16.05.2022 PROBLEM ODPOWIEDNOŚCI POSTA (PCP)

Instancją jest skończony zbiór par słów $\{\langle l_i, r_i\rangle,\ i\in\{1,\dots,k\},\ l_i, r_i \in \Sigma^*\}$ nad pewnym alfabetem Σ.

Czy istnieje $s\in\{1,\dots,k\}^*$ t.że $s\neq\varepsilon$ oraz $l_{s_1} l_{s_2}\dots l_{s_{|s|}} = r_{s_1} r_{s_2}\dots r_{s_{|s|}}$?

$l_7\ l_2\ l_3 \dots\dots l_7$

$r_7\ r_2\ r_8 \dots\dots r_7$

Tw. Problem odpowiedniości Posta jest nierozstrzygalny.

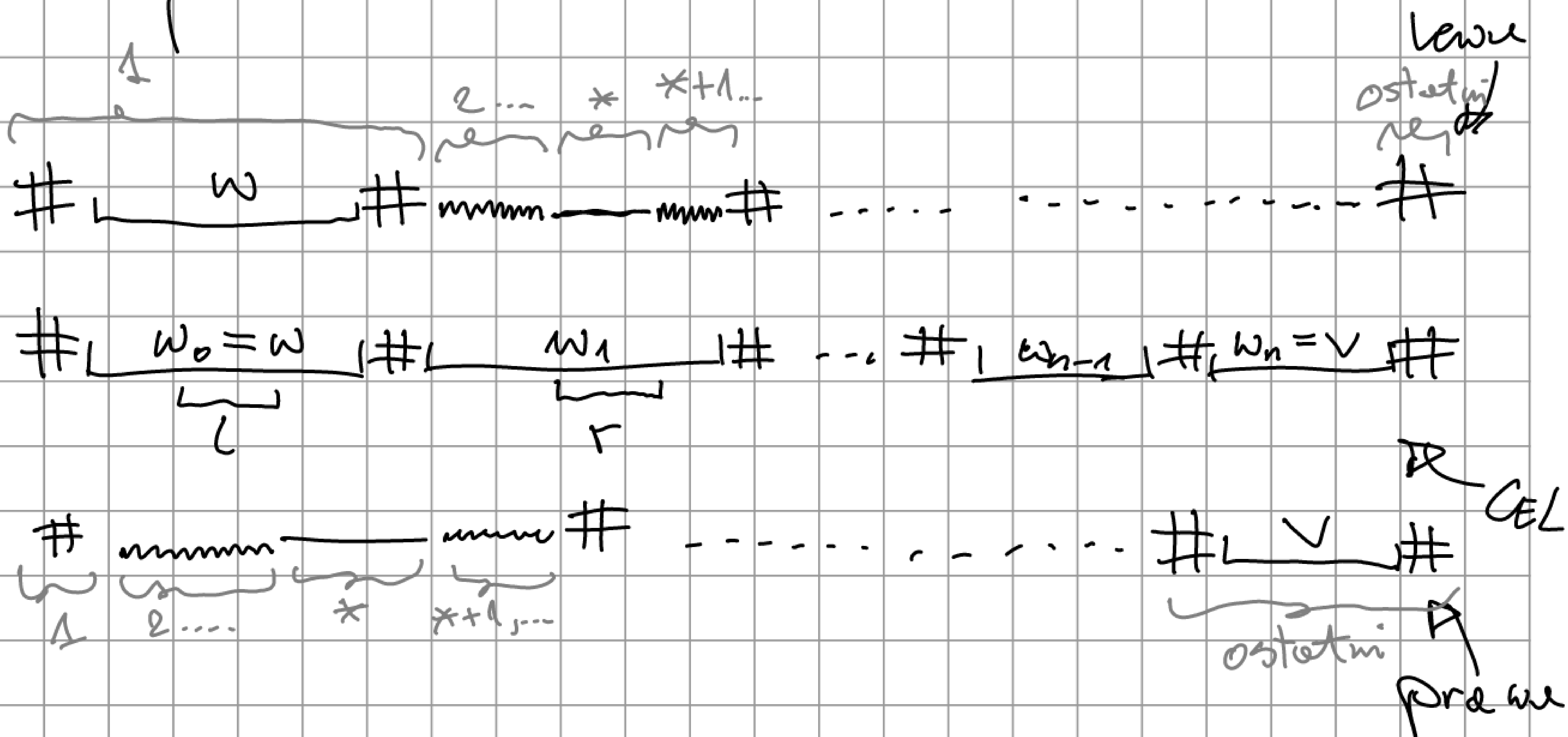
D-d. I przymiarka dowodu: Semi Thue $\le_{rek}$ PCP.

Dają nam $\langle w, v, \Pi\rangle$. Mamy wyprodukować instancję PCP P t.że $w \xrightarrow{*}_{\Pi} v \iff P$ ma rozwiązanie.

Niech A : alfabet Π. Wtedy $\Sigma = A \sqcup \{\#\}$.

$P = \{\langle \#w\#, \#\rangle, \langle \#, \#v\#\rangle\} \cup \Pi^R \cup \{\langle a,a\rangle : a\in\Sigma\}$

Takie P zawsze działa, ale pokażemy tylko $\Rightarrow$ w "fajny i zadowalający" sposób.

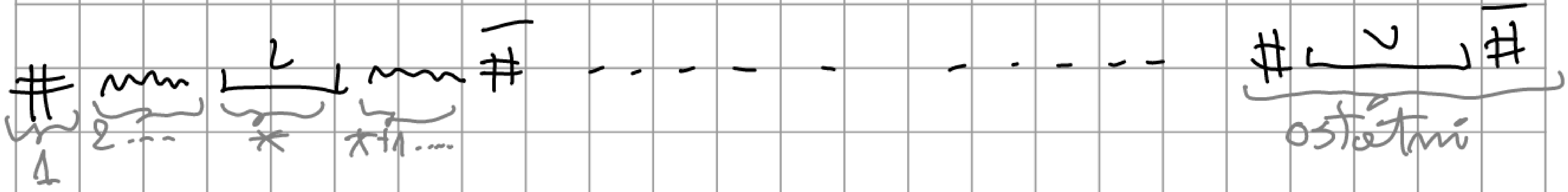


II podejście: $\Sigma = \{\#, \bar{\#}\} \sqcup \{a, \bar{a} : a \in \mathcal{A}\}$.

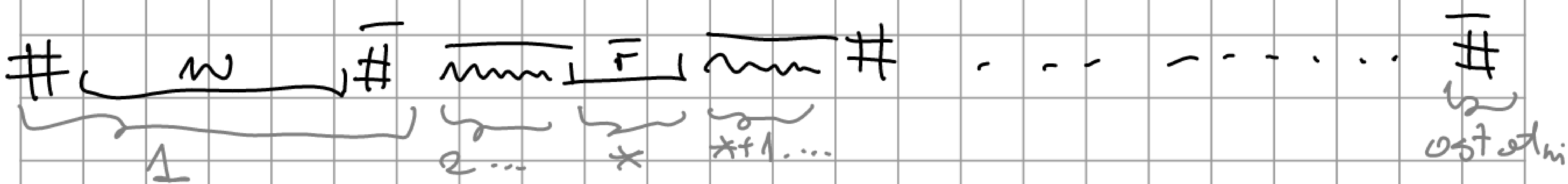
$\bar{a} \notin \mathcal{A}$

$$P = \{\langle \#, \#w\bar{\#} \rangle, \langle \#v\bar{\#}, \bar{\#} \rangle\}$$
$$\cup \{\langle \bar{l}, r \rangle, \langle l, \bar{r} \rangle : \langle l, r \rangle \in \Pi\}$$
$$\cup \{\langle \#, \bar{\#} \rangle, \langle \bar{\#}, \# \rangle\} \cup \{\langle a, \bar{a} \rangle, \langle \bar{a}, a \rangle : a \in \mathcal{A}\}.$$

Wtedy:



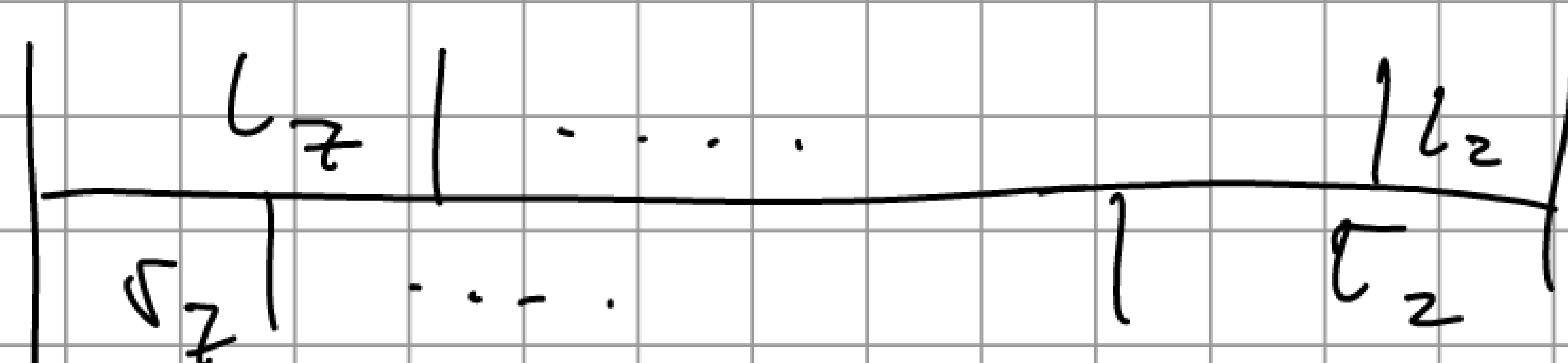
$$\#\,\underbrace{\quad w_0 = w \quad}\,\overline{\#}\,\underbrace{\quad \overline{w_1} \quad}\,\#\,\underbrace{\quad w_2 \quad}\,\overline{\#}\;\dots\;\#\,\underbrace{\quad \overline{w_{n-1}} \quad}\,\#\,\underbrace{\quad \overline{w_n = v} \quad}\,\overline{\#}$$



(jeśli parzystość się nie zgadza, to mogę jakieś słowo zdublować)

wtedy $\Rightarrow$ prosto. Teraz $\Leftarrow$:

$\{\langle l_i, r_i\rangle : i \in \{1,\dots,k\}\}$: pewna instancja PCP.



r_z jest prefiksem l_z.
l_2 jest sufiksem r_2

Zatem musimy zacząć od $\langle \#, \#w\overline{\#}\rangle$ i skończyć na $\langle \#v\overline{\#}, \overline{\#}\rangle$.

$\#\, \underline{w}\ \bar{\#}\ x\ \#\ y\ \bar{\#}\ \ldots\ \bar{\#}\ v\ \#$

Lemat $x \xrightarrow{*}_{\Pi} y$

D-d. Na początek: $w \xrightarrow{*}_{\Pi} x$. Łatwe.

Dalej indukcja i elo!

z dobrymi założeniami.

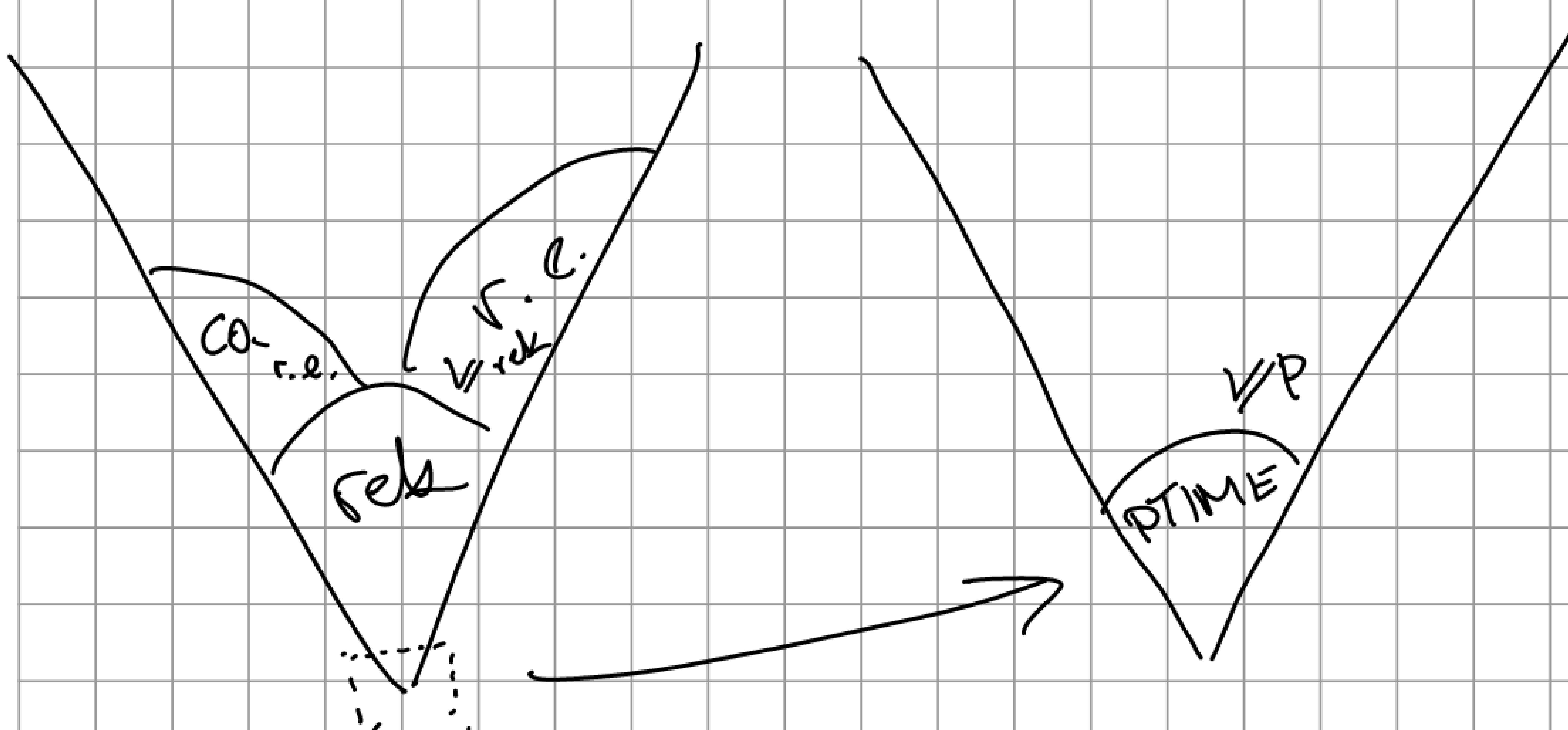
■

Koniec teorii 2.

III CZĘŚĆ KURSU ...

Def. $A \subseteq \Sigma^*$ jest w **PTIME** (dla przyjaciół w "P") gdy istnieje maszyna Turinga M oraz wielomian p takie, że:

- M rozstrzyga A
- dla każdego $x \in \Sigma^*$ M uruchomiona na x zatrzymuje się po najwyżej $p(|x|)$ krokach.



$$\begin{array}{ccc} \Sigma_A^* & & \Sigma_B^* \\ \cup\!| & & \cup\!| \\ A & \leq_p & B \end{array}$$

Def. $A \leq_p B$ (czytamy: „A jest nietrudniejsze od B w sensie redukcji wielomianowych")

gdy istnieje $\underbrace{f : \Sigma_A^* \to \Sigma_B^*}_{\text{zwana redukcją wielomianową}}$ o następujących własnościach:

- istnieje wielomian p oraz MT M t.że $\forall a \in \Sigma_A^*$ $M(a)$ zatrzymuje się po $\leq p(|a|)$ krokach i zwraca wartoś $f(a)$
- $\forall a \in \Sigma_A^* \left(a \in A \iff f(a) \in B \right)$

Obserwacja Jeśli $A \leq_p B$ i $B \in PTIME$, to $A \in PTIME$.

Obserwacja Jeśli $A, B \in PTIME$ i oba są nietrywialne, to $A \leq_p B$ oraz $B \leq_p A$.

Problem 3-SAT Instancją jest formuła rachunku zdań postaci 3CNF (koniunkcje klauzul o co najwyżej 3 literałach).

Pytaję czy formuła jest spełnialna.

Problem 3-kolorowania. Graf nieskierowany.

Pytaję czy da się pokolorować wierzchołki grafu tak żeby żadne dwie sąsiednie były różnych kolorów.

Tw. $3COL \leq_p 3SAT$.

D-d. Dają mi graf $G = \langle V, E \rangle$.

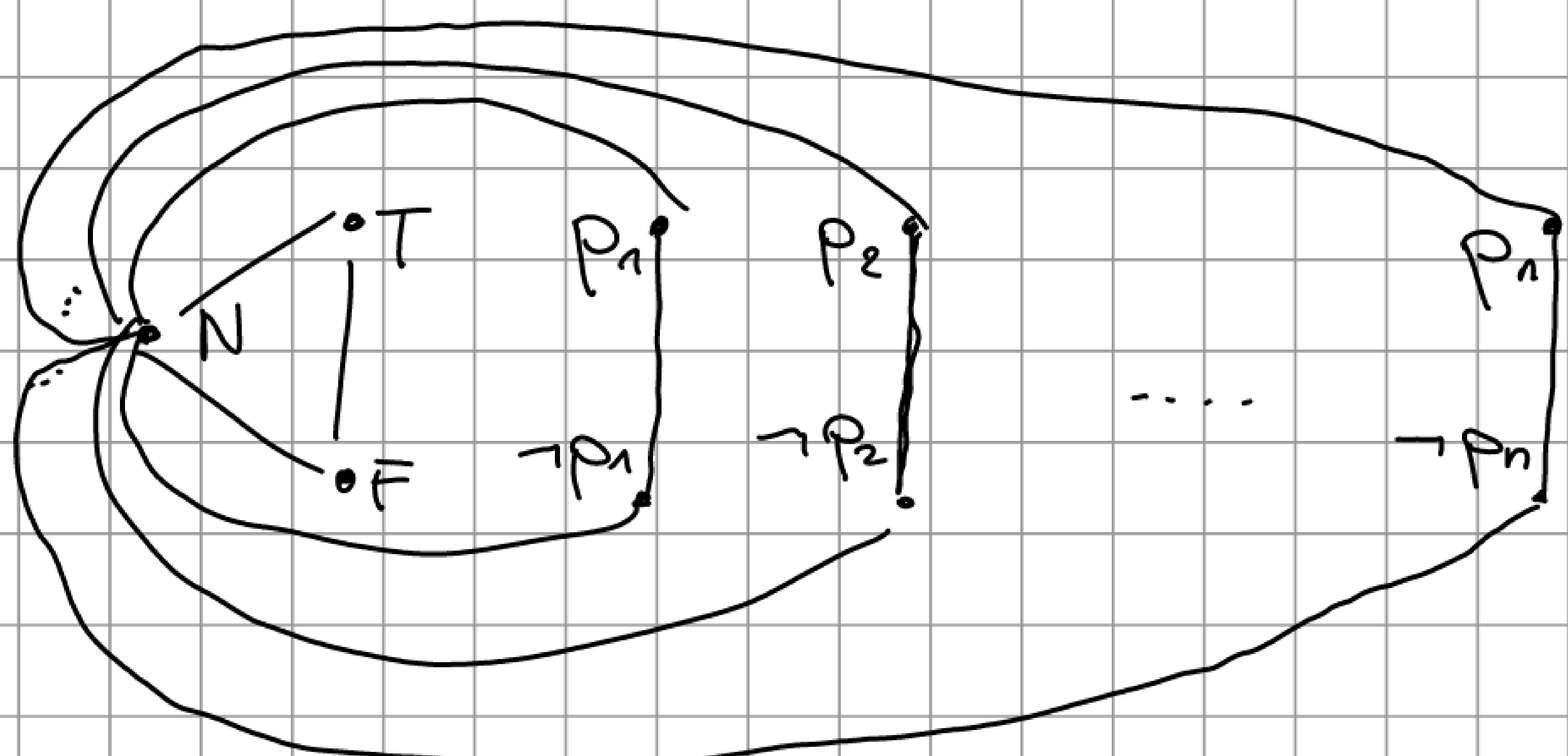
Mamy SZYBKO napisać formułę φ_G w postaci 3CNF t.że G da się pokolorować $\iff \varphi_G$ jest spełnialna.

Konstrukcja φ_G: zmiennymi będą r_u, g_u, b_u dla $u \in V$. Klauzule:

- $\forall u \in V \quad (r_u \vee g_u \vee b_u)$
- $\forall (u,w) \in E \quad (\neg r_u \vee \neg r_w), (\neg g_u \vee \neg g_w),$
$(\neg b_u \vee \neg b_w)$ ∎

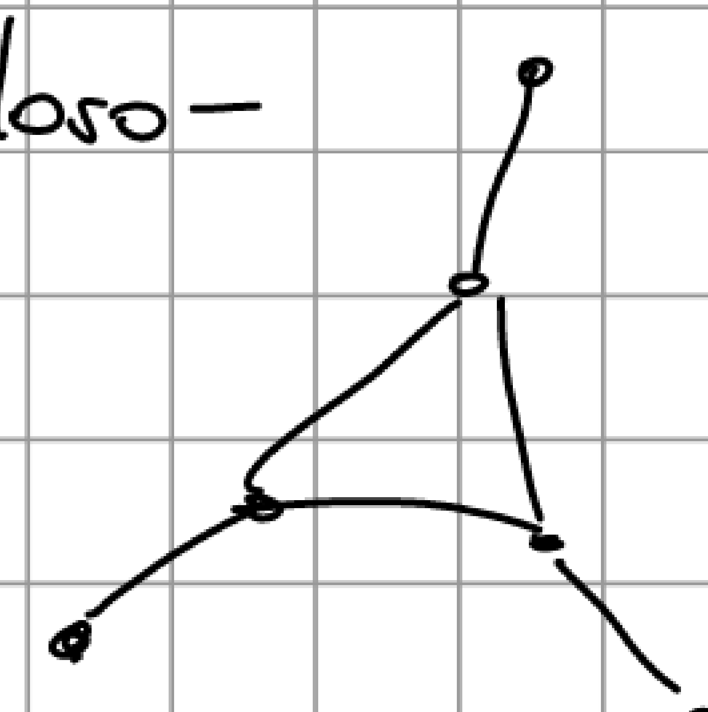
Tw $3SAT \leq_p 3COL$.

D-d. Dają nam formułę φ w postaci 3CNF o zmiennych $p_1, \dots, p_n$. Mamy szybko zbudować $G_\varphi = (V, E)$ t.że G_φ jest 3-kolorowalny $\iff$ φ jest spełnialny.



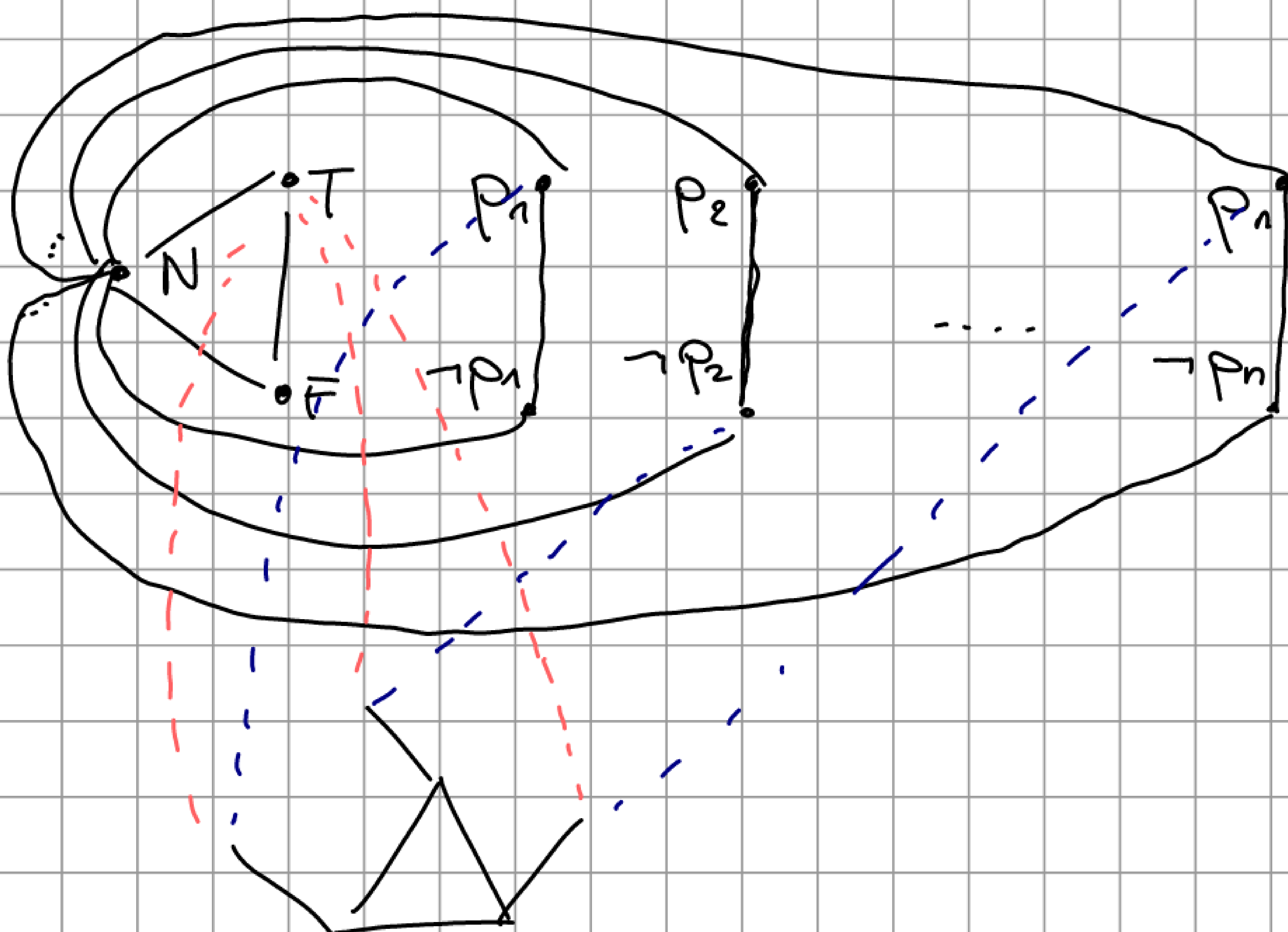
Gadżet 3 wierzchołki zewnętrzne i 3 wewnętrzne.

Obserwacja: $kol: Zewn \to \{N, F, T\}$ rozszerza się do poprawnego kolorowania całości, gdy nie jest stała.



D-d. prosty.

Podobnie gadżetu dla klauzuli $p_1 \vee \neg p_2 \vee p_n$:



No i to tyle ...