30.05.2022

O NIEROZSTRZYGALNOŚCI RACHUNKU PREDYKATÓW

$$\underbrace{\forall x \exists y \left(E(x,y) \wedge \ldots \wedge \ldots\right)}_{\text{formuła logiki I rzędu}}$$

Pytania:

a) czy jest spełnialna?

b) czy jest tautologią?

1) dopuszczamy dowolne struktury

2) tylko skończone formuły

2a) $\rightsquigarrow$ R.E.

2b) $\rightsquigarrow$ CO-R.E.

Przykład

$$\left(\exists x \forall z \neg E(z,x)\right) \wedge \left(\forall x \exists y \; E(x,y)\right) \wedge$$
$$\left(\forall x,y,y' \; E(y,x) \wedge E(y',x) \to y = y'\right)$$

$\uparrow$ Ma model nieskończony, nie ma skończonego.

<u>TW.</u> Problem 1b jest nierozstrzygalny

<u>D-d.</u> Pokażemy $MM \leq_{rek} TAUT\text{-}FOL$

problem stopu maszyny Minskiego

Dają nam maszynę M, ona ma stany Q_M, w tym q_0, q_F i δ_M.

Napiszemy formułę φ_M t. że φ_M jest tautologią $\iff$ M się zatrzymuje.

Będę miał 3 predykaty binarne E, P, D oraz tyle predykatów unarnych ile jest stanów w Q_M i może jeszcze jeden: Z.

φ_M będzie koniunkcją następujących formuł:

- $\forall x \exists y \left[\left(\bigvee_{R \in Q_M \setminus \{q_F\}} R(x) \right) \to E(x,y) \right]$
- $\exists x \exists z \quad Q_0(x) \wedge P(x,z) \wedge D(x,z) \wedge Z(z)$
- $\exists z \forall t \quad Z(z) \wedge \neg P(z,t) \wedge \neg D(z,t)$
  $\wedge \ (Z(t) \to t = z)$

• Dla każdej instrukcji z J_M dajemy formułę. Np. jeżeli J_M ma instrukcję postaci $\langle Q, Z, NZ; Q', +1, -1\rangle$, to dodajemy formułę:

$$\forall x, y, t, t', t''\, \exists r \Big[\big(Q(x) \wedge P(x,t) \wedge D(x,t') \wedge Z(t) \wedge \neg Z(t') \wedge D(t',t'')\big) \longrightarrow \big(Q'(y) \wedge D(y,t'') \wedge P(y,r) \wedge P(r,t)\big) \Big]$$

<u>Lemat</u> Jeśli po n krokach obliczeń M jest w konfiguracji $\langle Q, m, m'\rangle$ i struktura S spełnia φ_M, to istnieje w niej wierzchołek x t.że $Q(x)$ i z x jest P-ścieżka do Z dł. m i D-ścieżka długości m'.

Teraz konstruujemy ψ_M.

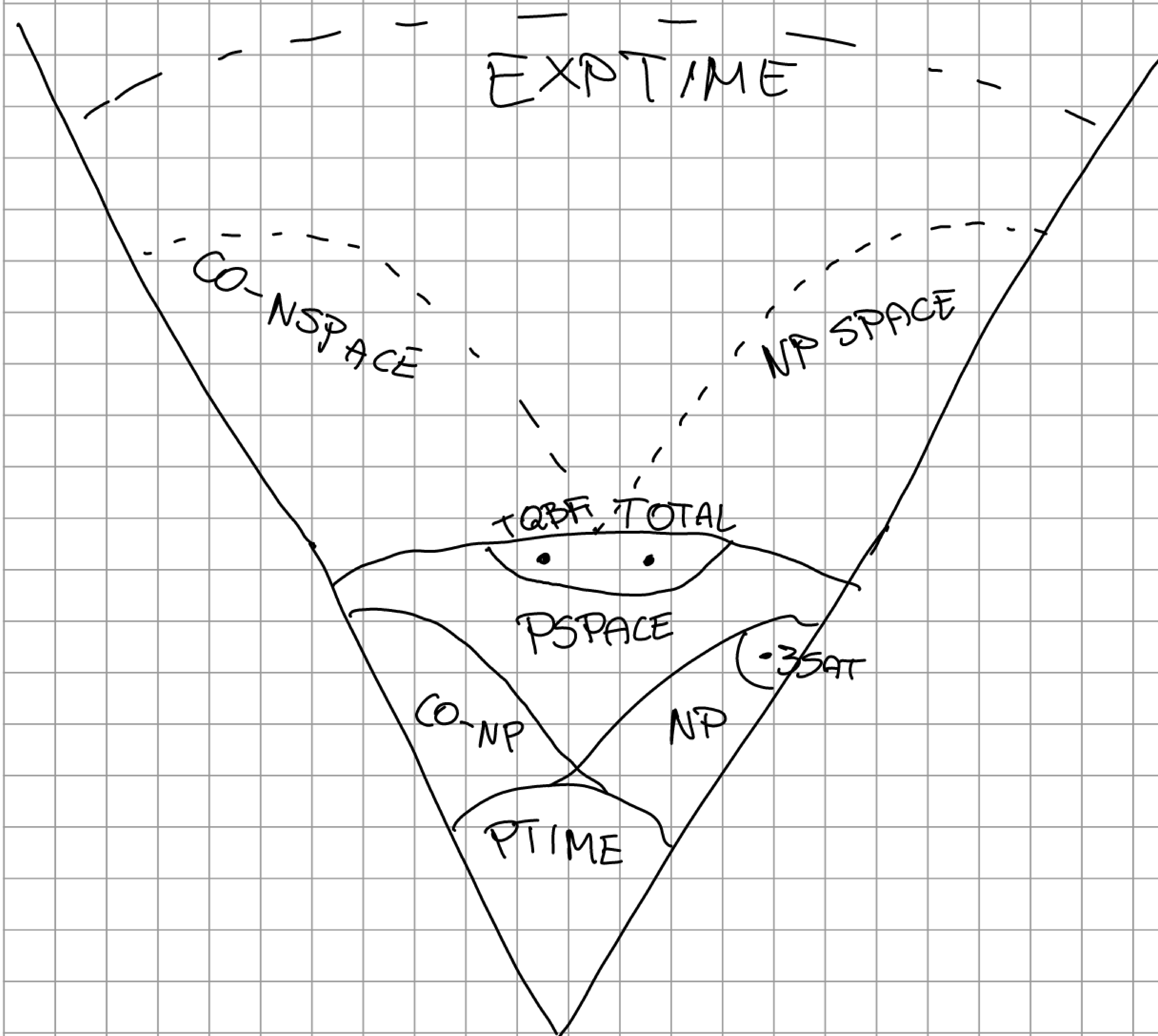
$$\varphi_M \longrightarrow \exists x\, Q_F(x)$$

KLASA PSPACE

Def $A \in$ PSPACE, gdy A daje się rozstrzygać przy pomocy Maszyny Turinga z wielomianową pamięcią.

Obserwacja
- PTIME $\subseteq$ PSPACE
- NP $\subseteq$ PSPACE
- CO-NP $\subseteq$ PSPACE (PSPACE jest zamknięty na dopełnienia)

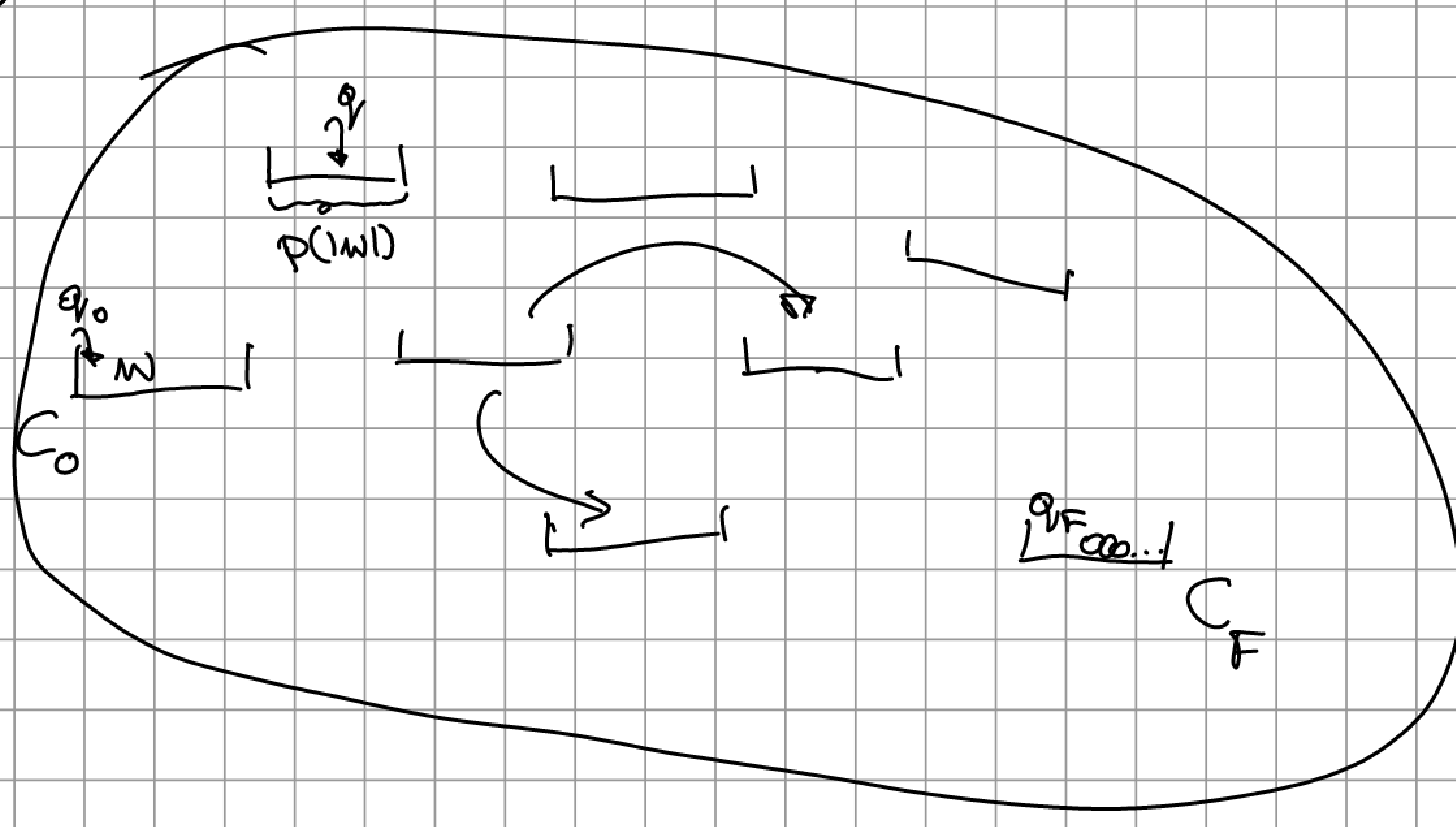
Nie umiemy udowodnić NIC. Nawet nie umiemy powiedzieć, czy PTIME $\neq$ PSPACE.



Tw. PSPACE = NPSPACE

Dają nam niedeterministyczną MT M i wielomian $p(x)$ t. że dla każdego wejścia w maszyna M na każdej "ścieżce obliczeń" brudzi $\leq p(|w|)$.

Mamy skonstruować deterministyczny algorytm zużywający wielomianowo dużo pamięci rozstrzygający czy M akceptuje dane wejście.
(BSO M zanim się zatrzyma "zeruje" taśmę i wraca nad α)
M ma zbiór stanów Q t.że $|Q|=k$ i 5 symboli taśmowych. Jesteśmy teraz tym wielomianowym algorytmem. Dają nam słowo w. Wyobrażamy sobie graf konfiguracji M dla w.



Chcemy się dowiedzieć czy istnieje ścieżka z C_0 do C_F.

W tym grafie jest $5^{p(|w|)} \cdot |Q| \cdot p(|w|) \leq$
$\leq 8^{p(|w|)} = 2^{3p(|w|)}$

jakiś stan

gdzie jest głowica

Procedura$_i$ odpowie czy dla danych dwóch wierzchołków s, t grafu istnieje ścieżka z s do t dł. $\leq 2^i$

Procedura$_0$ – sprawdza czy jest krawędź

Procedura$_{i+1}$ – dla każdego x

– sprawdź czy Procedura$_i(s, x)$, jeśli tak, to posprzątaj i sprawdź Procedura$_i(x, t)$

Teraz uruchamiam Procedura$_{3p(|w|)}(C_0, C_F)$ i zwróć wynik.

Pamięci użyje $\sim 10\, p^2(|w|)$ $\blacksquare$