

28.08.2022

PROBLEM DECYZYJNY

- Σ - skończony alfabet
- Σ^* - zbiór skończonych słów nad alfabetem Σ
- $\Sigma^* \supseteq L$ - język / problem
- Pytamy o "zasoby obliczeniowe" potrzebne do rozstrzygnięcia tych problemów.

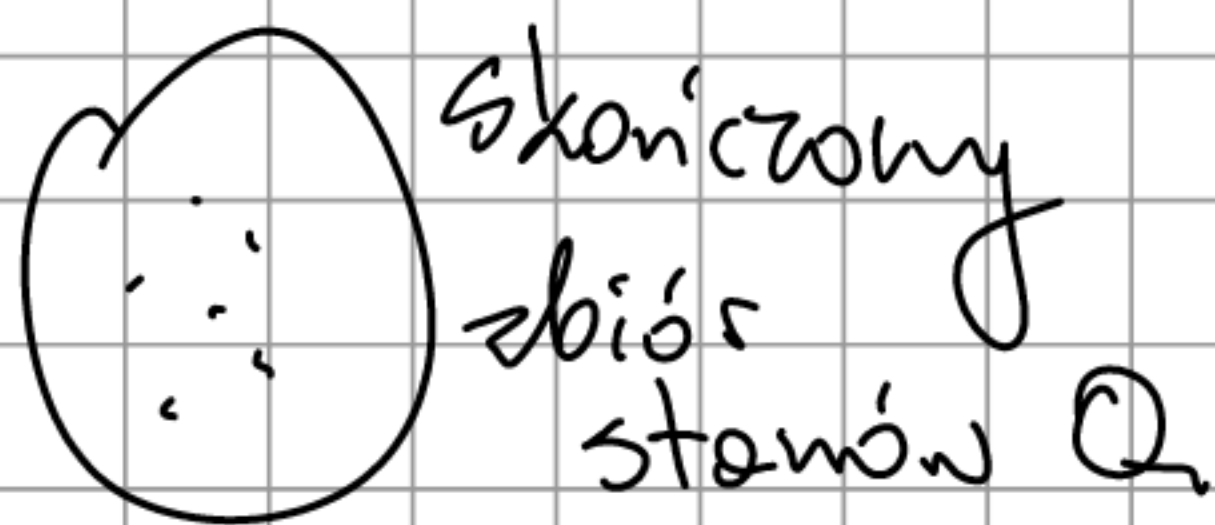
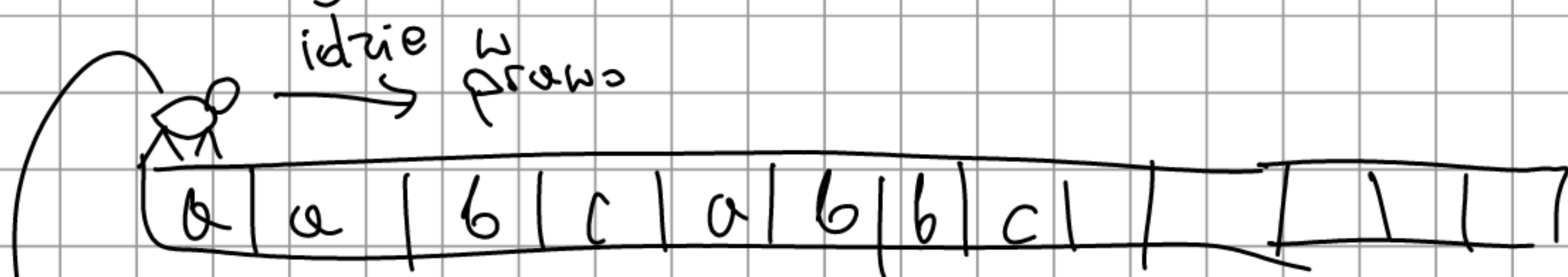


- klasyfikujemy problemy ze względu na te zasoby

Bla bla...

CZĘŚĆ I

Automaty skończone



skończony
zbiór
stanów Q

Funkcja przejścia
 $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$

• Stan początkowy
 $q_0 \in Q$

• zbiór stanów akceptujących $F \subseteq Q$

Ćw. Skonstruuj δ, Q dla $\Sigma = \{0,1\}$,
 $L = \{w \in \{0,1\}^* : |w|_1 \text{ jest parzyste}\}$

Ale dla $L = \{w \in \{0,1\}^* : |w|_1 = |w|_0\}$
się nie da!

D-d. (A.a.) Niech Zenon będzie zuchwiałym

rozstrzygnięciem L . Zet. ie $|Q| = k$.

$$w_0 = \epsilon$$

$$w_1 = 0$$

$$\vdots$$

$$w_i = 0^i$$

$$\vdots$$

$$w_k = 0^k$$

$$s_0 \in Q$$

$$s_1 \in Q$$

$$s_i \in Q$$

$$s_k \in Q$$

Jest i, j t. że

$$s_i = s_j$$

Spójrzmy na

$$a = w_i \perp^i \rightsquigarrow s \in A$$

$$b = w_j \perp^i \rightsquigarrow s \notin A$$

Deterministyczny automat skończony (DFA)
to krotka $(\Sigma, Q, q_0, \delta, F)$.

oraz $y \neq \epsilon$, $|xy| \leq n$ takie że dla
każdego $k \in \mathbb{N}$ $xy^k z \in L$.

Przykład Weźmy $L = \{ w \in \{0,1\}^* : |w|_0 = |w|_1 \}$.

Zał. że L regularny. Weźmy n jak w
lemacie. Niech $w = 0^n 1^n \in L$. Weźmy x, y, z
jak w lemacie. Ale $|xy| \leq n$.

więc $|y|_1 = 0$. Dla $k=0$: $xz \in L$

(nie ma "1"
w y) ale $|xz|_0 < |xz|_1$ \downarrow

Dowód lematu


Weźmy $L = L_A$ regularny ($A = \langle \Sigma, Q, q_0, \delta, F \rangle$).

Niech $n = |Q| + 1$. Weźmy $w \in L$ t.ż. $|w| \geq n$.

Niech $w = a_1 a_2 \dots a_l$, niech $s_i = \hat{\delta}(q_0, a_1 \dots a_i)$.

Wtedy $s_i = s_j$ dla pewnych $i < j \leq n$.

Niech $x = a_1 \dots a_i$, $y = a_{i+1} \dots a_j$,

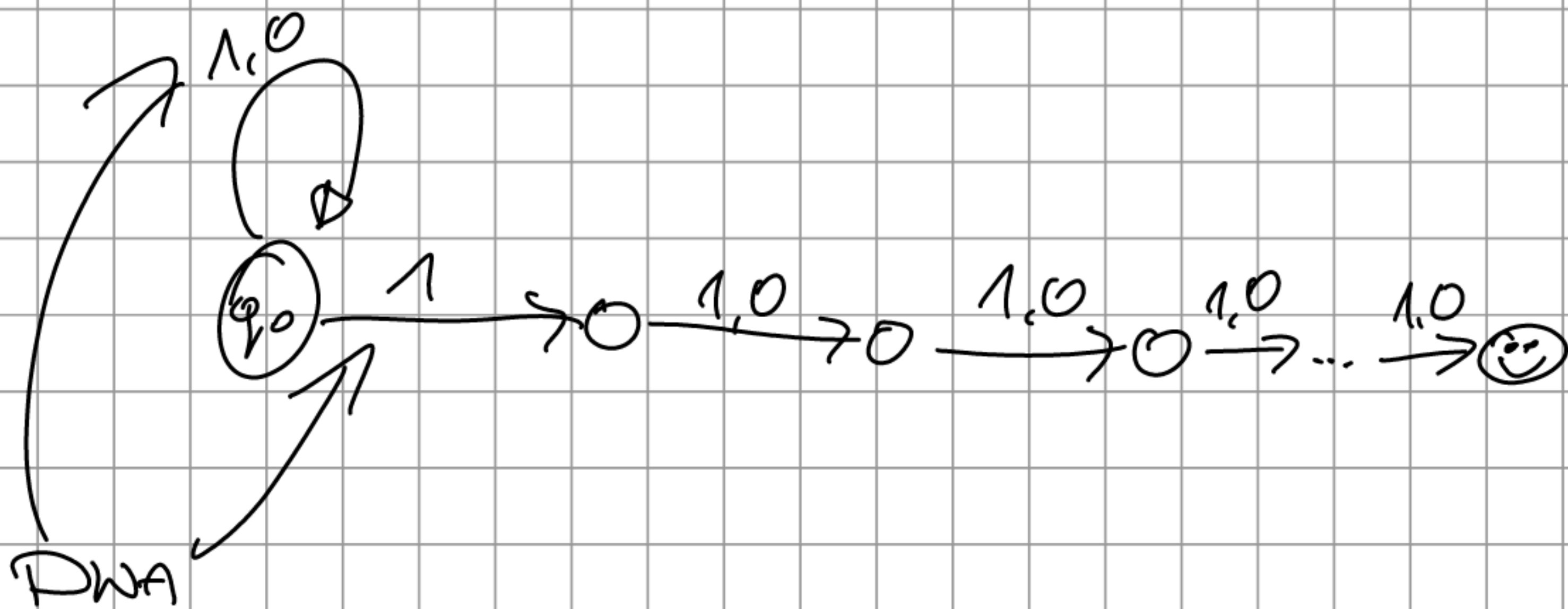
$z = a_{j+1} \dots a_l$. Wtedy dla $k \in \mathbb{N} \dots$ 

1.03.2022

NIEDETERMINISTYCZNE AUTOMATY SKOŃCZONE (NFA)

Projekt

$$L = \{ w \mid w \in \{0,1\}^* : |w| \geq 9 \}$$



PRZEJŚCIA \rightarrow ZUCZEK PYTA NIEBIOS
z \neq

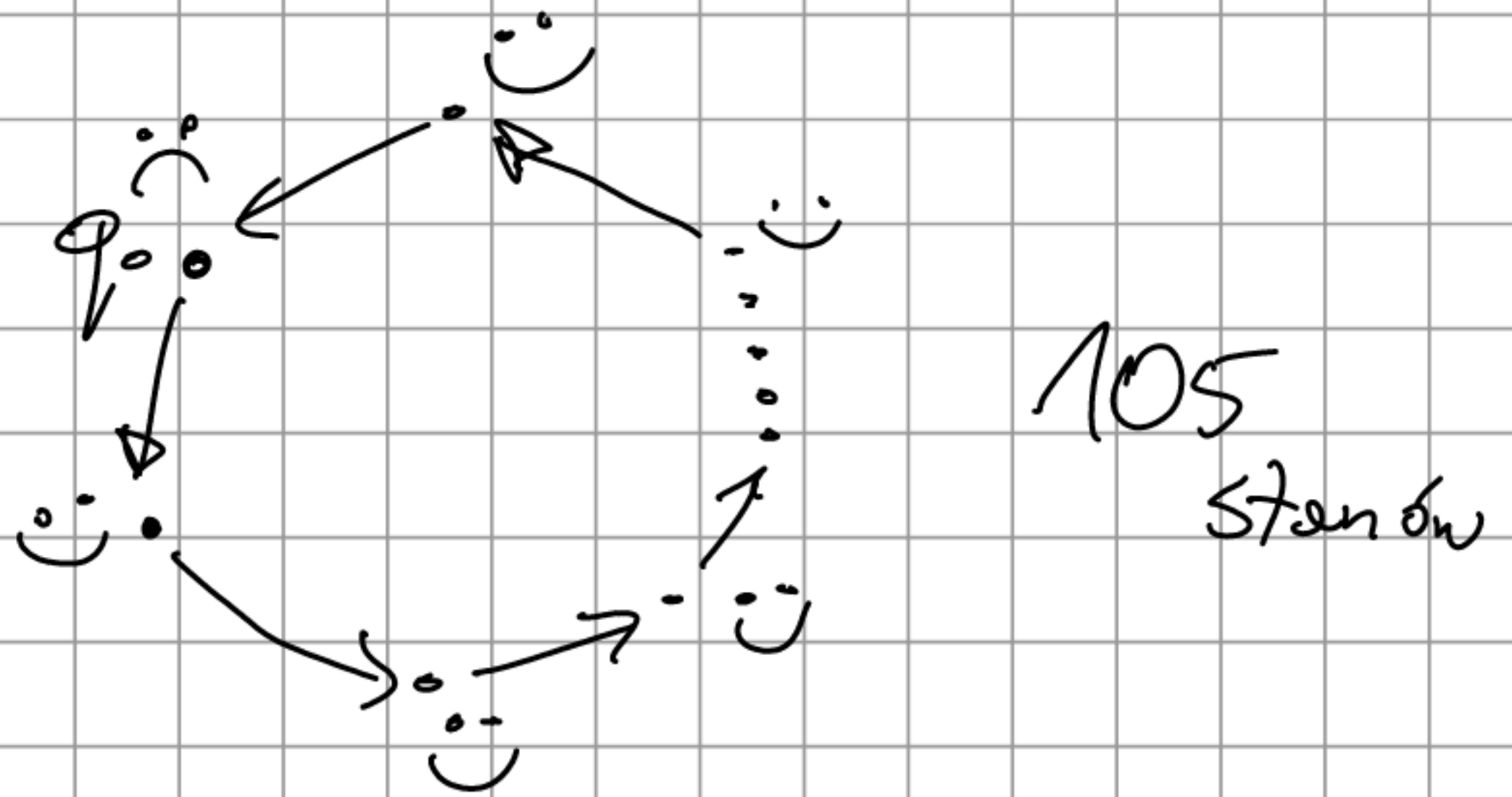
"CO ROBIĆ?
JAK ŻYĆ"

A NIEBIOSA ODPOWIADAJĄ

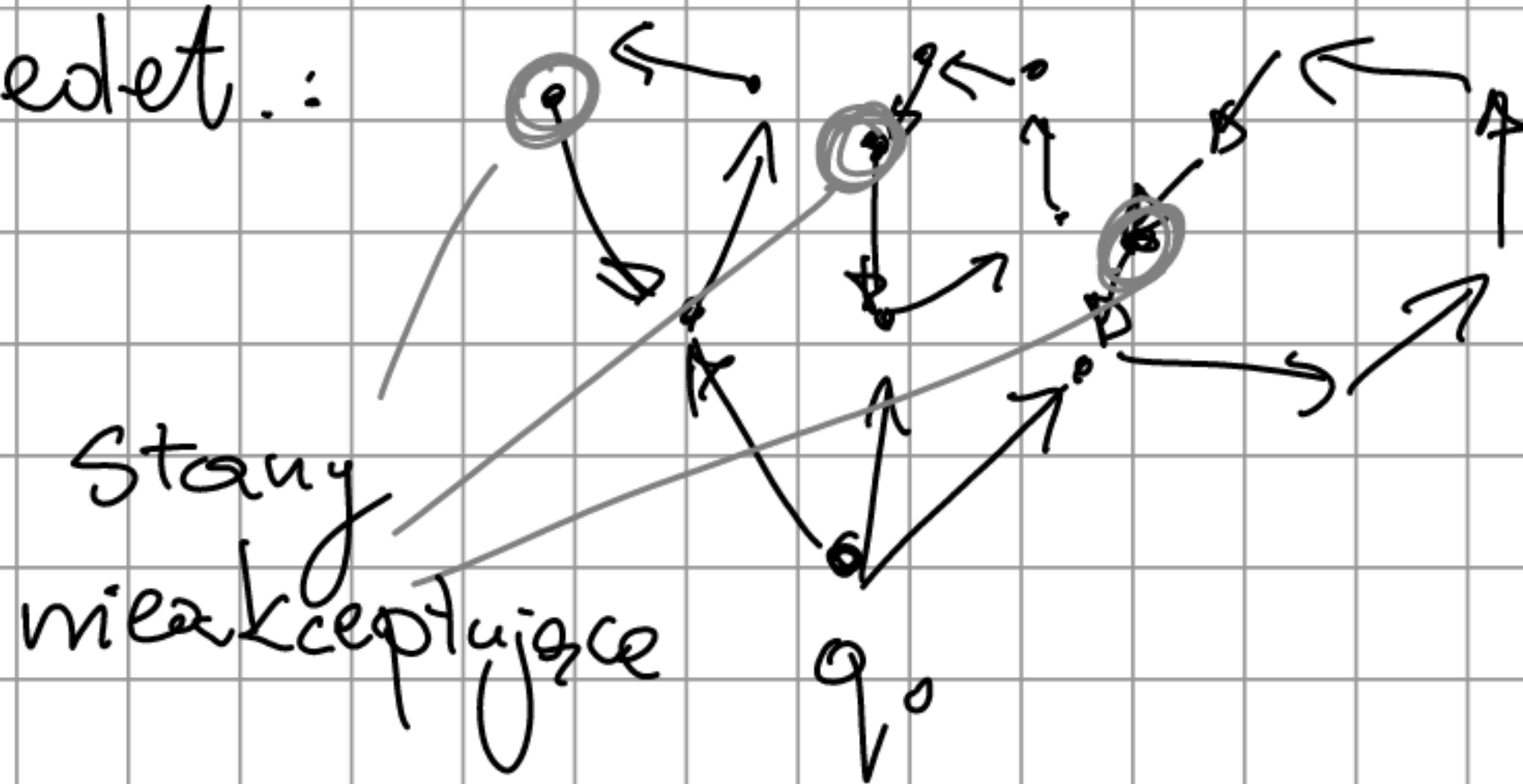
Taki automat daje gwarancję, że
na pewno nie trafimy w stan
akceptujący, jeśli słowo nie jest
z języka (nie ma "false-positive"
są "false-negative")

Przykład 2 $L = \{0^i : 105 \mid i\}$

Det. aut.:



Niedet.:



Znaczenie: na pewno jeśli $105 \mid i$,
to trafimy w stan akcept.

Def. Niedeterministyczny automat skończony

to krotka $\langle \Sigma, Q, q_0, \delta, F \rangle$ jak w

DFA poza δ , gdzie

$$\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q.$$

$\delta(q, a, q')$ oznacza q do q'
 jest struktura z etykietą a .

Teraz $\hat{\delta} \subseteq Q \times \Sigma^* \times Q$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\delta}(q, \varepsilon, q') \Leftrightarrow q = q' \\ \hat{\delta}(q, wa, q') \Leftrightarrow \exists p \in Q \hat{\delta}(q, w, p) \wedge \delta(p, a, q') \end{array} \right.$$

Alternatywna wersja wg JMa.

Dla każdego $w \in \Sigma^*$ definiujemy

$$\delta_w \subseteq Q \times Q:$$

$$\delta_\varepsilon = \text{id}_Q$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{jeśli } a \in \Sigma \text{ to } \delta_a(q, q') \Leftrightarrow \delta(q, a, q') \\ \delta_{wa} = \delta_w \circ \delta_a \end{array} \right\}$$

Wtedy $\hat{\delta}(q, w, q') \Leftrightarrow \delta_w(q, q')$

Def. A : NFA. Wtedy
 $L_A = \{ w \in \Sigma^* : \exists q \in F \cup \hat{\delta}(q_0, w, q) \}$

Tw. Niech A : NFA. Wtedy $\exists A'$: DFA
 t.że $L_A = L_{A'}$.

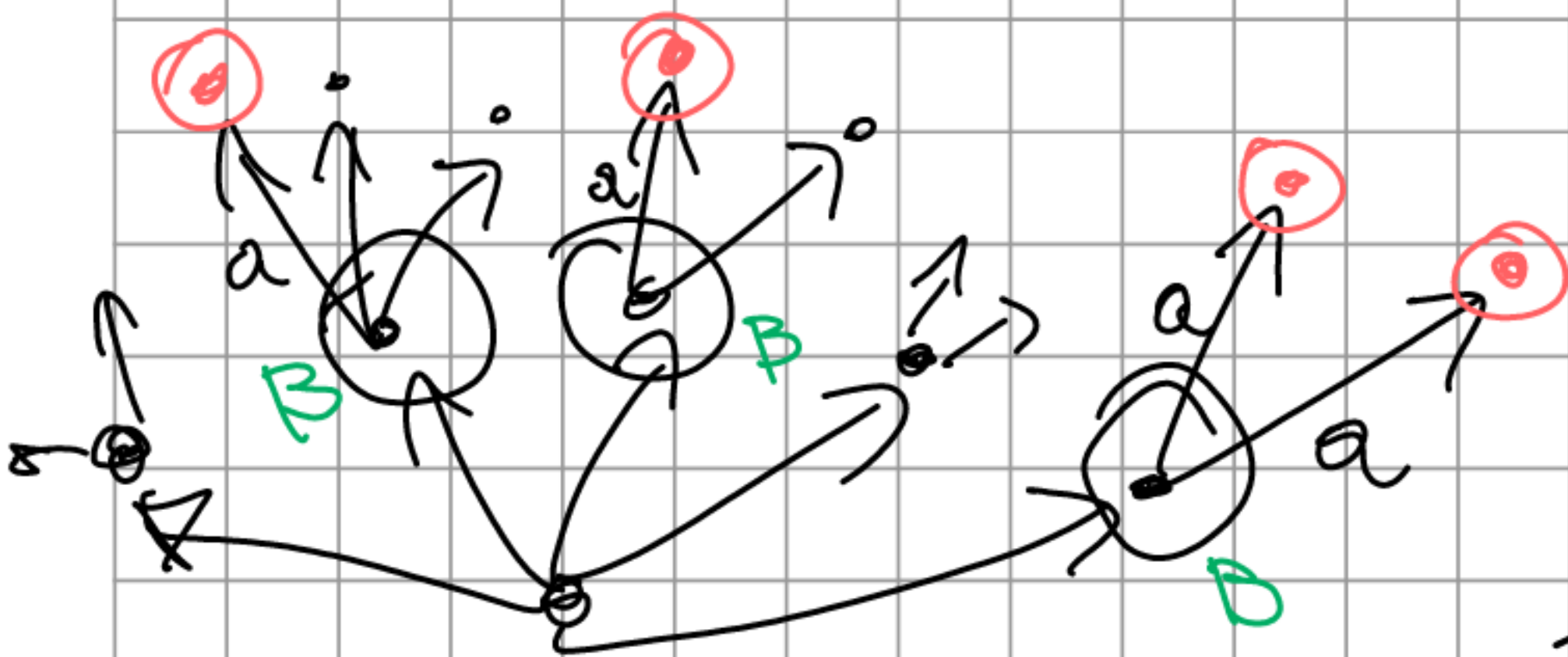
D-d. Weźmy dowolne NFA $A = \langle \Sigma, Q, q_0, \delta, F \rangle$.

Zbudujemy $A' = \langle \Sigma, Q', q'_0, \delta', F' \rangle$.

Niech $Q' = \mathcal{P}(Q)$, $q'_0 = \{ q_0 \}$,

$F' = \{ B \subseteq Q : B \cap F \neq \emptyset \}$,

$\delta'(B, a) = \{ q \in Q : \exists p \in B \delta(p, a, q) \}$.



Te stany, do których można dojść z któregoś stanu $\in B$ po kraw. z etykietą a .

NFA z ϵ -PRZEJŚCIAMI

Takie coś, że możemy czasem sobie

przejsć ze stanu do stanu bez

wczytania znaków. Jeździ też można

zdeteminować.

7.03.2022

WYRAŻENIA REGULARNE (nad Σ)

- \emptyset jest wyrażeniem regularnym i $L_{\emptyset} = \emptyset$
- ε jest wyr. reg. i $L_{\varepsilon} = \{\varepsilon\}$
- jeśli $a \in \Sigma$ to a jest wyr. reg.

oraz $L_a = \{a\}$

- jeśli φ, ψ są wyr. reg. to $\varphi + \psi$

jest wyrażeniem regularnym i $L_{\varphi + \psi} = L_{\varphi} \cup L_{\psi}$

$\varphi\psi$ jest wyrażeniem regularnym i $L_{\varphi\psi} = L_{\varphi}L_{\psi}$.

$$= \{w_1w_2 : w_1 \in L_{\varphi}, w_2 \in L_{\psi}\}.$$

$$\boxed{L_1L_2 = \{w_1w_2 : w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}}$$

$$L \in \Sigma^*, \text{ wtedy } L^0 = L_{\varepsilon}, L^1 = L, L^{i+1} = L^iL$$

$$\boxed{L^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} L^n}$$

- jeśli φ jest wyr. reg. to φ^* też jest oraz $L_{\varphi^*} = (L_{\varphi})^*$

Przykład $\Sigma = \{0,1\}$, $O^*(10^*10^*)^*$

Tw. Niech $L \subseteq \Sigma^*$. Wtedy NWSR:

(1) L jest regularny, tj. istnieje DFA A t.z.e $L = L_A$.

(2) Istnieje wyrażenie regularne φ t.z.e
 $L = L_\varphi$.

(3) Istnieje NFA z ϵ -przejdami A'
t.z.e $L = L_{A'}$.

D-d. (3) \Rightarrow (1) Było. ~~III~~

(2) \Rightarrow (3) Indukcja względem długości

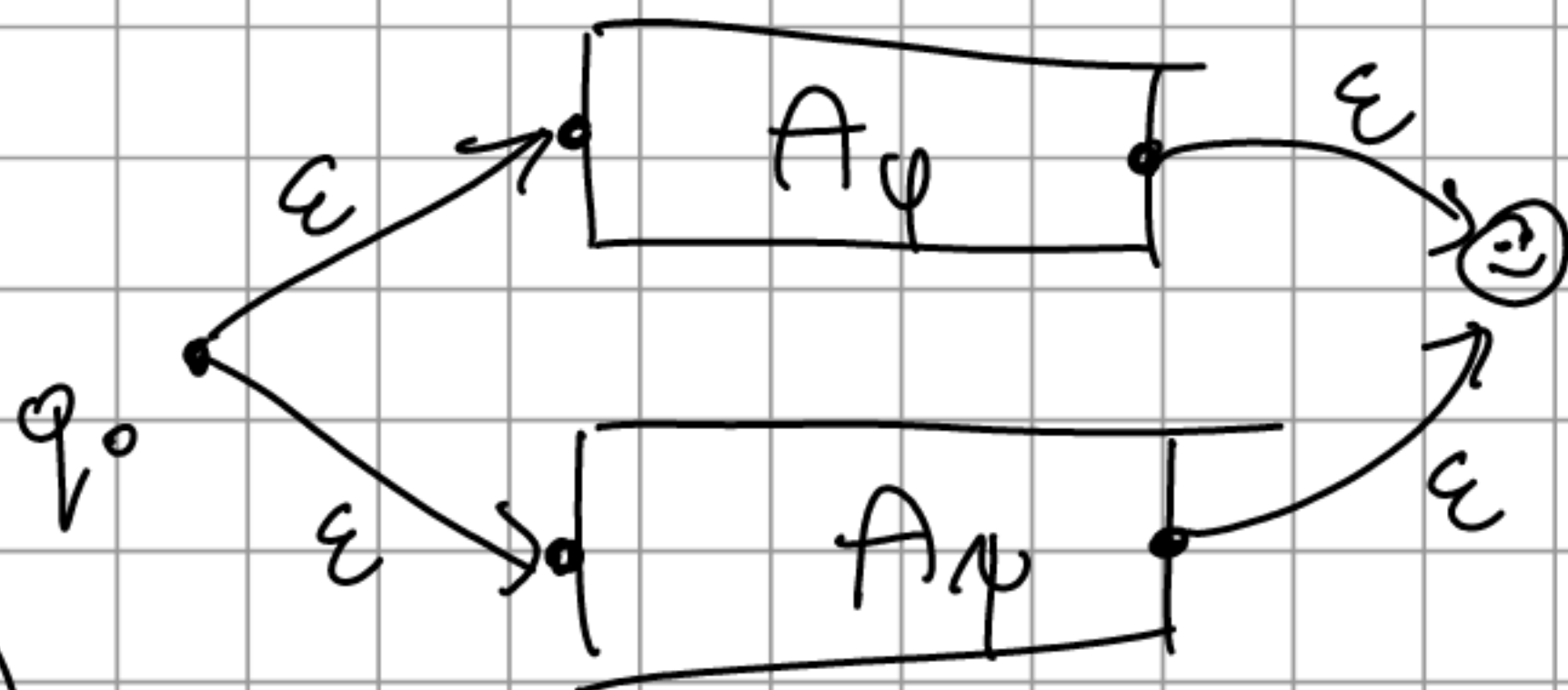
wyrażenia. Każdy NFA który zbudujemy
będzie miał jeden stan wyjściowy niebędący
akceptującym i jeden akceptujący.



- $a \sim q_0 \xrightarrow{a} \text{☺}$

- $\varphi, \psi \rightsquigarrow$

(Automat dla $\varphi + \psi$)

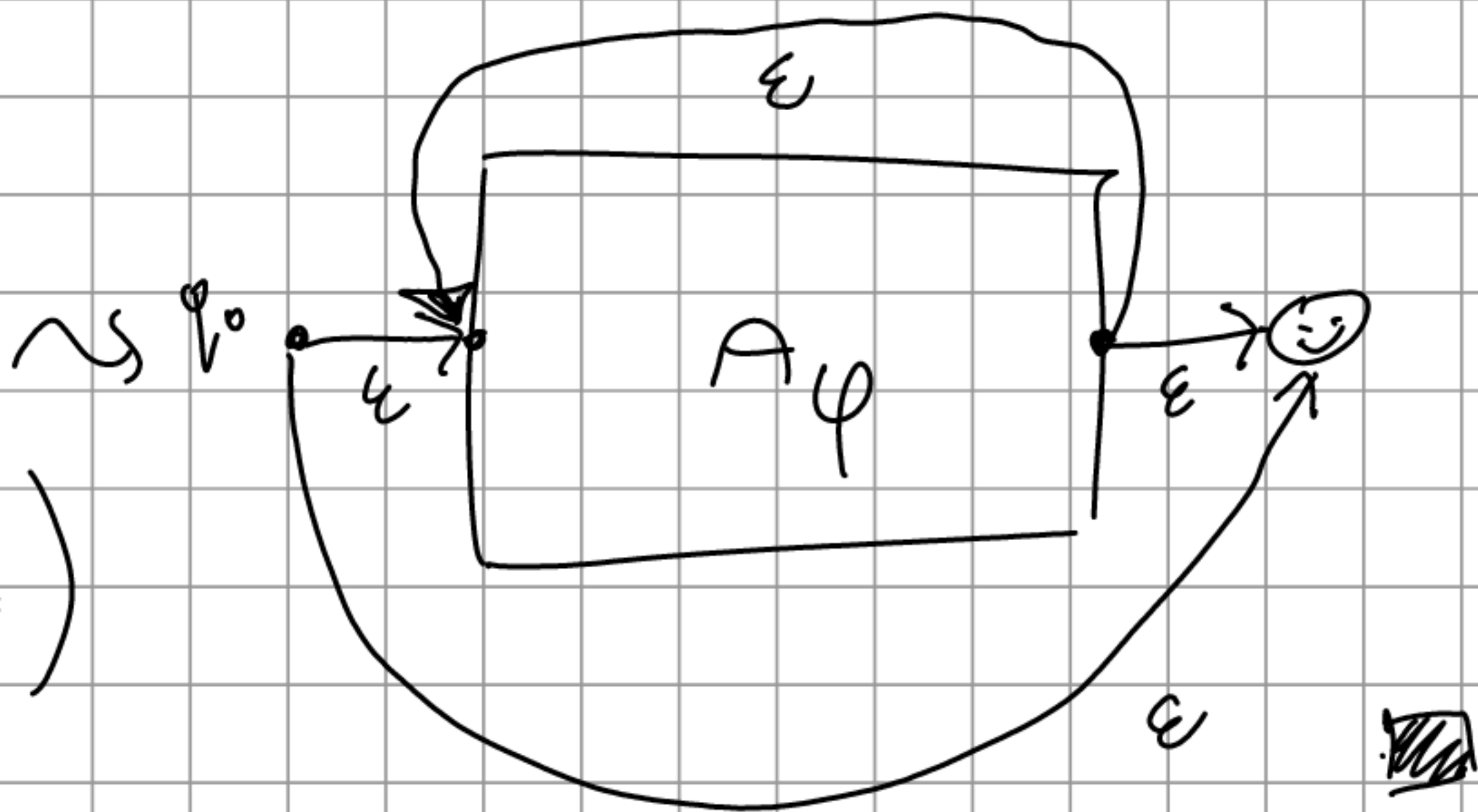


- $\varphi, \psi \rightsquigarrow$

(Automat dla $\varphi\psi$)



- φ
(Automat dla φ^*)



(1) \Rightarrow (2) Mamy DFA $A = \langle \Sigma, Q, q_0, \delta, F \rangle$

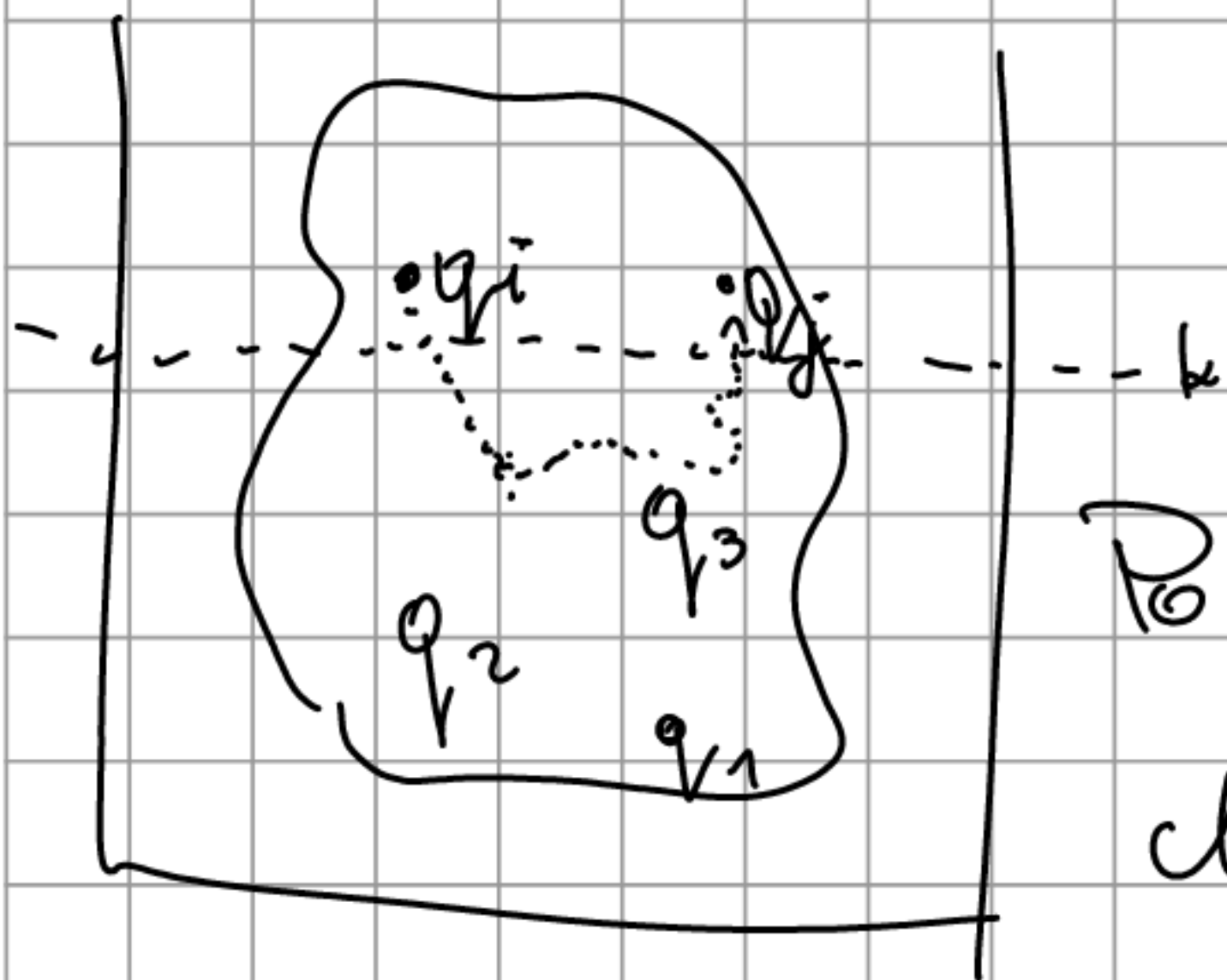
$Q = \{q_1, \dots, q_n\}$ (gdzie $q_0 = q_1$).

Dla $1 \leq i, j \leq n, 0 \leq k \leq n$ napiszemy wyrażenie regularne $\varphi_{i,j}^k$ wyrażające język

$$\forall w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q_i, w) = q_j \wedge$$

niepusty
oraz $\neq \epsilon$

$\forall v \in \Sigma^*$ (jeśli v jest właściwym
prefiksem w oraz
 $\hat{\delta}(q_i, w) = q_k$, to $L < k$)



o drodze z q_i do q_j
chodzimy tylko po stanach
o indeksach $< k$.

Indukcja względem k :

- $\varphi_{i,i}^0 = \epsilon + \bigoplus_{a \in \Sigma} a$ (suma po literach spełniających warunki)
 $\delta(q_i, a) = q_i$

- $\varphi_{i,j}^0 = \bigoplus_{a \in \Sigma} a$
 $\delta(q_i, a) = q_j$

- $\varphi_{i,j}^{k+1} = \varphi_{i,j}^k + \varphi_{i,k+1}^k (\varphi_{k+1,k+1}^k)^* \varphi_{k+1,j}^k$

Mając te wyrażenia regularne piszemy
 ψ t. je $L_A = L_\psi$:

$$\psi = \bigoplus_{q_i \in F} \varphi_{1,i}^n$$



UOGÓLNIENIA

Są dwa możliwe kierunki:

- słowa nieskończone
 - drzewa
- } można iść w obu tych kierunkach jednocześnie

Automat skończony na słowach nieskończonych.

$\langle \Sigma, Q, q_0, \delta, \text{CO TUTAJ?} \rangle$

↑ skończony

↑ Dużo warunków akceptacji
Büchig, Rabine...

Interpretacja Bückiego: $F \subseteq Q$.

Słowo jest akceptowane, gdy automat nieskończenie wiele razy odwiedza stany

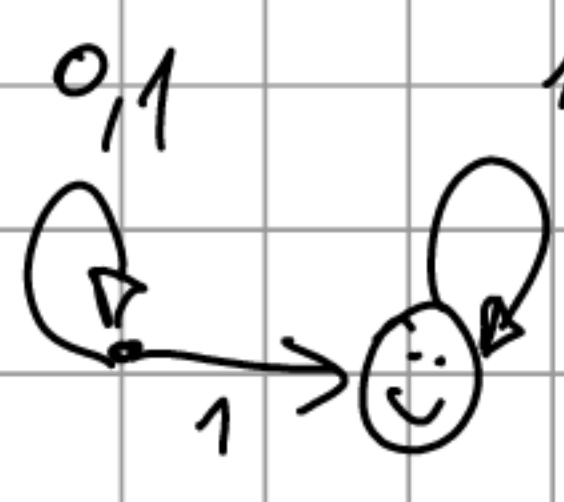
z F .

Pytanie: czy deterministyczne automaty Büchiego robią to samo co niedeterministyczne?

Odpowiedź: nie w ten sposób co poprzednio. Przykład: $|\Sigma| = 1$,



Lepsza odpowiedź: L - zbiór słów nieskończonych nad $\Sigma = \{0, 1\}$, w których jest tylko skończenie wiele zer.

L jest rozstrzygany przez 

Deterministycznym się nie da: ćwiczenie.

14.03.2022

Uwaga Klasa języków regularnych nad Σ jest najmniejszą klasą języków nad Σ , która:

- zawiera wszystkie języki skończone (*)
- jest zamknięta na sumę, konkatenację i gwiazdkę Kleene'go ($L \cup L^*$)

Istnienie: proste, Najmniejszość: pokazać, że dowolna klasa języków spełniająca powyższe warunki zawiera języki regularne.

GRAMATYKI BEZKONTEKSTOWE

Def. Gramatyka bezkontekstowa (CFG) to

krotka $\langle N, \Sigma, S, \Pi \rangle$, $S \in N$,

$\Pi \subseteq N \times (N \cup \Sigma)^*$, $N \cap \Sigma = \emptyset$
skończone

CFG - Context Free Grammar

Dygresja A : alfabet, $\Pi \subseteq A^* \times A^*$
skończone

Dla $w, v \in A^*$ definiujemy $w \xrightarrow{\Pi} v$ gdy
istnieją słowa $x, y \in A^*$ i para
 $\langle l, r \rangle \in \Pi$ t.ż. $w = xly$ oraz $v = xry$

Przykład: bierzemy w , znajdujemy
w nim infiks l , zamieniamy go
na r i dostajemy v .

Relacje $\xrightarrow{\Pi}^*$ i $\overset{*}{\leftarrow \Pi}$ definiujemy ^{odpowiednio} jako
transytywne i równoważnościowe domknięcie

relacji $\xrightarrow{\Pi}$.

- $\xrightarrow{\Pi}^*$ osiągalność w grafie
- $\overset{*}{\leftarrow \Pi}$ bycie w jednej spójnej
składowej (osiągalność w grafie
bez skierowania)

KONIEC DYGRESJI

Dla danej CFG $G = \langle N, \Sigma, S, \Pi \rangle$ przez \bar{L}_G oznaczamy $\{w \in (N \cup \Sigma)^* : S \xrightarrow{*} \Pi w\}$,
przez $L_G = \bar{L}_G \cap \Sigma^*$

Def. $L \subseteq \Sigma^*$ jest bezkontekstowy (CFL),
gdy istnieje CFG G t.ż. $L = L_G$

Obserwacja Każdy język regularny jest bezkontekstowy.

Dowód Klasa CFL spełnia warunki z uwagi (*), (i), (ii), (iii):

(*) : proste, dodajemy reguły $S \rightarrow w$ dla $w \in$ języka

(i) : bierzemy sumę rozłączną dwóch grammatyk i dodajemy reguły $\langle S, S' \rangle, \langle S, S'' \rangle$
nowy S

(ii): $G' = \langle N', \Sigma, S', \Pi' \rangle$, $G'' = \langle N'', \Sigma, S'', \Pi'' \rangle$,

konstruujemy $G = \langle N' \cup N'' \cup \{S\}, \Sigma, S, \Pi' \cup \Pi'' \cup \langle S, S'S'' \rangle \rangle$

(iii) Podobnie gwiazdka.

Przykład • Notacja: $S \rightarrow aSa \mid bSb \mid \epsilon$

oznacza, że $\Pi = \{ \langle S, aSa \rangle, \langle S, bSb \rangle, \langle S, \epsilon \rangle \}$

(to konkretnie daje język palindromów parzystej długości).

• $S \rightarrow SS \mid \epsilon \mid aSb \mid bSa$

\leadsto język słów, które mają tyle samo liter a co b.

• $S \rightarrow (S) \mid [S] \mid SS \mid \epsilon$

poprawne nawiasowanie = $(,), [,]$.

Konwencja notacyjna (nieformalna Marcinkowskiego):

Dla języków L, L' piszemy $L = L'$

gdy $L \stackrel{\cdot}{=} L' \subseteq \{ \epsilon \}$
↑
różnica symetryczna

Def CFG $G = \langle N, \Sigma, S, \Pi \rangle$ jest postaci normalnej Chomskiego, gdy każda produkcja $\in \Pi$ jest postaci $A \rightarrow BC$ dla $A, B, C \in N$ lub $A \rightarrow a$ dla $A \in N, a \in \Sigma$.

Tw. (Chomskiego o postaci normalnej)

Dla każdego CFL L istnieje CFG G w postaci Chomskiego t.ż. $L = L_G$.

Dowód: Nudny :-)

Lemat (o pompowaniu dla CFG)

Dla każdego CFL L istnieje $n \in \mathbb{N}$ t.ż. dla każdego $w \in L, |w| \geq n$, istnieją słowa

s, z, t, y, x t.ze $|zty| \leq n, |zy| > 0, w = sztyx$
 dla każdego $k \in \mathbb{N}$ $sz^k t y^k x \in L$.

Uwaga Czy język $\{a^i b^j c^k : i, j \in \mathbb{N}\}$ jest CFG?

Odp.: TAK (proste)

A co z $\{a^i b^j c^k : i, j \in \mathbb{N}\}$?

Odp.: TAK (to samo)

A czym jest przekrój tych języków?

Odp.: $\{a^i b^i c^i : i \in \mathbb{N}\}$

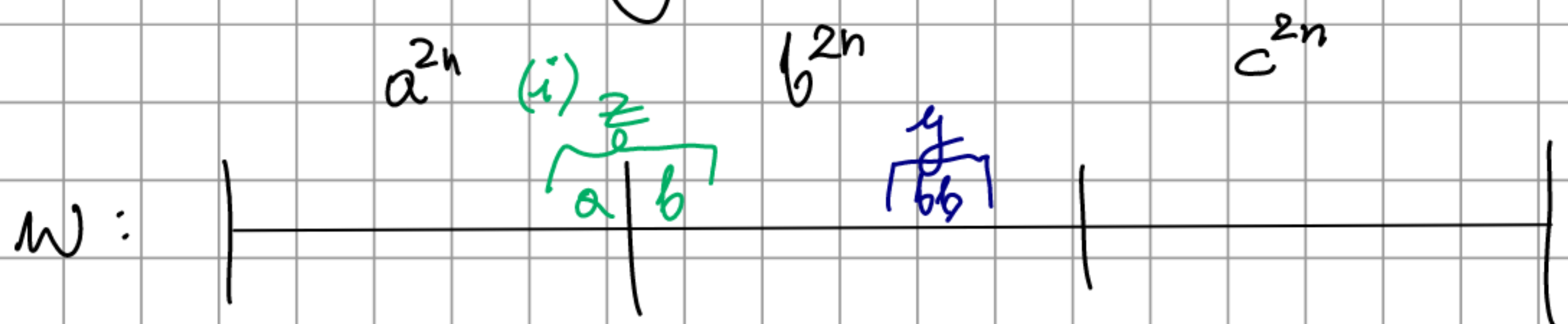
Ten język jednak nie jest CFL!

Dowód Załóżmy, że L jest CF. Niech

n : stała z lematu o pomiarzeniu.

Niech $w = a^{2n} b^{2n} c^{2n}$. Wtedy są

stałe s, z, t, y, x z lematu.



Przypadki: (i) z lub y zawiera dwie różne literki, to dla $k=2$ wygrujemy

(ii) jeżeli x, y mają tylko po jednej literce, to $k=0$ wygramy bo tej trzeciej literki jest więcej.

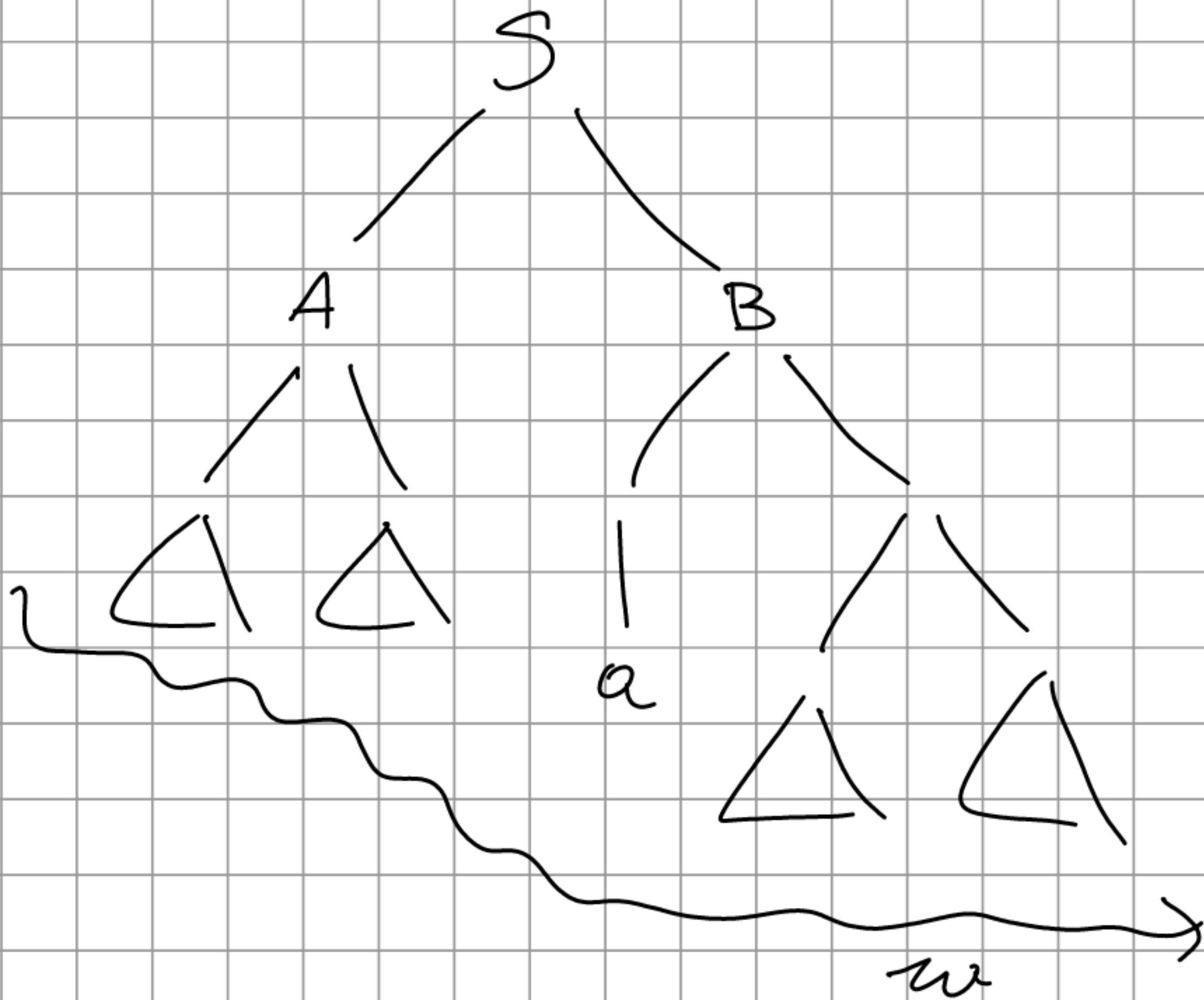
21.03.2022

D-d. (lematu o pompowaniu)

Weźmy $L \in CFL$ oraz CFG $G = \langle N, \Sigma, S, \Pi \rangle$

w postaci normalnej Chomsky'ego i niech

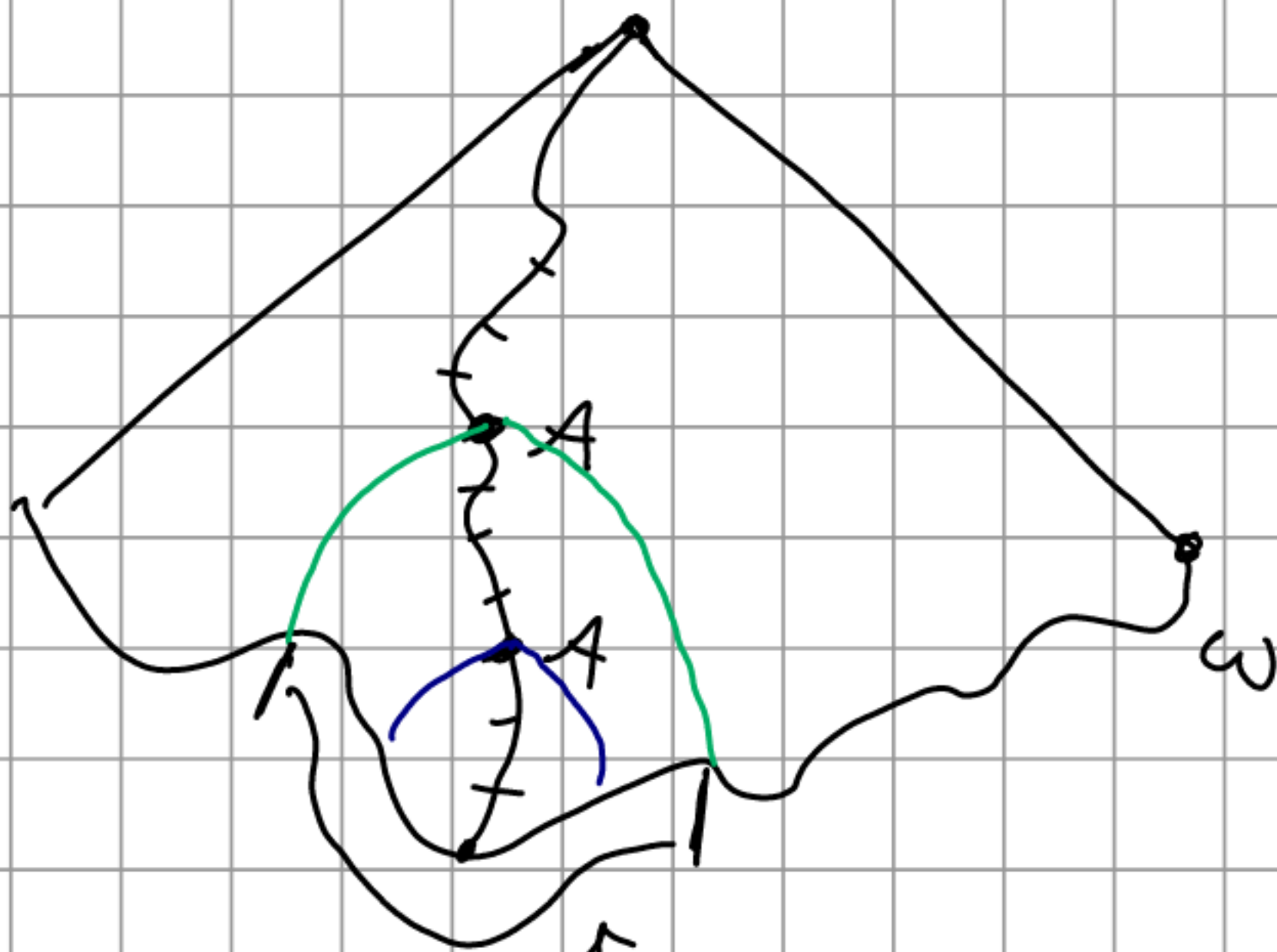
$n = 2^{|N|+3}$. Niech $w \in L$, $|w| \geq n$.



Drzewo słowa w .

Jaka jest najdłuższa ścieżka od
korzenia do liścia? Co najmniej
ma długość $|N|+3$ ($\log n$).

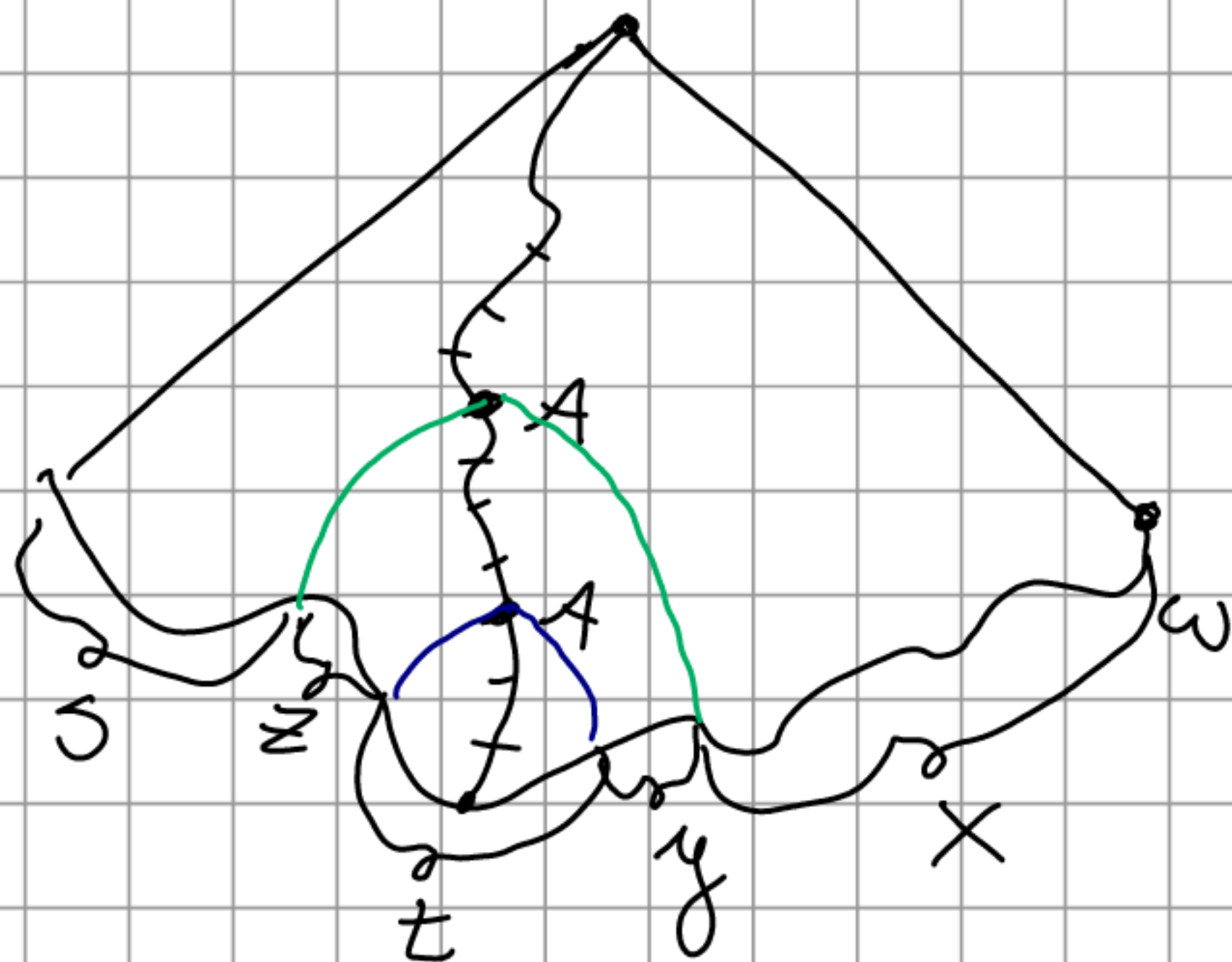
Na tej ścieżce są same nieterminale
(poza liściem), zatem musi być
jakiś nieterminal, który się powtarza.
Niech A będzie takim nieterminalem
który jest najniżej na tej ścieżce.



to ma $dt. \leq 2^{|N|+1}$

(może tylko A się
może powtórzyć na
tej ścieżce)

Podział jest naturalny:

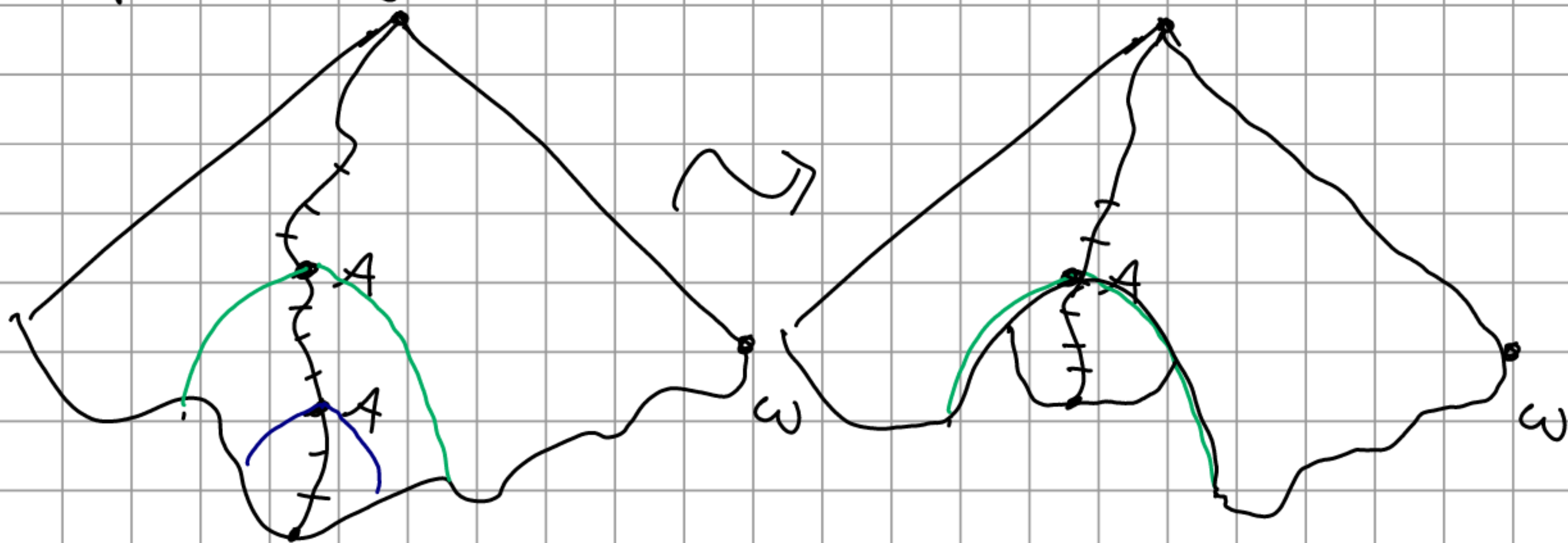


Wtedy $|zty| \leq 2^{|\mathcal{N}|+1} \leq n$.

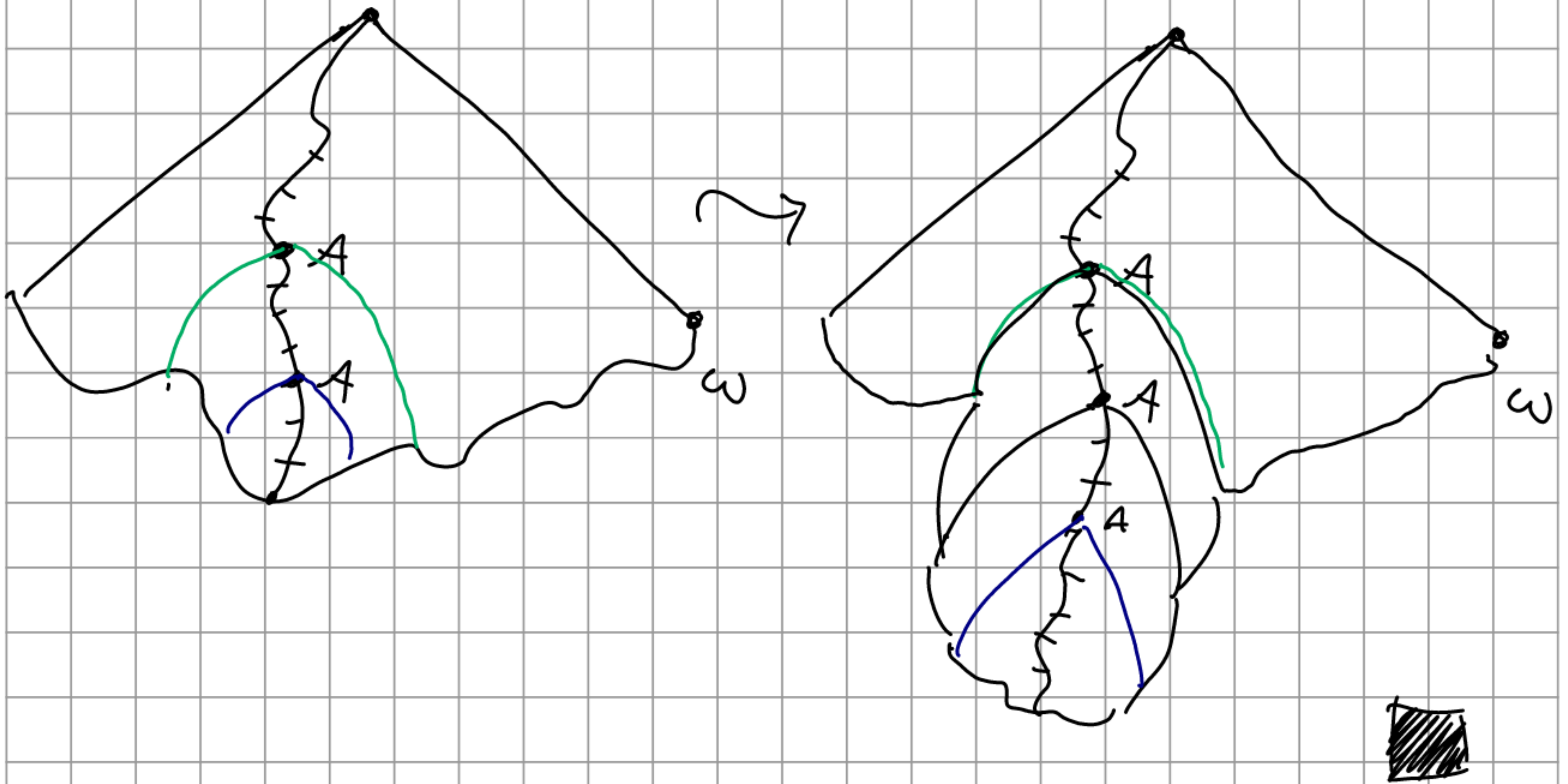
Ponadto $|zy| > 0$ (to niszcz wystąpienie

A jest potomkiem tylko jednego
dziecka tego wystąpienia wyżej).

- gdy $k=0$: "przeszczepiamy" tą niszcz
produkcję A pod tą większą



- gdy $k \geq 1$: "replikujemy" tę wyzszą produkcję tyle ile trzeba.



AUTOMATY ZE STOSEM

Def. Automat ze stosem (NPDA: Nondeterministic

Push Down Automaton) to krotka

$$A = \langle \Sigma, Q, q_0, S, Z, \delta \rangle,$$

Σ alfabet skończony
 Q zbiór stanów
 q_0 stan początkowy
 S zbiór kółek sweterków (skończony)
 Z sweterek dna stosu
 δ relacja przejścia

gdzie $\delta \subseteq (Q \times (\Sigma \cup \epsilon) \times S) \times (Q \times S^*)$

ora δ ma takie własności:

- $\delta(q, a, Z, q', w) \Rightarrow w = Z^v$ gdzie v nie zawiera Z .
- $\delta(q, a, A, q', w) \wedge A \neq Z \Rightarrow w$ nie zawiera Z .

Wtedy $\hat{\delta} \subseteq \Sigma^* \times (Q \times S^*)$ jest

najmniejsza relacja spełniająca:

- $\hat{\delta}(e, q_0, Z)$

- $\hat{\delta}(w, q, VA) \wedge \delta(q, a, A, q', w)$

$\Rightarrow \hat{\delta}(wa, q, VW) \quad (a \in \Sigma \cup \{\epsilon\})$.

Wtedy $L_A = \{w : \exists q \hat{\delta}(w, q, Z)\}$.

Przykład Palindromy pangste:

$$\delta(q_1, B, A, q_1, AB)$$

$$\delta(q_1, \epsilon, A, q_2, A)$$

$$\delta(q_2, A, A, q_2, \epsilon)$$

Przykład Słowa w t. z. $|w|_0 = |w|_1$.

Tw. Klasa języków bezkontekstowych jest
równa klasie języków wyrażanych przez NPDA.

Uwaga (bardzo ważna) Klasy rozstrzygane
przez maszyny deterministyczne są zamknięte
na dopełnienie.

Pytanie Czy w sformułowaniu tw. nie
można zmienić NPDA na PDA:

$\{a^i b^i c^i : i \in \mathbb{N}\}$ nie jest CFL

ale dopełnienie jest.

Def. Zanim to, wprowadzimy pojęcie postaci
normalnej Greibach: CFG G jest w
tej postaci gdy dla każdego $\langle A, w \rangle \in TT$
 $w \in \Sigma N^*$.

Lemat Dla każdego $L: CFL$ istnieje G
w postaci normalnej Greibach t.ż. $L = L_G$

Dawód tw. " \Rightarrow " Weźmy CFL L oraz CFG G
w postaci normalnej Greibach t.ze $L = L_G$.

Zbudujemy NPDA $\langle \Sigma, Q, q_0, S, Z, \delta \rangle$
t.ze $L = L_A$.

- Jeśli w Π jest produkcja $A \rightarrow a w$,
to $\delta(q, a, A, q, w^R)$,
• $\delta(q_0, \epsilon, Z, q, ZS)$,

gdzie $Q = \{q_0, q\}$, $S = N$