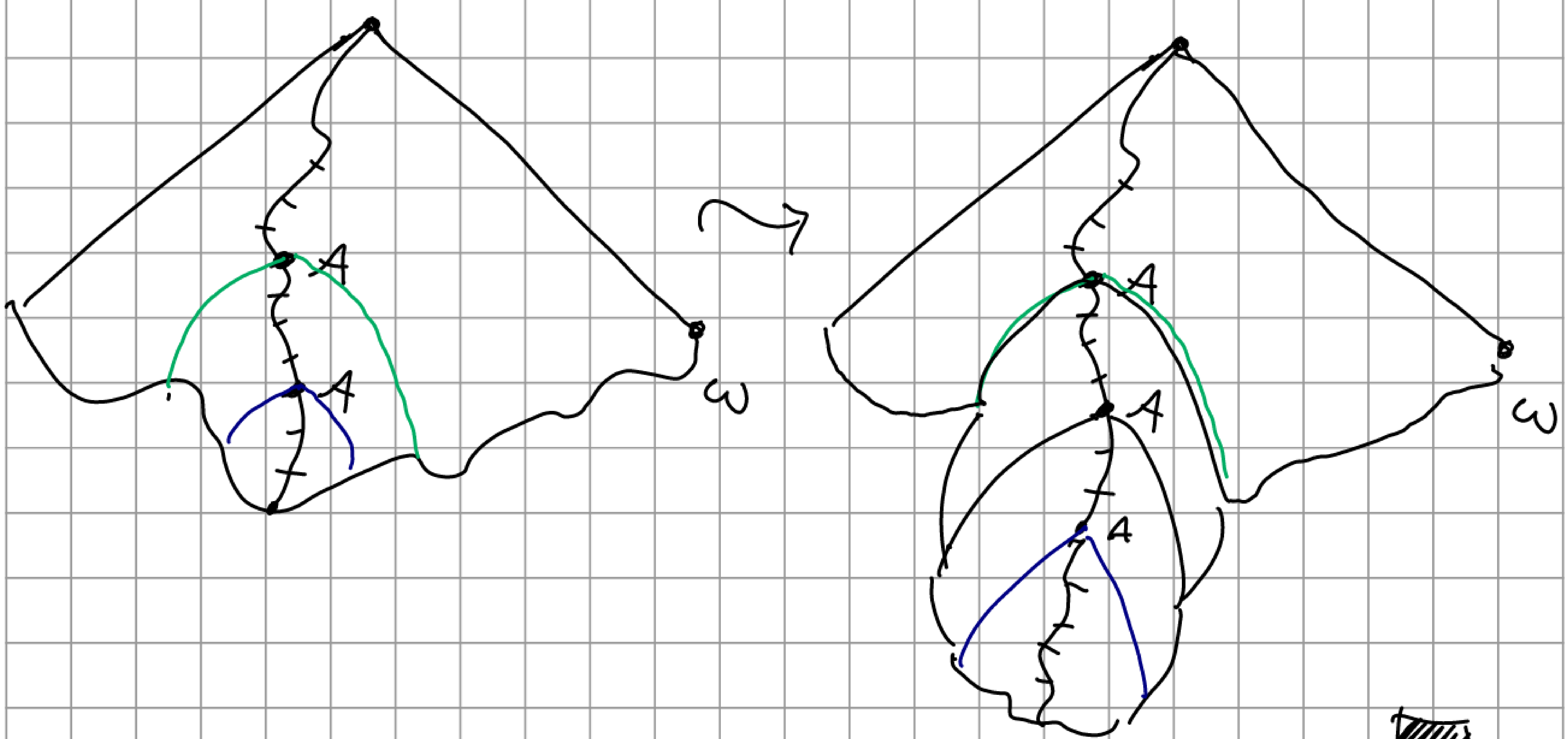
Wtedy $|zty| \leq 2^{|N|+1} \leq n$.

Ponadto $|zy| > 0$ (to niższe wystąpienie A jest potomkiem tylko jednego dziecka tego wystąpienia wyżej).

- gdy $k=0$: "przeszczepiamy" tę niższą produkcję A pod tę większą



• gdy $k \geq 1$: "replikujemy" tę wyższą produkcję tyle ile trzeba.



$\blacksquare$

AUTOMATY ZE STOSEM

Def. **Automat ze stosem** (NPDA: Nondeterministic Push Down Automaton) to krotka

$$A = \langle \Sigma, Q, q_0, S, Z_S, \delta \rangle,$$

Σ – alfabet skończony

Q – zbiór stanów

$q_0 \in Q$

S – zbiór kolorów sweterków (skończony)

$Z_S \in S$ – sweterek dna stosu

δ – relacja przejścia

gdzie $\delta \subseteq (Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times S) \times (Q \times S^*)$

oraz ma takie własności:

- $\delta(q, a, Z, q', w) \Rightarrow w = Zv$ gdzie v nie zawiera Z.

- $\delta(q, a, A, q', w) \wedge A \neq Z \Rightarrow w$ nie zawiera Z.

Wtedy $\hat{\delta} \subseteq \Sigma^* \times (Q \times S^*)$ jest najmniejsza relacja spełniająca:

- $\hat{\delta}(\varepsilon, q_0, Z)$
- $\hat{\delta}(w, q, VA) \wedge \delta(q, a, A, q', W)$
  $\Rightarrow \hat{\delta}(wa, q, VW) \quad (a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\})$.

Wtedy $L_A = \{w : \exists q \; \hat{\delta}(w, q, Z)\}$.

<u>Przykład</u> Palindromy parzyste:

$$\delta(q_1, B, A, q_1, AB)$$
$$\delta(q_1, \varepsilon, A, q_2, A)$$
$$\delta(q_2, A, A, q_2, \varepsilon)$$

<u>Przykład</u> Słowa w t. że $|w|_0 = |w|_1$.

Tw. Klasa języków bezkontekstowych jest równa klasie języków wyrażanych przez NPDA.

Uwaga (bardzo ważna) Klasy rozstrzygnane przez maszyny deterministyczne są zamknięte na dopełnienia.

Pytanie Czy w sformułowaniu tw. nie można zmienić NPDA na PDA:

$\{a^i b^i c^i : i \in \mathbb{N}\}$ nie jest CFL

ale dopełnienie jest.

Def. Zanim dd, wprowadzimy pojęcie postaci normalnej Greibach: CFG G jest w tej postaci gdy dla każdego $\langle A, w \rangle \in \Pi$ $w \in \Sigma N^*$.

Lemat Dla każdego L: CFL istnieje G w postaci normalnej Greibach t. że $L = L_G$

Dowód tw. "$\Rightarrow$" Weźmy CFL L oraz CFG G w postaci normalnej Greibach t. że $L = L_G$.

Zbudujemy NPDA $\langle \Sigma, Q, q_0, S, Z, \delta \rangle$ t. że $L = L_A$.

- Jeśli w Π jest produkcja $A \to a \underset{N^*}{w}$, to $\delta(q, a, A, q, w^R)$,
- $\delta(q_0, \varepsilon, Z, q, ZS)$,

gdzie $Q = \{q_0, q\}$, $S = N$

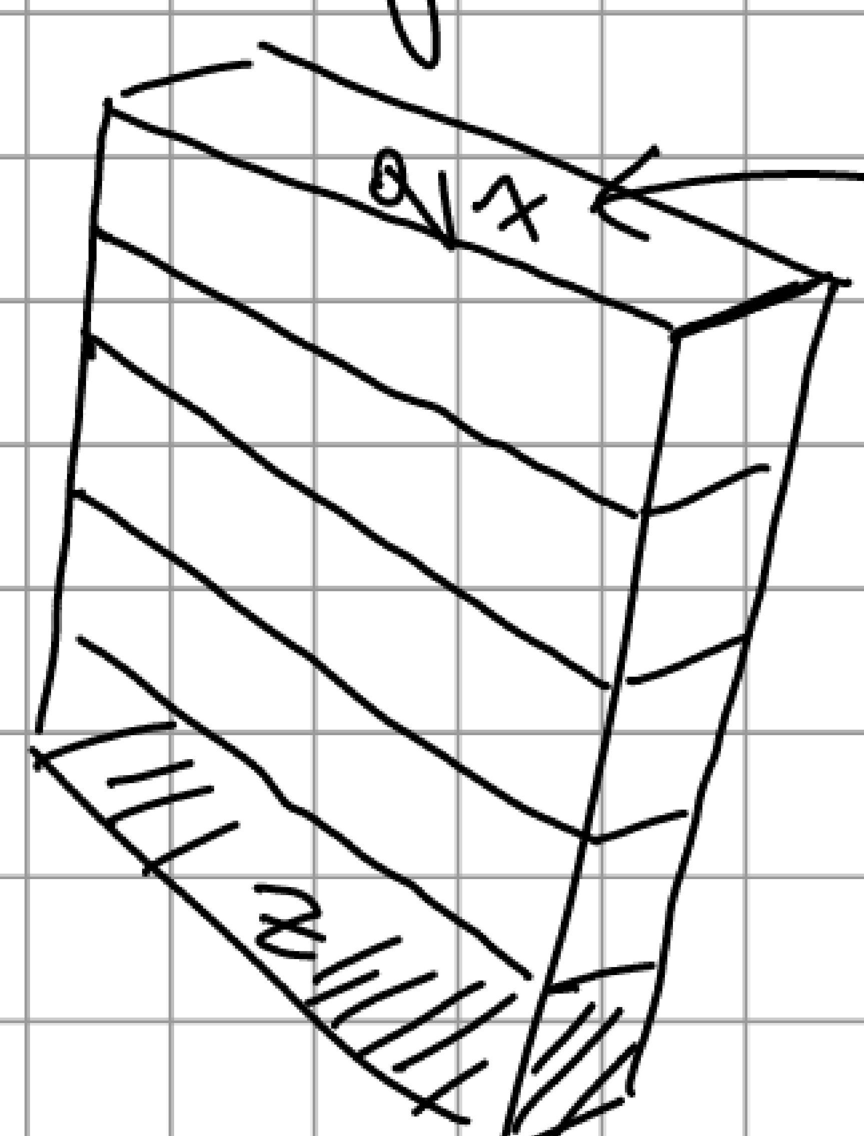
28.03.2022

Kontynuacja dowodu NPDA → CFG

NPDA → NPDA z JEDNYM STANEM → CFG

tą część już potrafimy, analogicznie do poprzedniej części dowodu.

Teraz stos to kolorowe klocki, na wierzchu których napisany jest jakiś stan



"wyobraźmy sobie, że oglądając ten klocek jesteś w stanie q_7"

Problem pojawia się przy ściąganiu klocków. Ten napisany stan może być już nieadekwatny.

stary automat

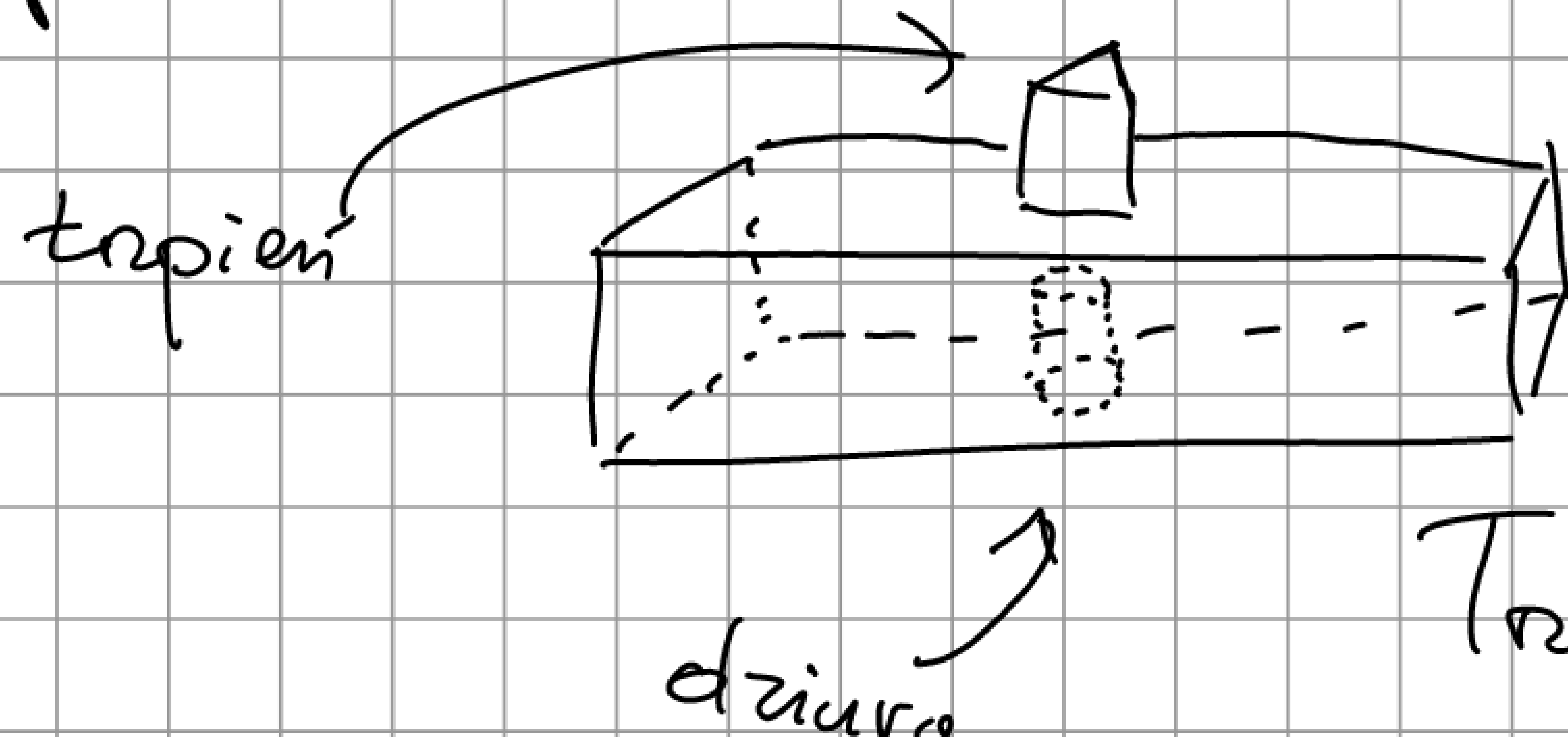
Np.: $\langle q_7, \text{czerwony}, a, q_3, \text{ziel-nieb-ziel-czerw} \rangle$

nowy automat

$\langle -, \langle q_7, \text{czerw} \rangle, a, \langle q_3, \text{ziel} \rangle, \langle ?, \text{nieb} \rangle, \langle ?, \text{ziel} \rangle, \langle ?, \text{czerw} \rangle \rangle$

co tutaj?
no nie wiadomo

Naprawa: teraz klocki będą takie:



Trzpieni jest tyle co stanów.

Nasze stany: $\langle$trzpień, dziura, kolor$\rangle$

Instrukcje starego automatu:

$\langle q, K, a; q', A_1 A_2 \ldots \underset{\uparrow \text{wierzch}}{A_l} \rangle, \quad l \geq 1$

zastępujemy zbiorem wszystkich instrukcji postaci

(pomijamy stan: jest tylko jeden)

$$\langle [d_0, k, q], a;\ [d_0, A_1, d_1]\,[d_1, A_2, d_2] \ldots [d_{L-1}, A_L, q'] \rangle$$

dziurka

kolor

topień

(kwantyfikujemy po $d_0, d_1, \ldots, d_{L-1}$)

Instrukcje starego automatu:

$\langle q, k, a;\ q', \varepsilon \rangle$

$\hookrightarrow \langle [q', k, q], a;\ \varepsilon \rangle$

<u>Poprawność</u> Jasne jest, że każdy przebieg starego automatu można zasymulować nowym. W drugą stronę: nie wprost w miarę łatwo.

Kilka szczegółów o których nie chcemy rozmawiać: co z dnem stosu? Co z akceptowaniem?

DRUGA CZĘŚĆ KURSU

Wcześniej: Język $\subseteq \Sigma^*$

Teraz: Problem $\subseteq \mathbb{N}$

Będziemy pisać programy, które wczytują jedną liczbę naturalną, a jeśli zwrócą wynik, to on też będzie liczbą naturalną.

Def. $A \subseteq \mathbb{N}$ nazywamy **rekurencyjnym** (obliczalnym, rozstrzygalnym) jeśli istnieje program φ t.że dla każdego $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} \varphi(n) = 0 \iff n \notin A \\ \varphi(n) = 1 \iff n \in A \end{cases}.$$

Obserwacja: Każdy zbiór skończony jest rekurencyjny. Klasa zbiorów rekurencyjnych jest zamknięta na sumę, przecięcie i dopełnienie.

Obserwacja Istnieją nierekurencyjne podzbiory $\mathbb{N}$.

Def. Podzbiór $A \subseteq \mathbb{N}$ jest **rekurencyjnie przeliczalny** (r.e.: recursively enumerable) gdy istnieje program φ t.że dla każdego $n \in \mathbb{N}$:

(i) $\varphi(n) = 1 \iff n \in A$ (równoważne definicje)

(ii) $\varphi(n) \in \mathbb{N} \iff n \in A \;\wedge$

$\varphi(n) = \perp \iff n \notin A$

φ się zapętla na n.

Obserwacja Klasa r.e. jest zamknięta na przecięcie i sumę.

Obserwacja Jeśli A jest r.e. i $\mathbb{N} \setminus A$ jest r.e., to A i $\mathbb{N} \setminus A$ są rekurencyjne.

Numerujemy wszystkie programy EFEKTYWNIE, tzn. mamy inny program, który może wczytać program i zwrócić jego numer oraz dla numera zwraca program.

	1	2	3	4	5	...
φ_1	$\perp$	$\perp$	$\perp$			
φ_2	4	2137	28			
φ_3	1	$\perp$	$\perp$			
φ_4	0	7	$\perp$			
$\vdots$						

$K = \{ n : \varphi_n(n) \in \mathbb{N} \}$ / zbiór tych miejsc na przekątnej gdzie jest liczba, czyli te programy które się zatrzymują dla swojego numeru

Obserwacja K jest r.e.

Umiemy policzyć φ_n i uruchamiamy go na n.

Tw. (Turinga o nierozstrzygalności problemu stopu)
K jest nierozstrzygalny.

D-d. Dowód nie wprost. Załóżmy że K jest rozstrzygany przez pewien program ψ.

Niech φ będzie programem, który:
- wczytuje n,
- jeśli $\psi(n) = 1$, to się zapętl,
- w p.p. zwróć 1.

Wtedy φ ma pewien numer n.
- Jeśli $\psi(n) = 1$, to znaczy, że φ nie zapętla się na n, ale z definicji φ powinien się zapętlić na n.
- Jeśli $\psi(n) = 0$, to znaczy, że φ nie powinien się zatrzymać, ale z jego definicji φ się zatrzyma na n.

$$n \in K \iff \varphi_n(n) \in \mathbb{N} \iff \psi(n) = 0 \iff n \notin K$$

$\lightning$

4.04.2022

Def. Funkcja rekurencyjna to relacja wejścia-wyjścia dla programu w MUJP.

Obserwacja Funkcje rekurencyjne to częściowe funkcje $\varphi : \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$. Ich ważna podklasa: funkcje rekurencyjne całkowite.

Uwaga Zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$ jest r.e. $\iff$ istnieje f rek. t. że $A = dom(f)$

Def. Niech $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Wtedy $A \leq_{rek} B$ (czytaj "A jest nie trudniejszy od B ze względu na redukcje całkowite rekurencyjne") gdy istnieje całkowita funkcja rek. f (zwana redukcją) t. że $\forall n \in \mathbb{N} \ (n \in A \iff f(n) \in B)$

Obserwacje (1) $A \leq_{rek} B$ i $B \leq_{rek} C$, to $A \leq_{rek} C$

(2) $A \leq_{rek} B$ i B jest rekurencyjny, to A też.

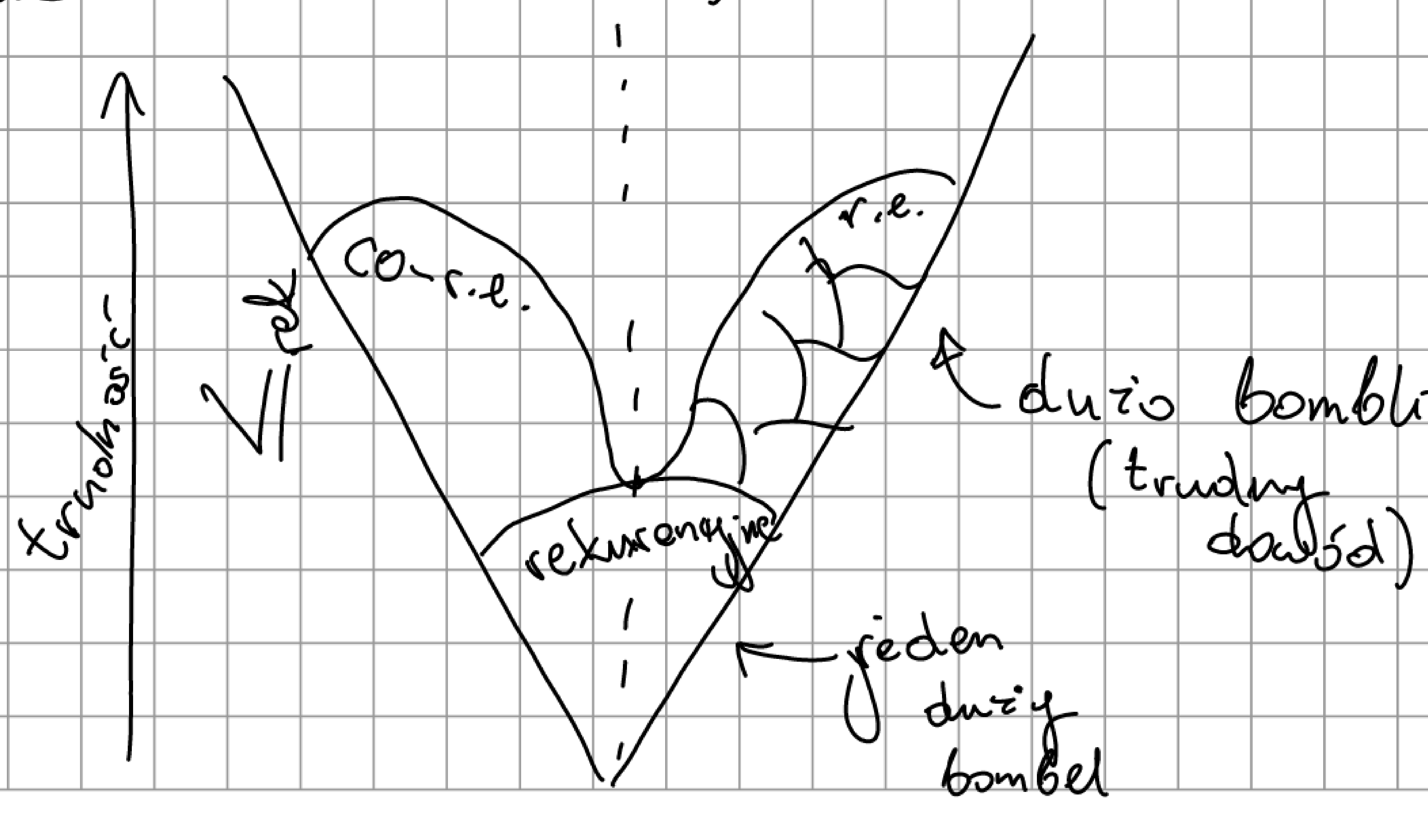
(3) $A \leq_{rek} B$ i B jest r.e., to A też jest r.e.

(4) Jeżeli A, B rekurencyjne i nietrywialne, $(\notin \{\emptyset, \mathbb{N}\})$, to $A \leq_{rek} B$ i $B \leq_{rek} A$

D-d. (4) Weźmy $b \in B$, $b' \in \mathbb{N} \setminus B$. Niech f_A rozstrzyga A. Zbudujemy redukcję f.

$f(n) =$ "wczytaj n, uruchom $f_A(n)$, jeśli wyszło 0, to zwróć b', jeśli wyszło 1, to b"

$\leq_{rek}$ dzieli $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ na "bomble"



Tw. K (z popr. wykładu) jest zupełny w klasie r.e. ze względu na całkowite redukcje rekurencyjne, tj. dla każdego $B \in$ r.e. zachodzi $B \leq_{rek} K$

Przykład $A_7 = \{n : \varphi_n(7) = 77\}$ jest r.e. Pokażemy, że $K \leq_{rek} A_7$. Budowa redukcji:

- przynoszą nam n,
- piszemy program: | wczytaj m
  | uruchom $\varphi_n(n)$
  | zwróć 77
- zwracamy numer tego programu

To jest funkcja całkowita i do tego dziwna. Gdy $n \in K$, to $\varphi_{f(n)}$ się kończy i zwraca 77 dla dowolnego wejścia, więc $f(n) \in A$. Gdy $n \notin K$, to $\varphi_{f(n)}$ się nie skończy dla każdego wejściu, więc $f(n) \notin A_7$.

<u>Def.</u> $A \subseteq \mathbb{N}$ jest **ekstensjonalny** jeśli

$\forall i \in A, j \notin A \ \exists n \ \varphi_i(n) \neq \varphi_j(n)$

może być pinezka

<u>Przykład</u> $A = \{n : \varphi_n \text{ jest całkowity}\}$

<u>Alt. definicja</u> A ekstensjonalny gdy $\forall i, j \in \mathbb{N}$

jeśli $\varphi_i = \varphi_j$ (jako funkcje), to $i \in A \Leftrightarrow j \in A$

<u>Tw. (Rice'a)</u> Żaden nietrywialny zbiór ekstensjonalny nie jest rekurencyjny.

<u>D-d.</u> Weźmy $A \subseteq \mathbb{N}$: nietrywialny i ekstensjonalny. BSO przyjmijmy, że żaden "numer funkcji pustej" (same pinezki) nie należy do A (zawsze możemy wziąć A^c).

Pokażemy, że $K \leq_{rek} A$. Niech $k \in A$.

Konstruujemy redukcję f:

- dają nam n
- piszemy program:

wczytaj m oblicz $\varphi_n(n)$ oblicz $\varphi_k(m)$ i zwróć wynik

- zwróć jako $f(n)$ numer tego programu.

Σ - alfabet skończony, $\Pi \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$,
skończony

$w \to_\Pi v$: relacja na Σ^*

$\Updownarrow$ def $w = w_1 l w_2$, $v = w_1 r w_2$, $\langle l, r\rangle \in \Pi$,

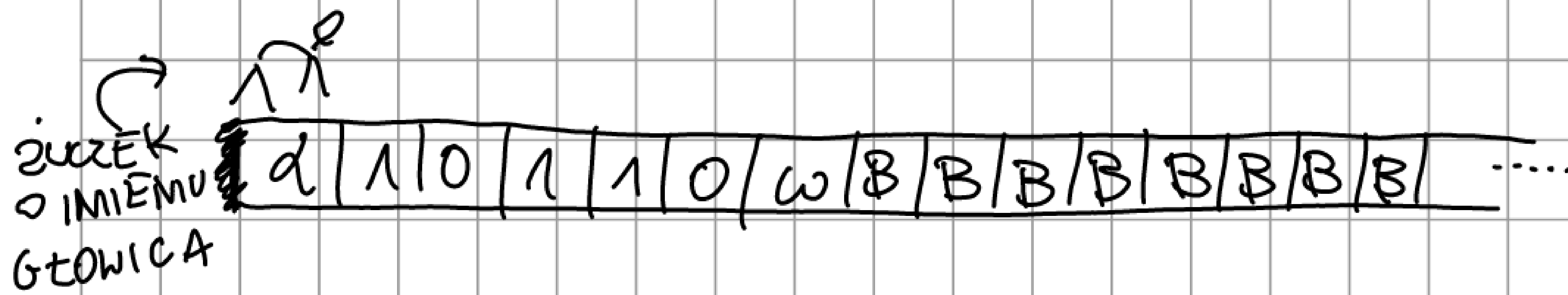
$w \xrightarrow{*}_\Pi v$: przechodnie domknięcie $\to_\Pi$

$w \xleftrightarrow{*}_\Pi v$: równoważnościowe domknięcie $\to_\Pi$.

Tw. (o nierozstrzygalności problemu słów Thuego)

Problemy $\text{SemiThue} = \{\langle w, v, \Pi\rangle : w \xrightarrow[\Pi]{*} v\}$,
$\text{Thue} = \{\langle w, v, \Pi\rangle : w \xleftrightarrow{*}_\Pi v\}$ są nierozstrzygalne.

11.04.2022 MASZYNA TURINGA



$A = \{\alpha, \omega, 0, 1, B\}$

blank, początkowo tym wypełniona taśma

Q: skończony zbiór stanów, $q_0 \in Q$: stan początkowy,
$q_F \in Q$: stan końcowy

$$\delta: Q \times A \longrightarrow Q \times A \times \{L, R\}$$

aktualny stan — literka pod głowicą — nowy stan — na co zmienić literę pod głowicą — przesunąć głowicę w lewo lub prawo.

Właściwości:

- α jest znakiem końca taśmy, nie można go napisać, zmazać, ani pójść na lewo stojąc na α
- Widząc B należy coś napisać
- δ jest f. częściową

- wynikiem jest ciąg znaków na prawo od ω.
- nie ma ruchów z q_F.

Teraz maszyna Turinga to nasz MUJP, dalej mamy K "z tyłu głowy".

<u>Teza Churcha</u> Każdy algorytm daje się przedstawić jako maszyna Turinga.

<u>D-d.</u> (tw. o nierozstrzygalności słów SemiThue)

(Dają Π, v, w i pytają czy $w \xrightarrow{*}_{\Pi} v$)

Pokażemy, że $K \leq_{rek}$ SemiThue.

n-ta maszyna turinga

Konstrukcja redukcji: dają nam M_n, n

mamy zwrócić w, v, Π takie, że $n \in K \Leftrightarrow w \xrightarrow[\Pi]{*} v$

Niech $Z = Q \cup A \cup \{$  $\}$,

← pożeracz

$w = \alpha q_0 \underline{\quad n \quad} \omega B$

↑ n zapisane binarnie

Konstrukcja Π:

- dla każdej "instrukcji" z δ, która ma postać $\delta(q, a) = \langle q', a', L \rangle$, gdzie $a \neq B$, dajemy do Π parę $\langle aq, q'a' \rangle$

- dla każdej instrukcji z δ, która ma postać $\delta(q, B) = \langle q', a', L \rangle$, do Π dajemy $\langle Bq, q'a'B \rangle$ (powiększenie taśmy o blanka)

- dla każdej instrukcji z δ, która ma postać $\delta(q, a) = \langle q', a', R \rangle$, $a \neq B$ do Π dajemy $\langle aqb, a'bq \rangle$ dla każdego $b \in \mathcal{A}$.

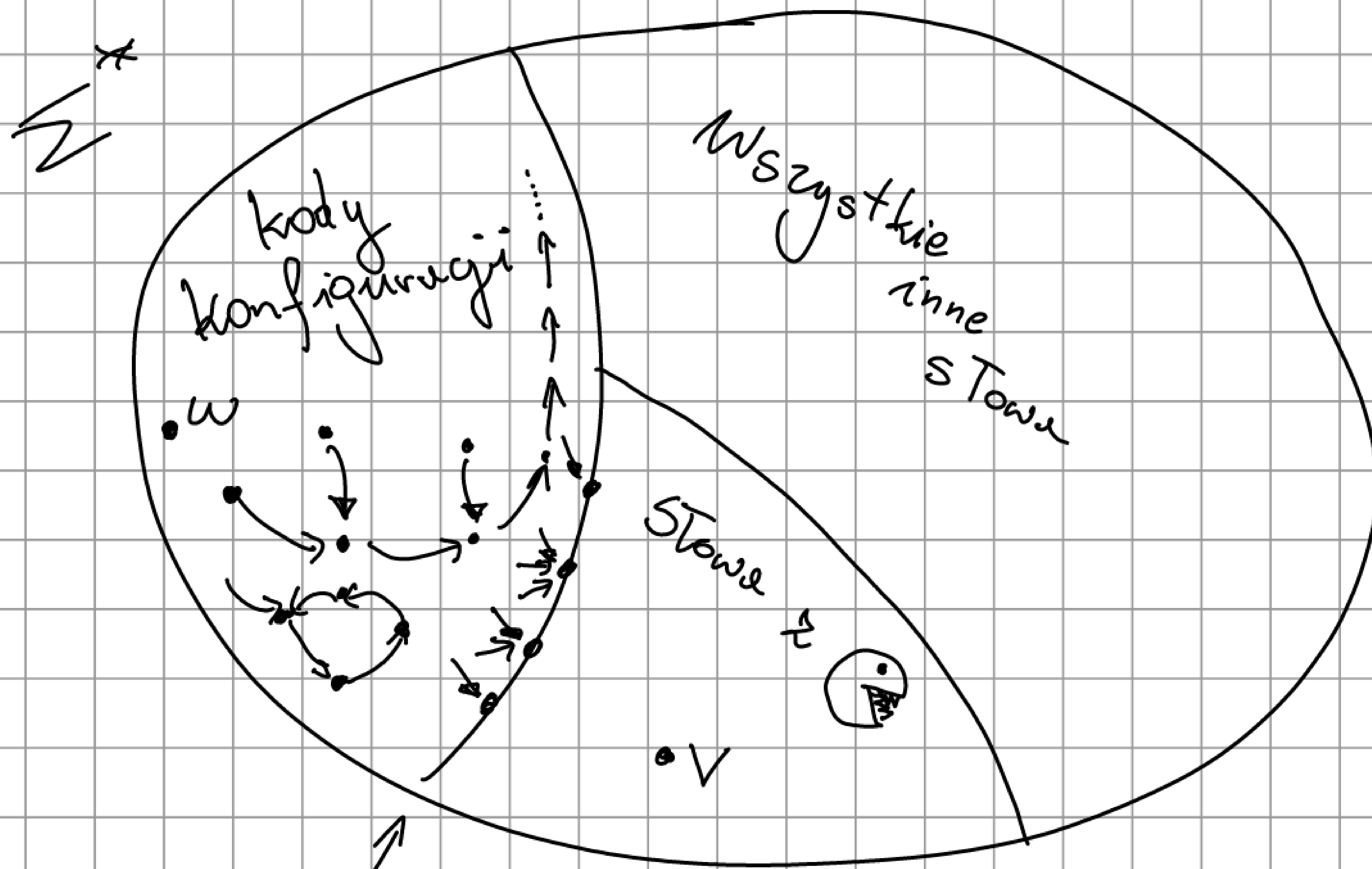
- dla każdej instrukcji z δ, która ma postać $\delta(q, B) = \langle q', a, R \rangle$, do Π dajemy $\langle Bq, aBq' \rangle$

- dla każdego $a \in \mathcal{A}$ w Π są takie pary: $\langle a$, $\rangle$, $\langle$a, $\rangle$

• dodajemy do Π parę $\langle q_F,$  $\rangle$

Teraz $v =$  .

kod: konfiguracje $M_n \longrightarrow$ słowo nad Σ



tu są słowa z q_F, z nich wszystko wpada w pożeracza.

$\blacksquare$

D-d. (tw. o nierozstrzygalności problemu Thue)

$\{\langle w, v, \Pi\rangle : w \overset{*}{\longleftrightarrow}_{\Pi} v\}$

W zasadzie to samo, co poprzednio.

Trzeba tylko pokazać, że gdy $n \notin K$, to $w \overset{*}{\not\longleftrightarrow}_{\Pi} v$

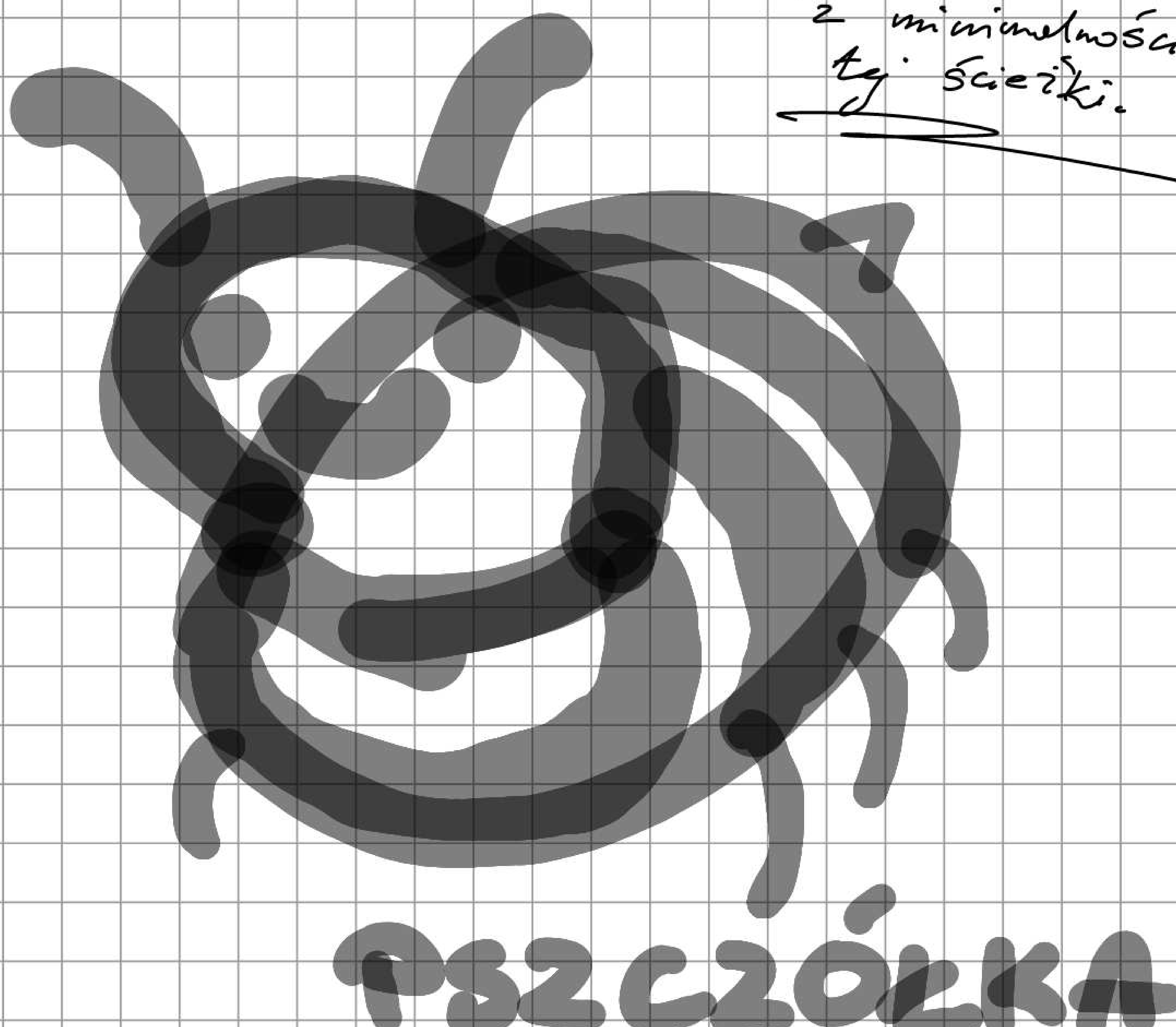
Widać z tego obrazka wyżej!

W°

$\dots \bullet \longleftarrow \bullet \longrightarrow \dots \longrightarrow \underset{q_F}{\bullet} \longrightarrow \bullet \to \dots$

gdyby tak było, to to musi być ten sam wierzchołek

⇝ sprzeczność z minimalnością tej ścieżki.



Dwukierunkowe automaty skończone

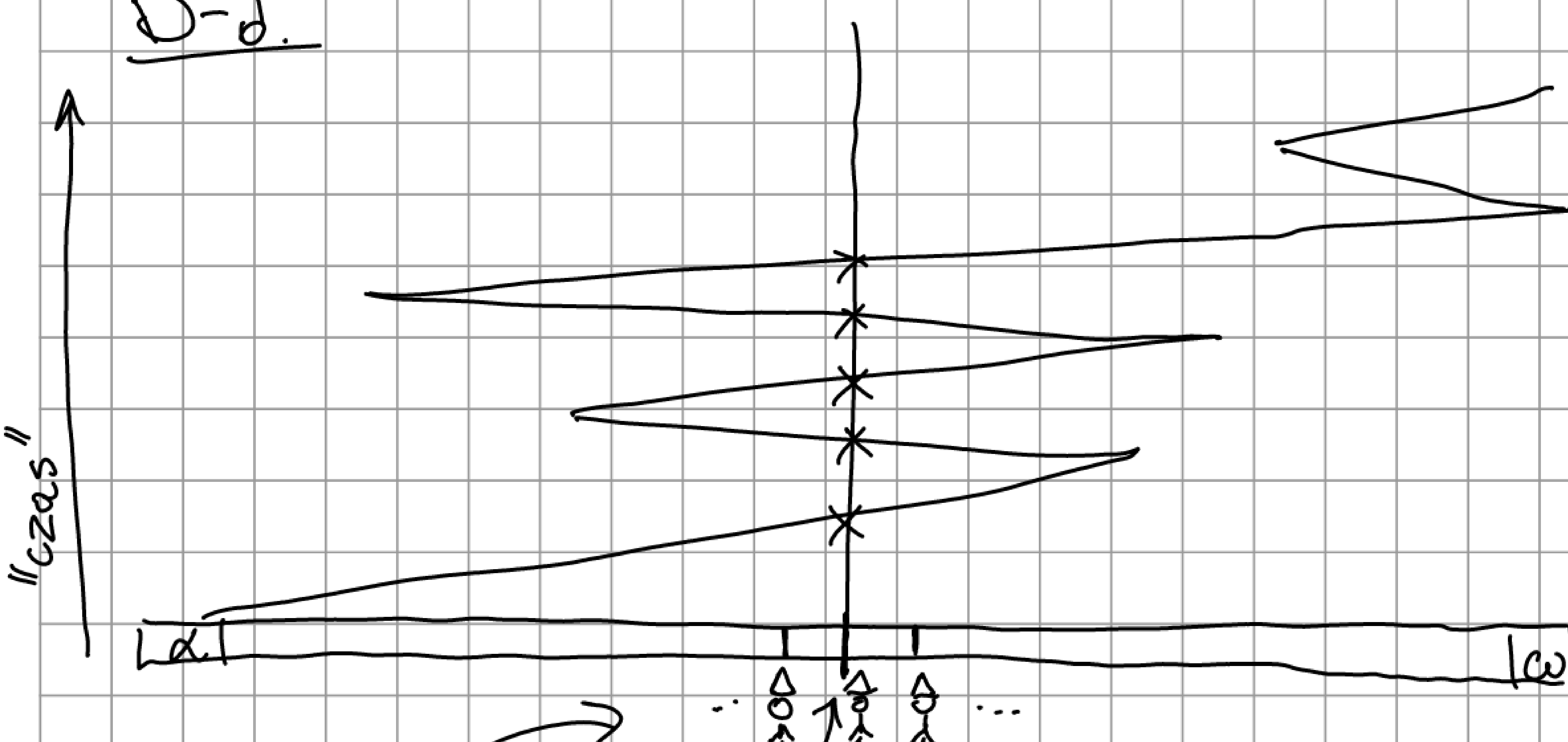
Q: zbiór stanów, $q_0, q_F \in Q$

$\Sigma' = \Sigma \cup \{\alpha, \omega\}$

$\delta : Q \times \Sigma' \longrightarrow Q \times \{L, R\}$, musi kończyć w ω

Tw. To model wyraża tylko języki regularne
(Chcemy z pszczółki zrobić żuczka)
(NFA)

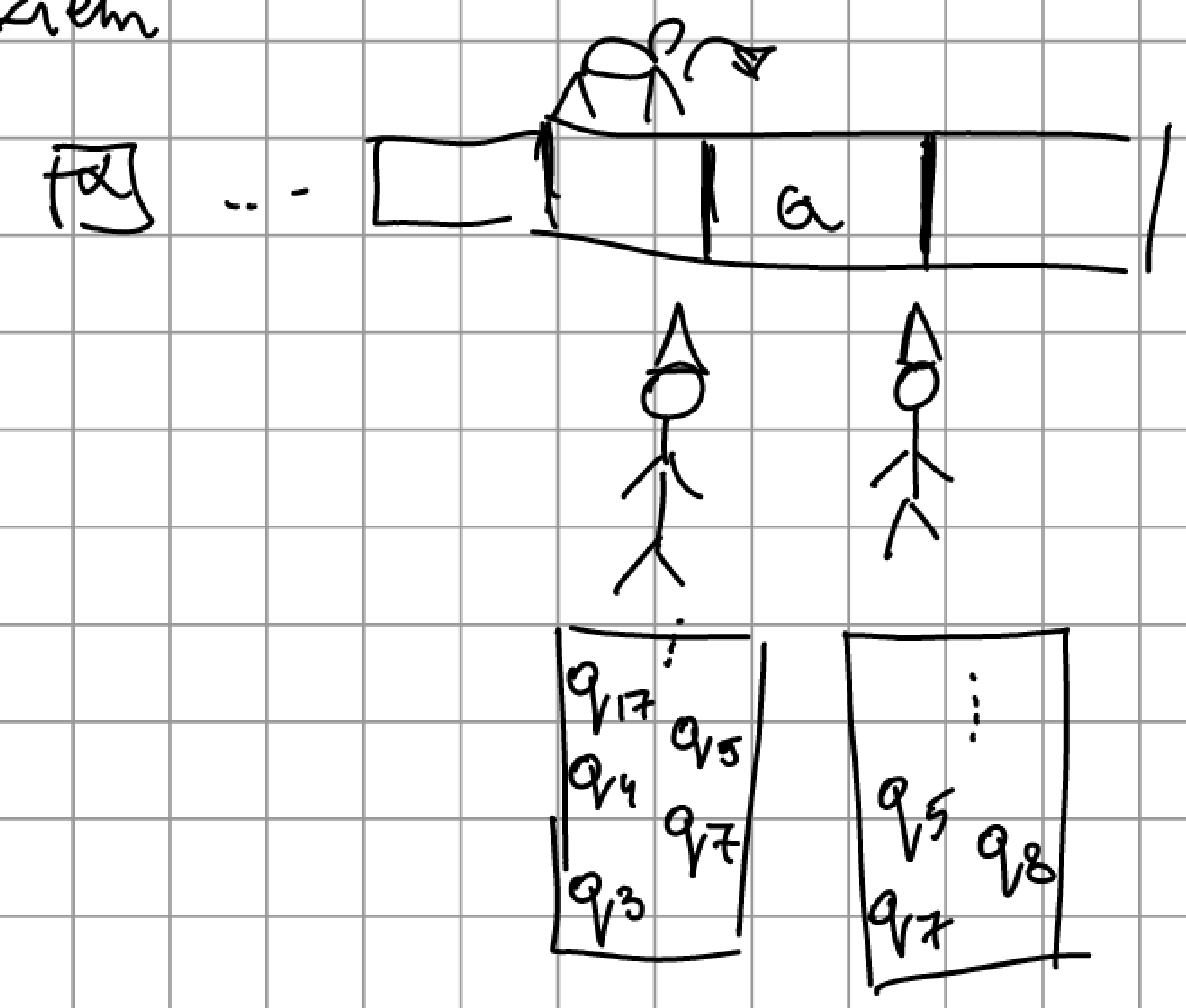
D-d.



punktów przecięcia jest max. $2|Q|$

w przejściach między komórkami jest krasnoludek

Każdy krasnoludek sporządza listę stanów, z których pszczółka przelatywała nad krasnoludkiem



sprawdza, czy te listy są kompatybilne

<u>Fakt</u> Pszczółka nie istnieje: są tylko krasnoludki opowiadające bajki

<u>Obserwacja</u> Niedeterministyczna pszczółka jest taka sama.