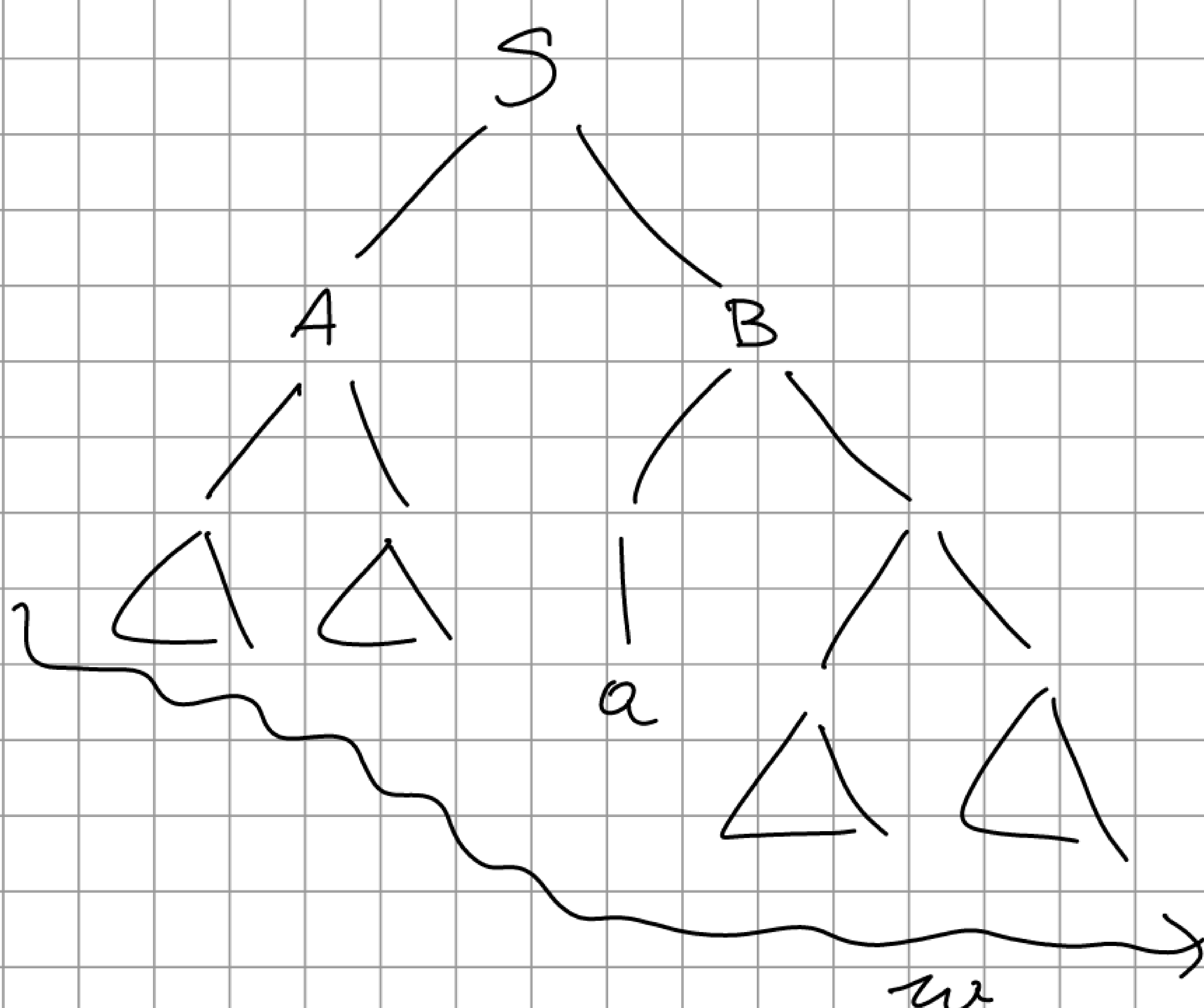
21.03.2022

D-d. (lematu o pompowaniu)

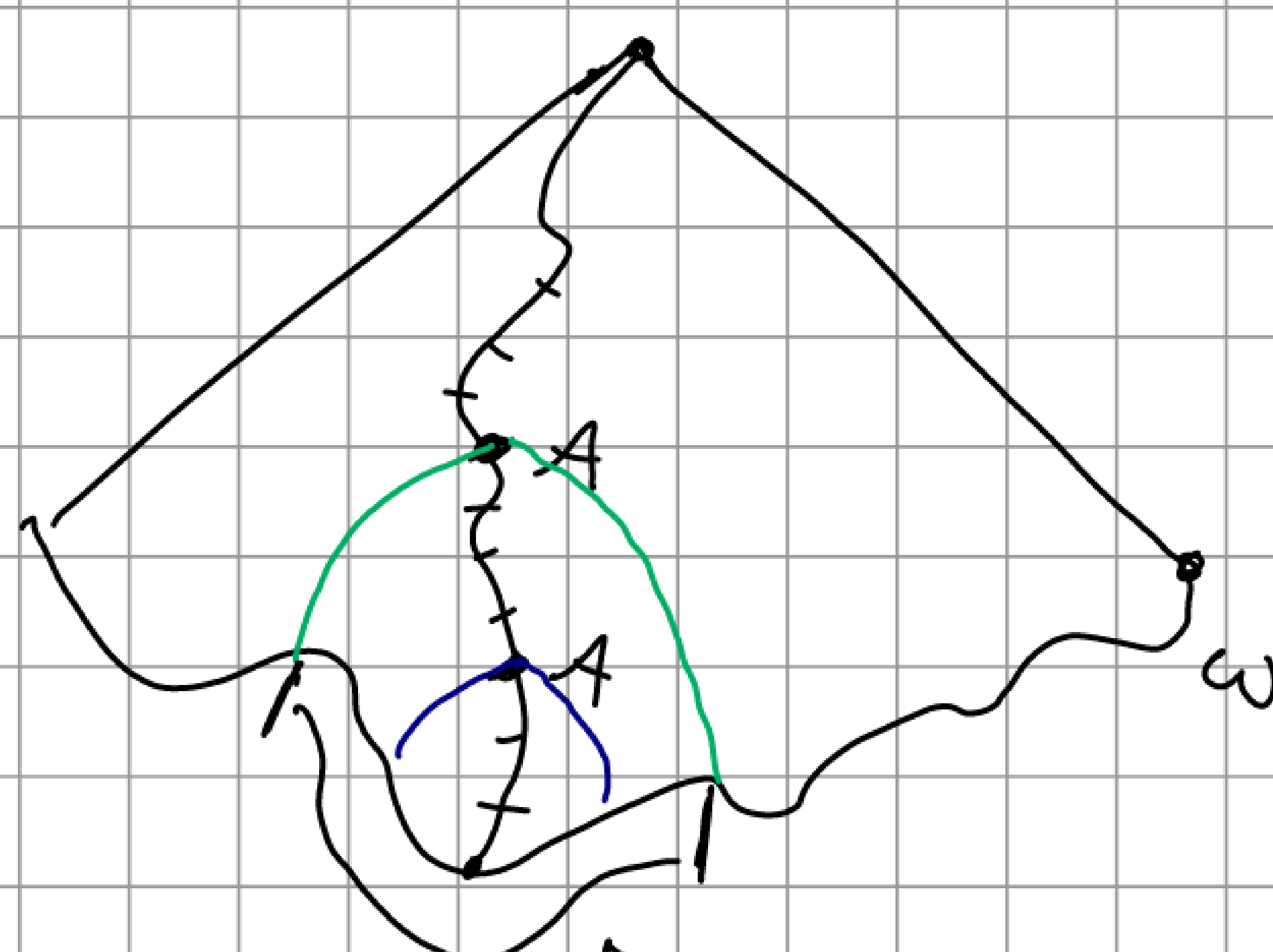
Weźmy $L \in CFL$ oraz CFG $G = \langle N, \Sigma, S, \Pi \rangle$ w postaci normalnej Chomsky'ego i niech $n = 2^{|N|+3}$. Niech $w \in L$, $|w| \geq n$.



Drzewo słowa w.

Jaka jest najdłuższa ścieżka od korzenia do liścia? Co najmniej ma długość $|N|+3$ ($\log n$).

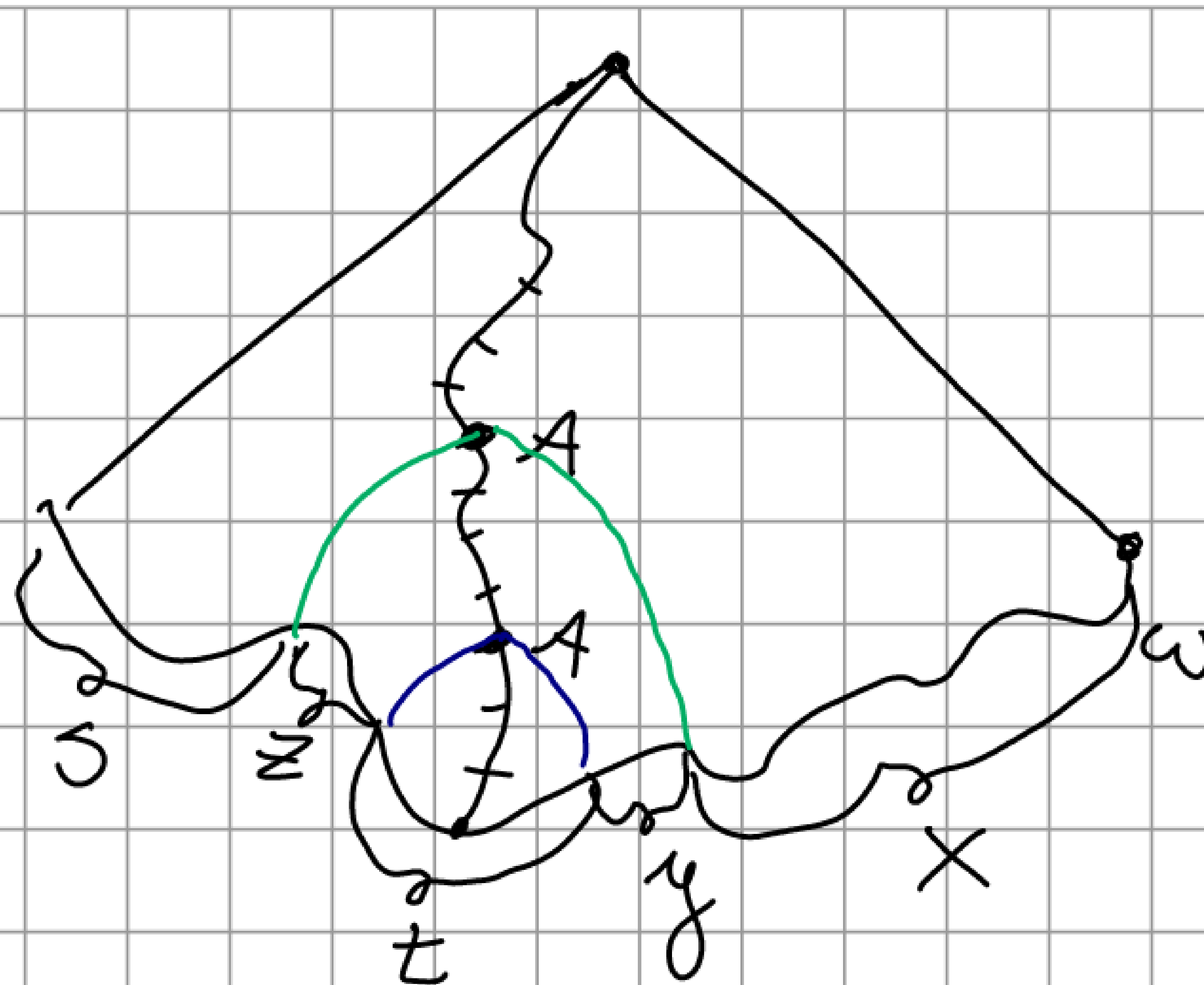
Na tej ścieżce są same nieterminale (poza liściem), zatem musi być jakiś nieterminal, który się powtarza. Niech A będzie takim nieterminalem który jest najniżej na tej ścieżce.



← to ma dł. $\leq 2^{|N|+1}$

(no bo tylko A się może powtórzyć na tej ścieżce)

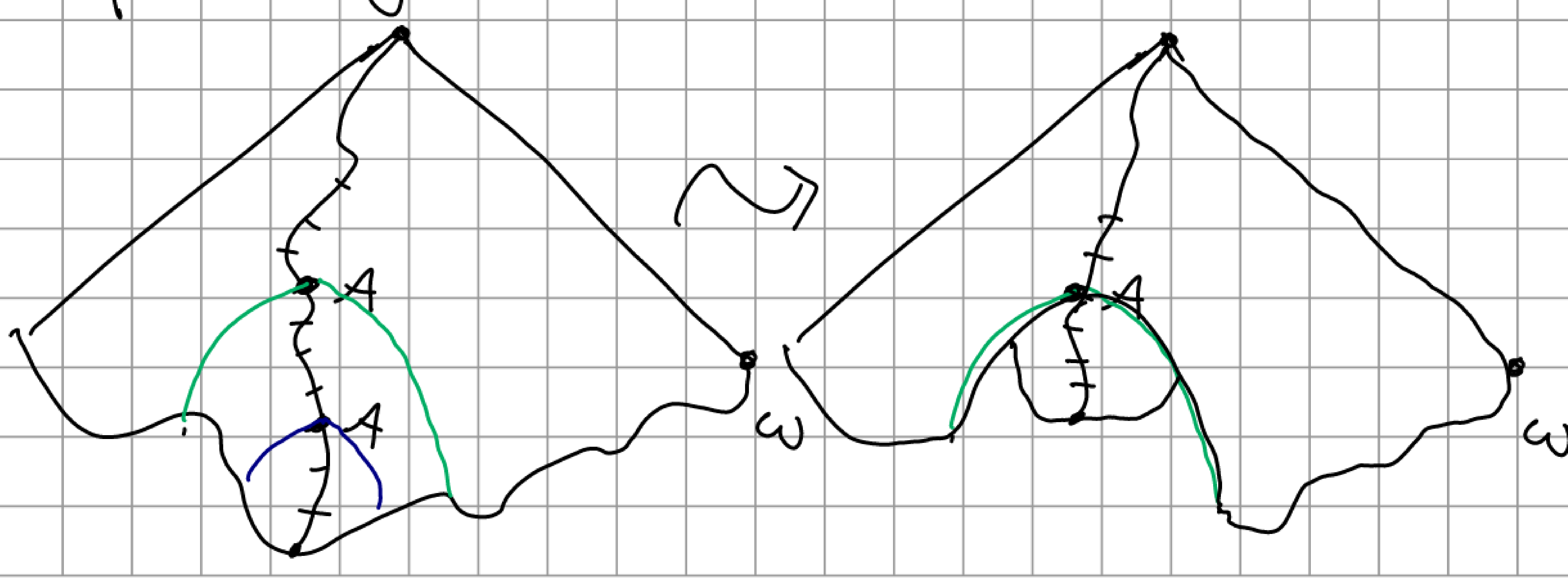
Podział jest naturalny:



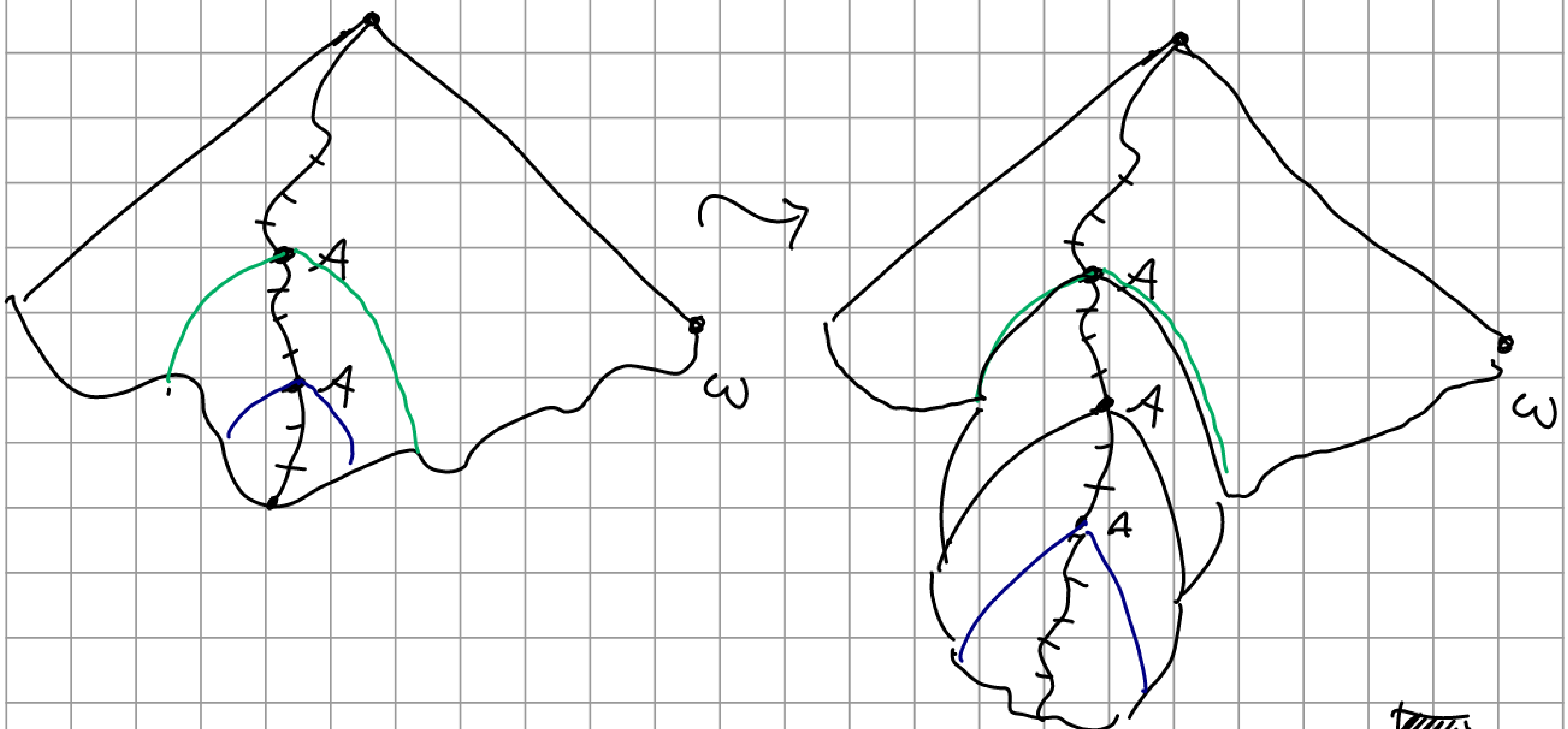
Wtedy $|zty| \leq 2^{|N|+1} \leq n$.

Ponadto $|zy| > 0$ (to niższe wystąpienie A jest potomkiem tylko jednego dziecka tego wystąpienia wyżej).

- gdy $k=0$: "przeszczepiamy" tą niższą produkcję A pod tę większą



• gdy $k \geq 1$: "replikujemy" tę wyższą produkcję tyle ile trzeba.



∎

AUTOMATY ZE STOSEM

<u>Def.</u> **Automat ze stosem** (NPDA: Nondeterministic Push Down Automaton) to krotka

$$A = \langle \Sigma, Q, q_0, S, Z, \delta \rangle,$$

Σ – alfabet skończony

Q – zbiór stanów

$q_0 \in Q$

S – zbiór kolorów sweterków (skończony)

$Z \in S$ – sweterek dna stosu

δ – relacja przejścia

gdzie $\delta \subseteq (Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times S) \times (Q \times S^*)$

oraz ma takie własności:

- $\delta(q, a, Z, q', w) \Rightarrow w = Zv$ gdzie v nie zawiera Z.

- $\delta(q, a, A, q', w) \wedge A \neq Z \Rightarrow w$ nie zawiera Z.

Wtedy $\hat{\delta} \subseteq \Sigma^* \times (Q \times S^*)$ jest najmniejsza relacja spełniająca:

- $\hat{\delta}(\varepsilon, q_0, Z)$
- $\hat{\delta}(w, q, VA) \wedge \delta(q, a, A, q', W)$
  $\Rightarrow \hat{\delta}(wa, q', VW) \quad (a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\})$.

Wtedy $L_A = \{w : \exists q\ \hat{\delta}(w, q, Z)\}$.

Przykład Palindromy parzyste:

$$\delta(q_1, B, A, q_1, AB)$$
$$\delta(q_1, \varepsilon, A, q_2, A)$$
$$\delta(q_2, A, A, q_2, \varepsilon)$$

Przykład Słowa w t. że $|w|_0 = |w|_1$.

Tw. Klasa języków bezkontekstowych jest równa klasie języków wyrażanych przez NPDA.

Uwaga (bardzo ważna) Klasy rozstrzygnane przez maszyny deterministyczne są zamknięte na dopełnienia.

Pytanie Czy w sformułowaniu tw. nie można zmienić NPDA na PDA:

$\{a^i b^i c^i : i \in \mathbb{N}\}$ nie jest CFL

ale dopełnienie jest.

Def. Zanim dd, wprowadzimy pojęcie postaci normalnej Greibach: CFG G jest w tej postaci gdy dla każdego $\langle A, w \rangle \in \Pi$ $w \in \Sigma N^*$.

Lemat Dla każdego L: CFL istnieje G w postaci normalnej Greibach t. że $L = L_G$

Dowód tw. "$\Rightarrow$" Weźmy CFL L oraz CFG G w postaci normalnej Greibach t. że $L = L_G$.

Zbudujemy NPDA $\langle \Sigma, Q, q_0, S, Z, \delta \rangle$ t. że $L = L_A$.

- Jeśli w Π jest produkcja $A \to a \underset{N^*}{w}$, to $\delta(q, a, A, q, w^R)$,
- $\delta(q_0, \varepsilon, Z, q, ZS)$,

gdzie $Q = \{q_0, q\}$, $S = N$