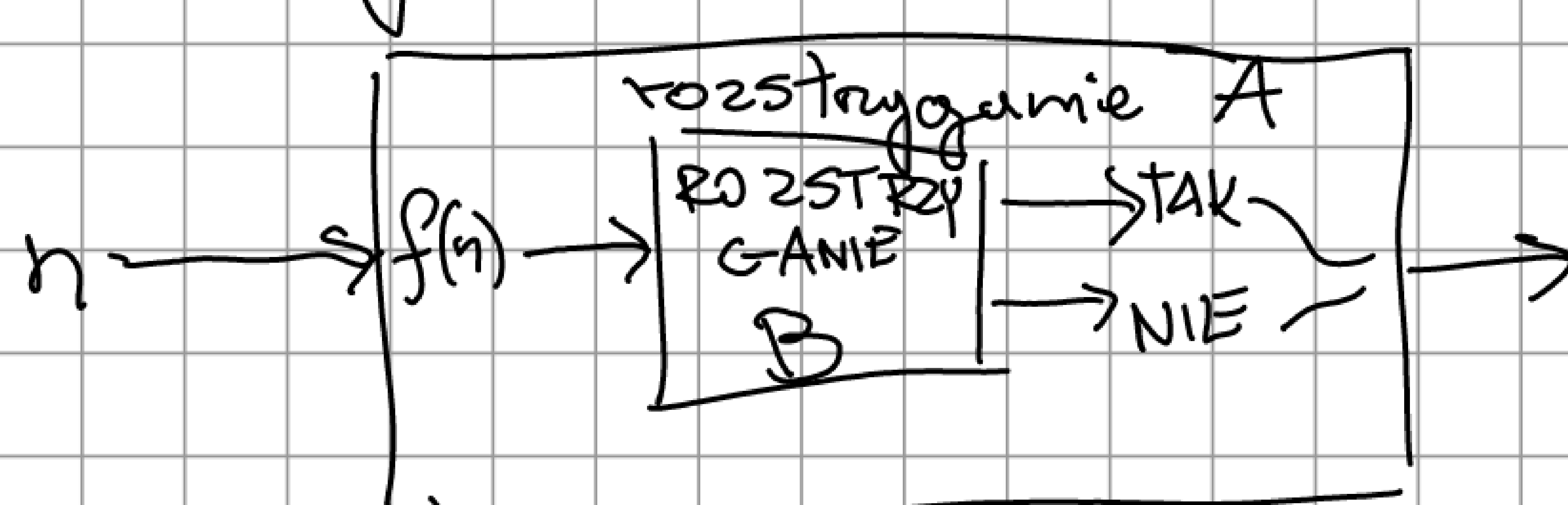
4.04.2022

Def. Funkcja rekurencyjna to relacja wejście-wyjście dla programu w MUJP.

Obserwacja Funkcje rekurencyjne to częściowe funkcje $\varphi : \mathbb{N} \xrightarrow{\circ} \mathbb{N}$. Ich ważną podklasą: funkcje rekurencyjne całkowite.

Uwaga Zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$ jest r.e. $\iff$ istnieje f rek. t.że $A = dom(f)$

Def. Niech $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Wtedy $A \leq_{rek} B$ (czytaj "A jest nie trudniejszy od B ze względu na redukcje całkowite rekurencyjne") gdy istnieje całkowita funkcja rek. f (zwana redukcją) t.że $\forall n \in \mathbb{N} \; (n \in A \iff f(n) \in B)$



<u>Obserwacje</u> (1) $A \leq_{rek} B$ i $B \leq_{rek} C$, to $A \leq_{rek} C$

(2) $A \leq_{rek} B$ i B jest rekurencyjny, to A też.

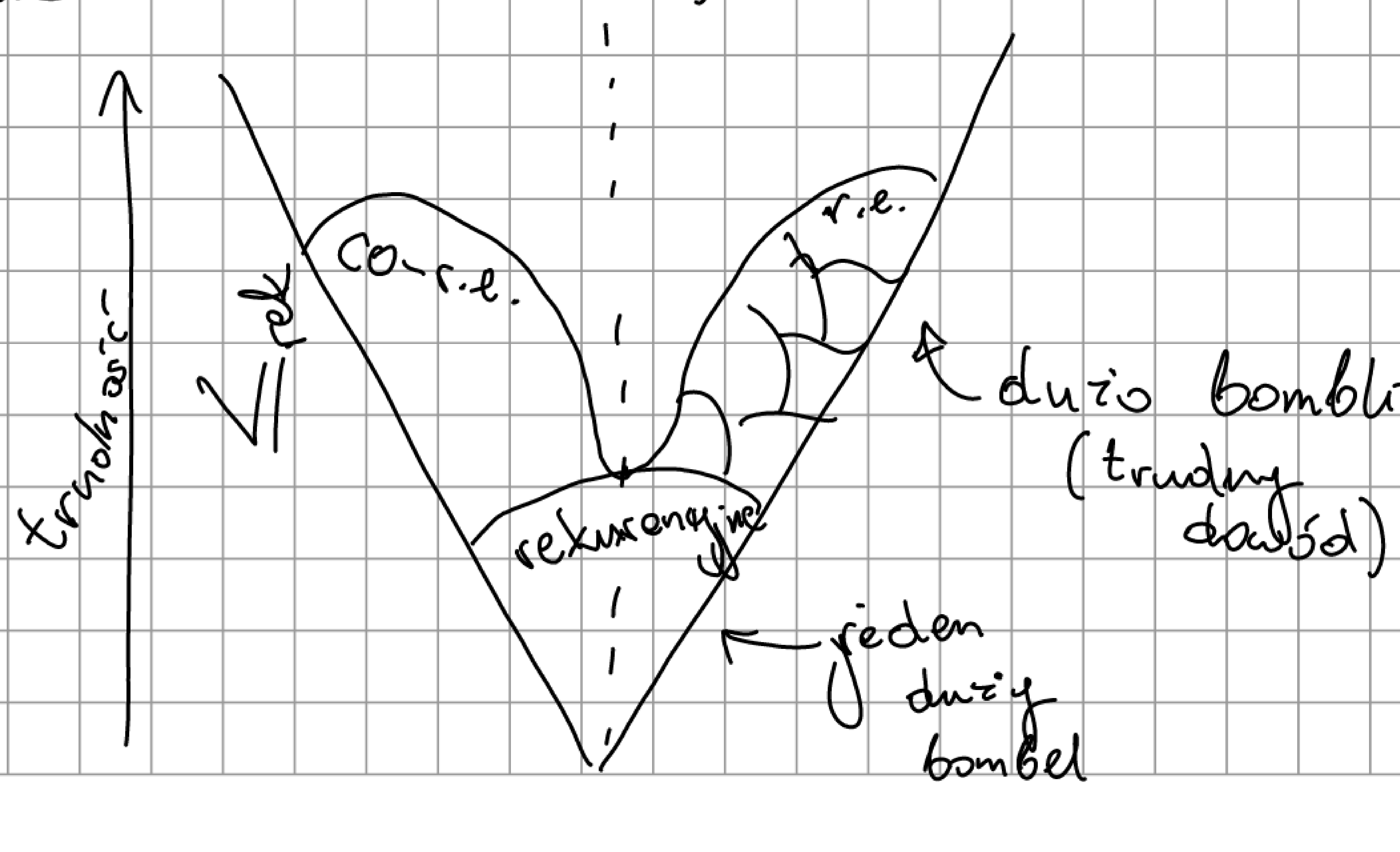
(3) $A \leq_{rek} B$ i B jest r.e., to A też jest r.e.

(4) Jeżeli A, B rekurencyjne i nietrywialne, ($\notin \{\emptyset, \mathbb{N}\}$), to $A \leq_{rek} B$ i $B \leq_{rek} A$

<u>D-d.</u> (4) Weźmy $b \in B$, $b' \in \mathbb{N} \setminus B$. Niech f_A: rozstrzyga A. Zbudujemy redukcję f.

$f(n) =$ "wczytaj n, uruchom $f_A(n)$, jeśli wyszło 0, to zwróć b', jeśli wyszło 1, to b"

$\leq_{rek}$ dzieli $P(\mathbb{N})$ na "bomble"



Tw. K (z popr. wykładu) jest zupełny w klasie r.e. ze względu na całkowite redukcje rekurencyjne, tj. dla każdego $B \in$ r.e. zachodzi $B \leq_{rek} K$

Przykład $A_7 = \{n : \varphi_n(7) = 77\}$ jest r.e. Pokażemy, że $K \leq_{rek} A_7$. Budowa redukcji:

- przynoszą nam n,
- piszemy program : | wczytaj m
  | uruchom $\varphi_n(n)$
  | zwróć 77
- zwracamy numer tego programu

To jest funkcja całkowita i do tego dzieła. Gdy $n \in K$, to $\varphi_{f(n)}$ się kończy i zwraca 77 dla dowolnego wejścia, więc $f(n) \in A$. Gdy $n \notin K$, to $\varphi_{f(n)}$ się nie skończy dla każdego wejściu, więc $f(n) \notin A_7$.

Def. $A \subseteq \mathbb{N}$ jest **ekstensjonalny** jeśli $\forall i \in A, j \notin A\ \exists n\ \varphi_i(n) \neq \varphi_j(n)$

może być pinezka

Przykład $A = \{n : \varphi_n \text{ jest całkowita}\}$

Alt. definicja A ekstensjonalny gdy $\forall i,j \in \mathbb{N}$ jeśli $\varphi_i = \varphi_j$ (jako funkcje), to $i \in A \Leftrightarrow j \in A$

Tw. (Rice'a) Żaden nietrywialny zbiór ekstensjonalny nie jest rekurencyjny.

D-d. Weźmy $A \subseteq \mathbb{N}$: nietrywialny i ekstensjonalny. BSO przyjmijmy, że żaden "numer funkcji pustej" (same pinezki) nie należy do A (zawsze możemy wziąć A^c).

Pokażemy, że $K \leq_{rek} A$. Niech $k \in A$.

Konstruujemy redukcję f:

- dają nam n
- piszemy program:

wczytaj m oblicz $\varphi_n(n)$ oblicz $\varphi_k(m)$ i zwróć wynik

- zwróć jako $f(n)$ numer tego programu.

Σ - alfabet skończony, $\Pi \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$, skończony

$w \rightarrow_\Pi v$: relacja na Σ^*

$\overset{def}{\Updownarrow}$ $w = w_1 l w_2$, $v = w_1 r w_2$, $\langle l, r \rangle \in \Pi$,

$w \xrightarrow{*}_\Pi v$: przechodnie domknięcie $\rightarrow_\Pi$

$w \xleftrightarrow{*}_\Pi v$: równoważnościowe domknięcie $\rightarrow_\Pi$.

Tw. (o nierozstrzygalności problemu słów Thuego)

Problemy Semithue $= \{\langle w, v, \Pi \rangle : w \xrightarrow[\Pi]{*} v\}$,

Thue $= \{\langle w, v, \Pi \rangle : w \xleftrightarrow{*}_\Pi v\}$ są

nierozstrzygalne.