7.03.2022

WYRAŻENIA REGULARNE (nad Σ)

- $\emptyset$ jest wyrażeniem regularnym i $L_\emptyset = \emptyset$
- ε jest wyr. reg. i $L_\varepsilon = \{\varepsilon\}$
- jeśli $a \in \Sigma$ to a jest wyr. reg. oraz $L_a = \{a\}$
- jeśli φ, ψ są wyr. reg. to $\varphi + \psi$ jest wyrażeniem regularnym i $L_{\varphi+\psi} = L_\varphi \cup L_\psi$,
  $\varphi\psi$ jest wyrażeniem regularnym i $L_{\varphi\psi} = L_\varphi L_\psi = \{w_1 w_2 : w_1 \in L_\varphi, w_2 \in L_\psi\}$.

$$\left[\begin{array}{l} L_1 L_2 = \{w_1 w_2 : w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\} \\ L \subseteq \Sigma^*, \text{ wtedy } L^0 = L_\varepsilon, L^1 = L, L^{i+1} = L^i L \\ \qquad L^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n \end{array}\right]$$

- jeśli φ jest wyr. reg. to φ^* też jest oraz $L_{\varphi^*} = (L_\varphi)^*$

Przykład $\Sigma = \{0,1\}$, $0^*(10^*10^*)^*$

Tw. Niech $L \subseteq \Sigma^*$. Wtedy NWSR:

(1) L jest regularny, tj. istnieje DFA A t.że $L = L_A$.

(2) Istnieje wyrażenie regularne φ t.że $L = L_\varphi$.

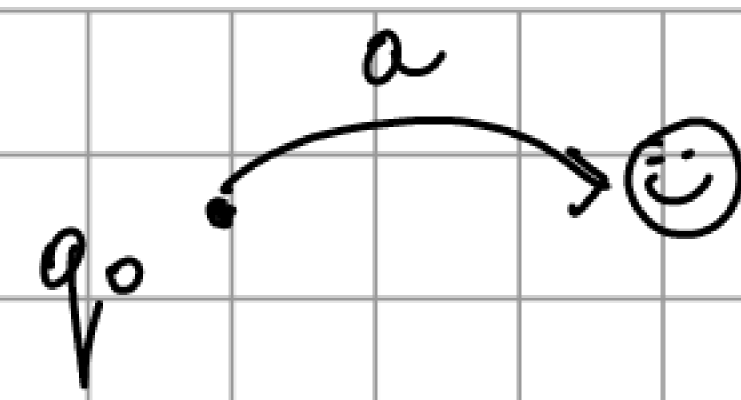
(3) Istnieje NFA z ε-przejściami A' t.że $L = L_{A'}$.

D-d. (3) $\Rightarrow$ (1) Było. ■

(2) $\Rightarrow$ (3) Indukcja względem długości wyrażenia. Każdy NFA który zbudujemy będzie miał jeden stan wejściowy niebędący akceptującym i jeden akceptujący.

- $\emptyset \rightsquigarrow$ $q_0 \bullet$ ☺
- $\varepsilon \rightsquigarrow$ $q_0 \bullet \xrightarrow{\varepsilon}$ ☺

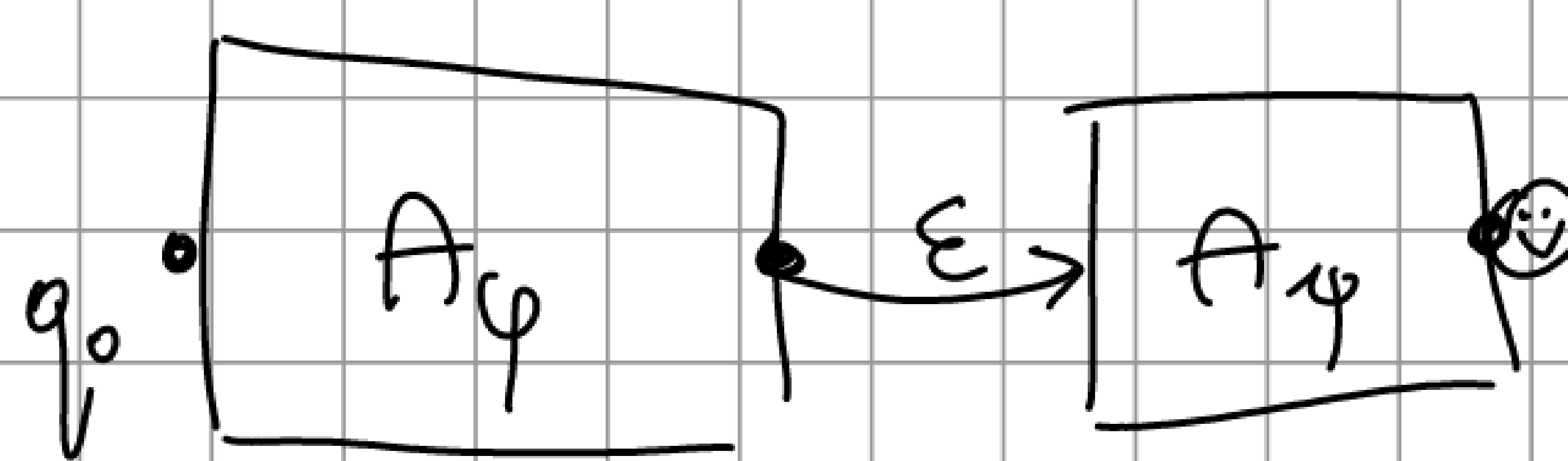
- $a \rightsquigarrow$



- $\varphi, \psi \rightsquigarrow$

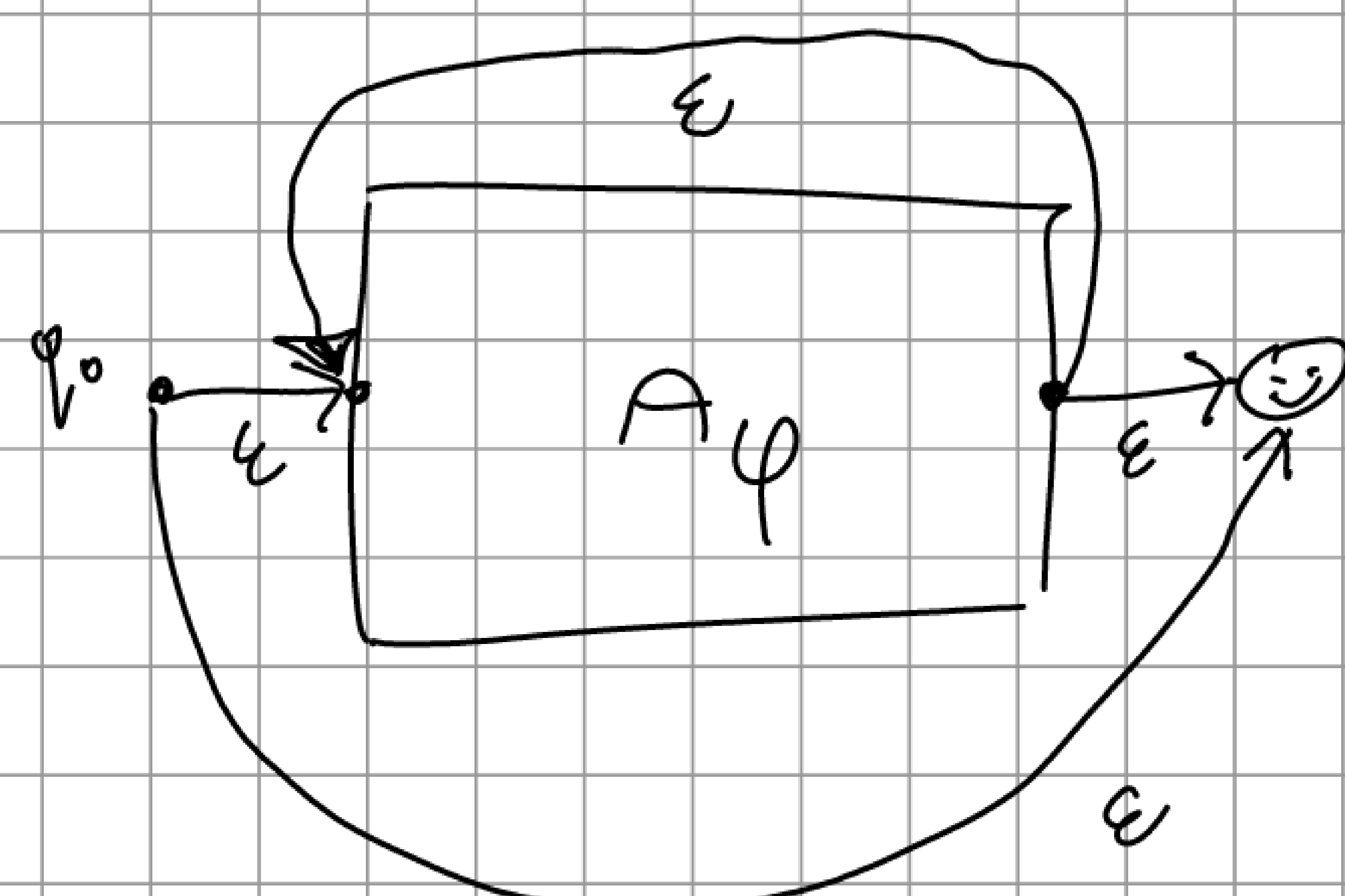
(automat dla $\varphi+\psi$)

- $\varphi, \psi \rightsquigarrow$



(Automat dla $\varphi\psi$)

- $\varphi \rightsquigarrow$



(Automat dla φ^*) ∎

(1) $\Longrightarrow$ (2) Mamy DFA $A=\langle \Sigma, Q, q_0, \delta, F\rangle$

$Q=\{q_1, \dots, q_n\}$ (gdzie $q_0=q_1$).

Dla $1\leq i,j\leq n, 0\leq k\leq n$ napiszemy wyrażenie regularne $\varphi^k_{i,j}$ wyrażające język niepusty oraz $\neq v$

$\{ w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q_i, w) = q_j \wedge$
$\forall v \in \Sigma^*$ (jeśli v jest właściwym prefiksem w oraz $\hat{\delta}(q_i, w) = q_L$, to $L < k$) $\}$

Po drodze z q_i do q_j chodzimy tylko po stanach o indeksach $< k$.

Indukcja względem k:

- $$\varphi^0_{i,i} = \varepsilon + \bigoplus_{\substack{a \in \Sigma \\ \delta(q_i, a) = q_i}} a$$ (Suma po literach spełniających warunek)

- $$\varphi^0_{i,j} = \bigoplus_{\substack{a \in \Sigma \\ \delta(q_i, a) = q_j}} a$$

- $$\varphi^{k+1}_{i,j} = \varphi^k_{i,j} + \varphi^k_{i,k+1} \left(\varphi^k_{k+1,k+1}\right)^* \varphi^k_{k+1,j}$$

Mając te wyrażenia regularne piszemy ψ t. że $L_A = L_\psi$:

$$\psi = \bigoplus_{q_i \in F} \varphi^n_{1,i}$$

■

UOGÓLNIENIA

Są dwa możliwe kierunki:

- słowa nieskończone
- drzewa

} można iść w obu tych kierunkach jednocześnie

Automat skończony na słowach nieskończonych.

$$\langle \Sigma, Q, q_0, \delta, \text{CO TUTAJ?} \rangle$$

Σ – skończony

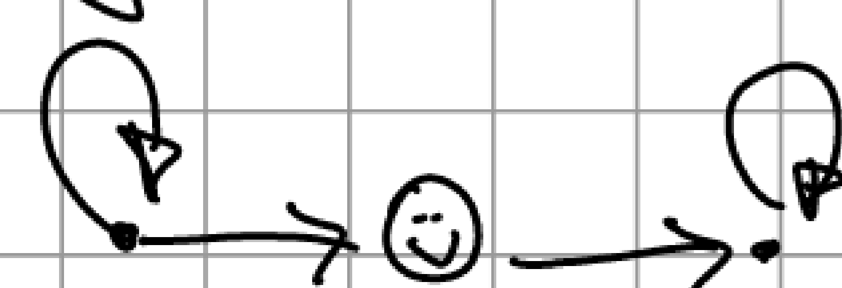
CO TUTAJ? – Dużo warunków akceptacji Büchiego, Rabina...

Interpretacja Büchiego: $F \subseteq Q$.

Słowo jest akceptowane, gdy automat nieskończenie wiele razy odwiedza stany z F.

Pytanie: czy deterministyczne automaty Büchiego robią to samo co niedeterministyczne?

Odpowiedź: nie w ten sposób co poprzednio. Przykład: $|\Sigma| = 1$,

NFA: 

Lepsza odpowiedź: L – zbiór słów nieskończonych nad $\Sigma = \{0,1\}$, w których jest tylko skończenie wiele zer.

L jest rozstrzygany przez 

Deterministycznym się nie da: ćwiczenie.