20.06.2022

Pokażemy, że PSPACE $\subsetneq$ EXPSPACE.
Wskażemy $L \in$ EXPSPACE \ PSPACE

Przypomnienie Każde $w \in \{0,1\}^*$ możemy czytać jako kod pewnej maszyny Turinga, którą będziemy nazywać M_w.

Przez g oznaczamy pewną niemalejącą funkcję $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ BARDZO POWOLI dążącą do ∞, np. $\log^*$ (ale $\log\log\log n$ chyba wystarczy).

Przez p_n oznaczamy wielomian $g(n)\left(1+x+x^2+\ldots+x^{g(n)}\right)$

Definiujemy maszynę ML:

- wczytaj w
- zaznacz obszar składający się z $p_{|w|}(|w|)$ komórek taśmy.

- w tym obszarze symuluj działanie $M_w(w)$.
  - Jeśli w trakcie działania M_w chce opuścić przydzielony obszar, to zaakceptuj.
  - Jeśli $M_w(w)$ akceptuje, to odrzuć
  - Jeśli $M_w(w)$ odrzuci lub się zapętla, to zaakceptuj

Pokażemy, że $L \notin PSPACE$

Zał. nie wprost, że $L \in PSPACE$. Wtedy istnieje M i wielomian q t.że M rozstrzyga L i działa w przestrzeni ograniczonej przez q.

Niech $n \in \mathbb{N}$ t.że $\forall m \in \mathbb{N}$ $p_n(m) \geqslant q(m)$.

Niech w będzie t.że $|w| \geqslant n$ i $M_w = M$

Czy $w \in L$?

- gdyby $w \in L$, to $ML(w)$ akceptuje, ponadto $p_n(|w|) > q(|w|)$, więc $M_w(w)$ nie opuści obszaru, więc musi odrzucić lub się zapętlać ↯

$w \in L \iff ML(w)$ akceptuje $\iff M_w(w)$ odrzuca
$\iff w \notin L$

Teraz pokażemy, że $L \in$ EXPSPACE.
Pokażemy, że ML działa w przestrzeni EXPSPACE. No ale to wystarczy pokazać, że $c \cdot p_{|w|}(|w|) \leq 2^{|w|}$

$$g(n) \cdot n^{g(n)} \leq 2^n \quad \Big| \log$$

$$\log(g(n)) + g(n) \cdot \log(n)$$

$$\leq g(n)(\log(n) + 1)$$

$$\leq \log^2(n) + \log(n) \leq n$$

No, coś tam, łatwo...