23.05.2022

KLASA NP I TWIERDZENIE COOKA

wielomianową

Rozważamy niedeterministyczną maszynę Turinga.

Teraz $\delta \subseteq (\Sigma \times Q) \times (\Sigma \times Q \times \{L, R\})$

"Wielomianowość" oznacza, że maszyna przychodzi z wielomianem p oraz gwarantuje, że jeżeli istnieje ścieżka akceptująca dla słowa w, to istnieje ścieżka akceptująca długości $p(|w|)$.

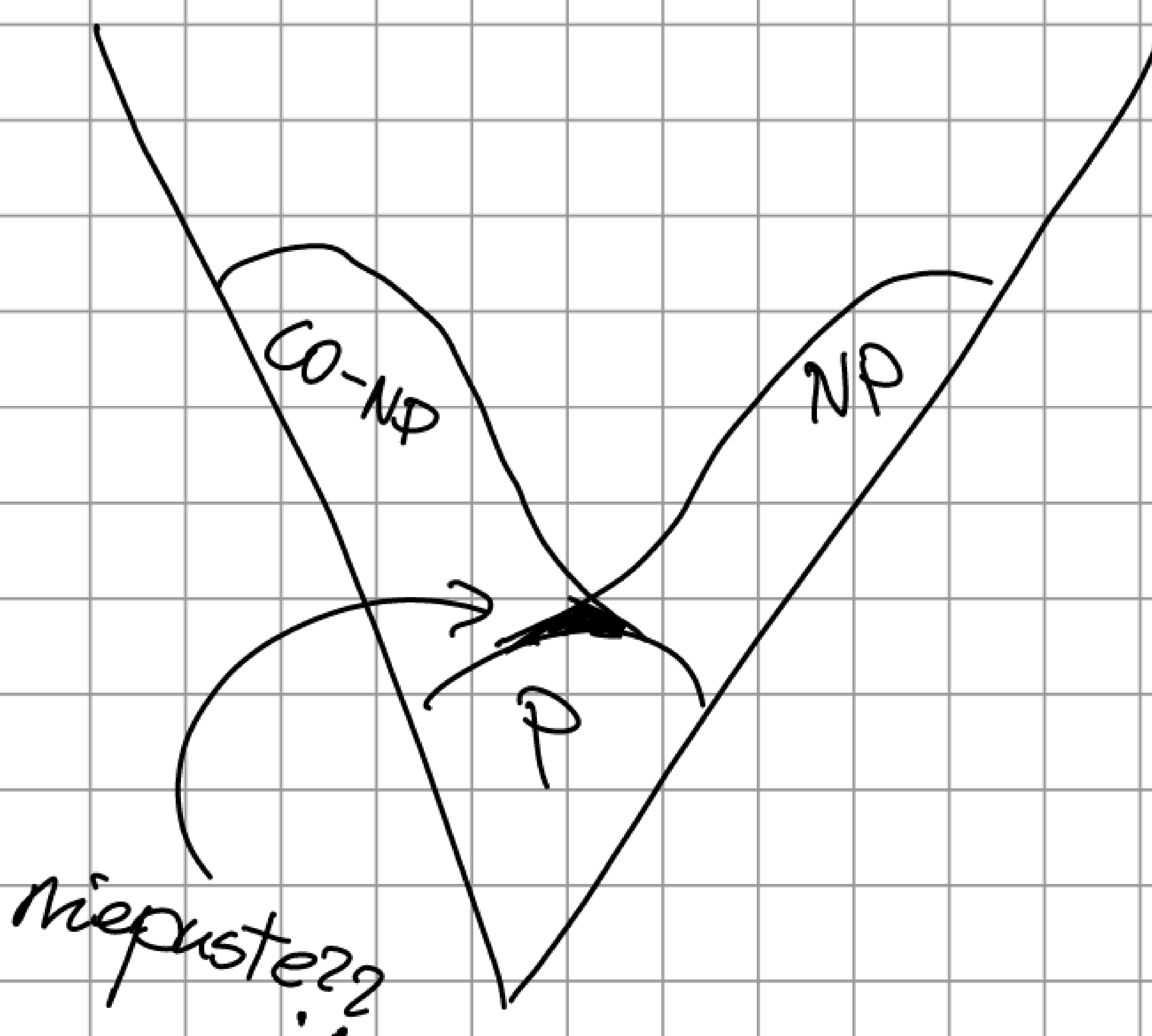
Def $A \in \mathbf{NP}$ gdy istnieje niedeterministyczna wielomianowa maszyna Turinga rozstrzygająca A.

Przykład $3COL \in NP$. Można zgadywać kolory wierzchołków i sprawdzić, czy jest poprawne.

MICHAŁ TO PAŁA

Obserwacja $A \leq_p B \wedge B \in NP \Rightarrow A \in NP$

Przykład Sprawdzenie czy formuła zdaniowa jest tautologią jest CO-NP

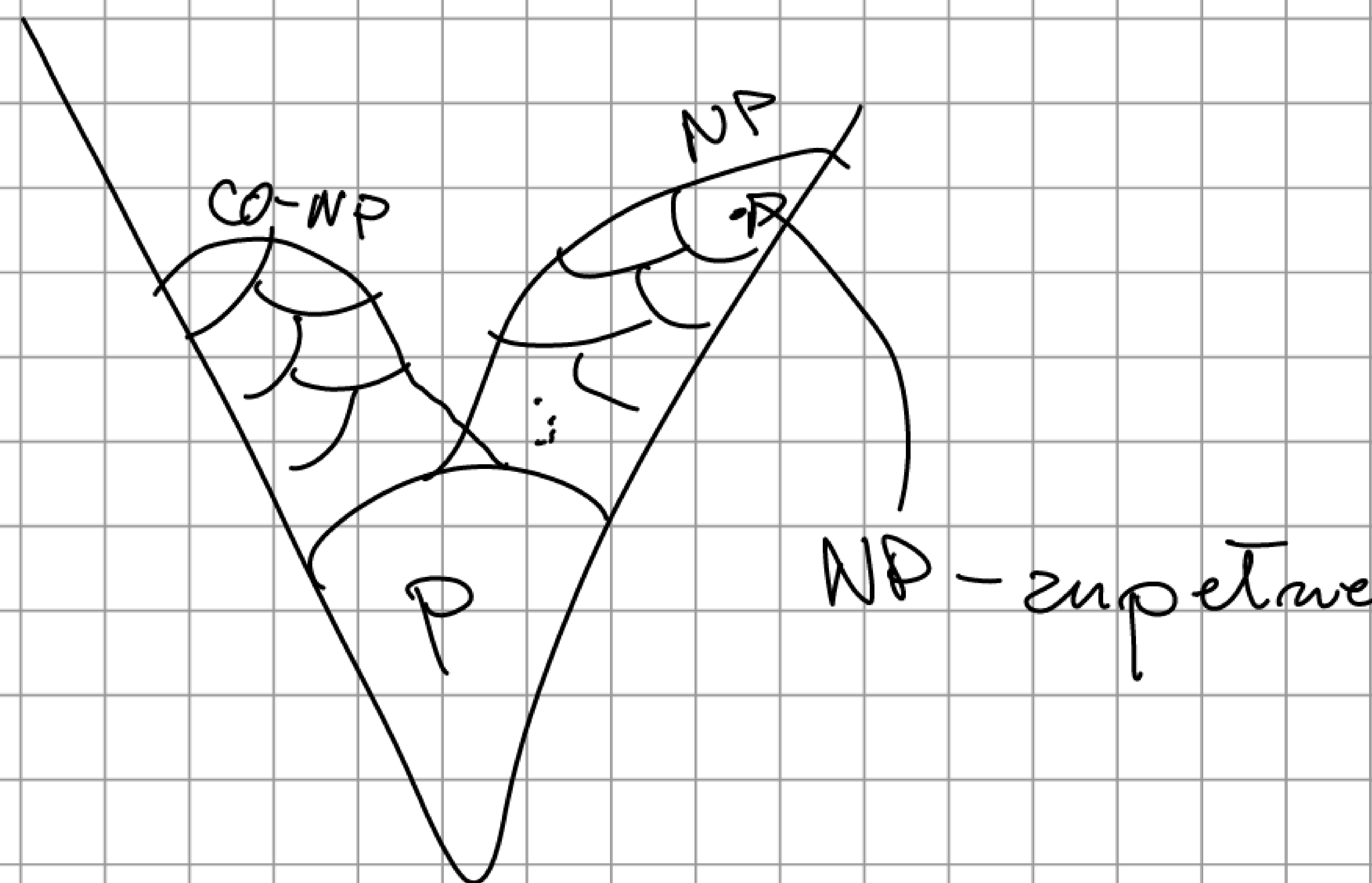


Nie wiemy, czy $P = NP$ (ludzie raczej myślą, że $NP \neq P$)

Nie wiemy, czy $NP \cap CO\text{-}NP = P$ (nawet, jeśli założymy, że $P \neq NP$)

Od teraz zakładamy, że $P \neq NP$.

Wtedy w NP są "bariki":



Def. A jest **NP-trudny** jeżeli dla każdego $B \in NP$ $B \leq_p A$.

A jest **NP-zupełny** gdy $A \in NP$ oraz A jest NP-trudny.

Obserwacja "NP to rzut P na pierwszą oś".

Dokładniej: $\forall A \in NP \; \exists B \in P \; \exists p(x)$

$$A = \{ x : \exists y \left(|y| \leq p(|x|) \wedge [x,y] \in B \right) \}$$

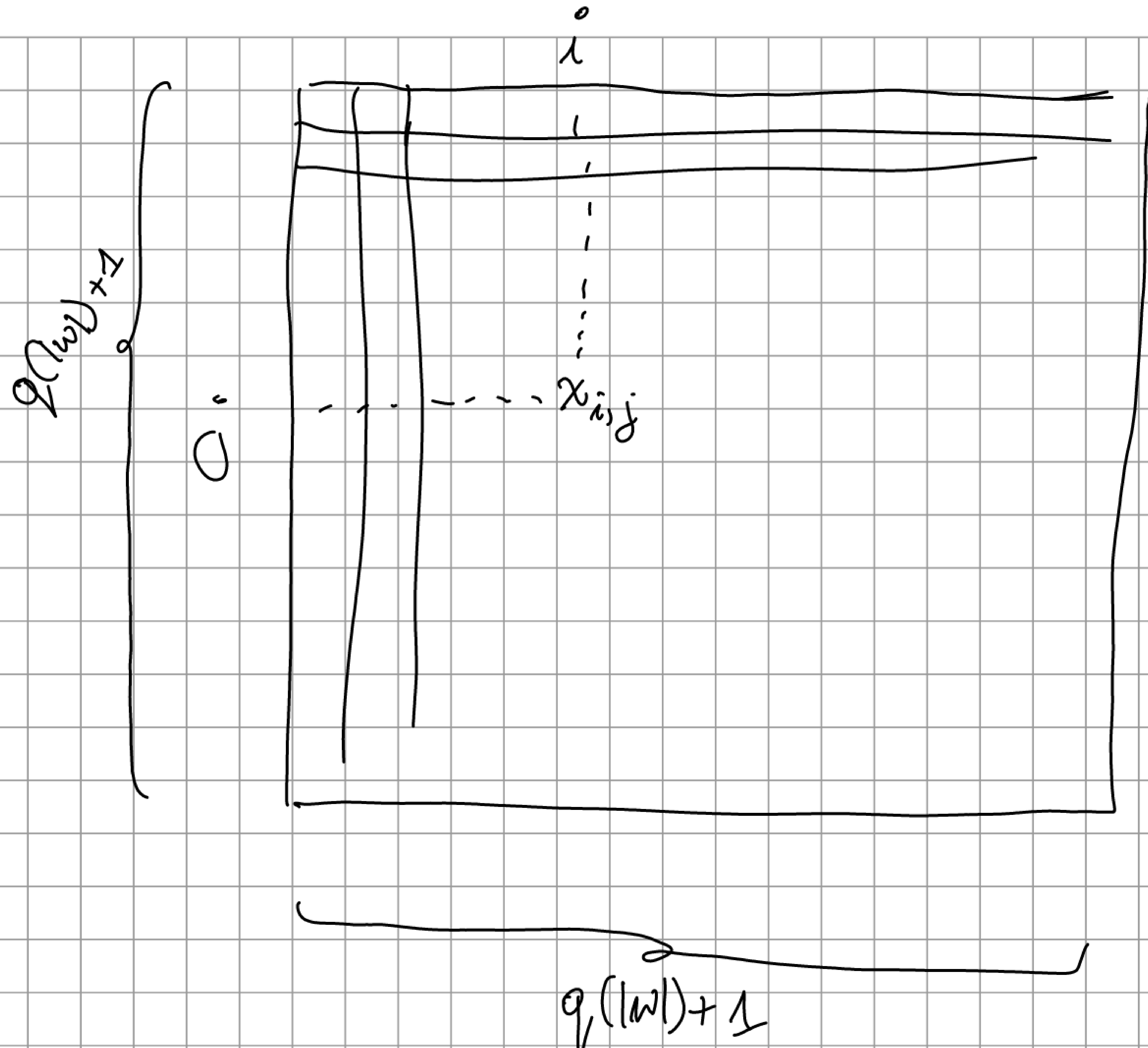
Tw (Cooka) 3SAT jest NP-zupełny.

D-d. Niech $A \in NP$. Istnieją wielomiany p, q oraz deterministyczna MT M_B działająca w czasie $q(|w|)$ t. że $\quad *(w)$

$$\forall w \; w \in A \Leftrightarrow \overbrace{\exists y\big(|y| \leq p(|w|) \wedge M_B(w,y) \text{ akceptuje}\big)}^{*(w)}$$

Konstrukcja redukcji $A \leq_p 3SAT$:

- dając w: instancję problemu A. Mam szybko zwrócić formułę $\varphi_w \in 3CNF$ t. że
$$*(w) \Leftrightarrow \varphi_w \in 3SAT$$
- W każdym polu i,j poniższej tabelki mieszkają zmienne $\alpha_{i,j}$, $\omega_{i,j}$, $0_{i,j}$, $1_{i,j}$, $B_{i,j}$ oraz $\forall q \in Q_{M_B}$ zmienna $q_{i,j}$ oraz $L_{i,j}$, $R_{i,j}$
- Piszemy formułę $Conf(i)$ będzie koniunkcją mnóstwa klauzul:
  - dla $\beta \neq \gamma \in \Sigma$ oraz dla $0 \leq j \leq q(|w|)$ w $Conf(i)$ będzie klauzula $(\neg\beta_{i,j} \vee \neg\gamma_{i,j})$
  - dla każdego $0 \leq j \leq q(|w|)$ i każdych $\beta \neq \gamma \in Q_{M_B} \cup \{L, R\}$ w $Conf(i)$ będzie $(\neg\beta_{i,j} \vee \neg\gamma_{i,j})$



– dla każdego j oraz $q \in Q_{M_B}$ w $Conf(i)$ będą klauzule

$L_{i,j} \to L_{i,j-1}$, $R_{i,j} \to R_{i,j+1}$, $\left(a \to b \Leftrightarrow \neg a \vee b\right)$

$q_{i,j} \to R_{i,j+1}$, $q_{i,j} \to L_{i,j-1}$

- Formuła Pierwszy(i) składa się z klauzul $q^0_{i,0}$, $\alpha_{i,0}$, dla każdego $1 \leq j \leq |w|$ $\underbrace{w[j]}_{0 \text{ albo } 1}{}_{i,j}$, $\omega_{i,|w|+1}$,

dla każdego $|w|+2 \leq j \leq |w|+1+p(|w|)$ $(0_{i,j} \vee 1_{i,j})$, dla każdego $|w|+1+p(|w|) < j \leq q(|w|)$ $B_{i,j}$

- Formuła Ostatni(i) składa się z klauzuli $q^F_{i,0}$
- Formuła Krok(i) składa się z klauzul:
  - dla każdego j, każdego $\beta \in \Sigma$ mamy klauzulę $L_{i,j} \wedge \beta_{i,j} \to \beta_{i+1,j}$, $R_{i,j} \wedge \beta_{i,j} \to \beta_{i+1,j}$
  - dla każdej instrukcji w δ_{M_B} postaci $\langle q, \beta; q', \beta', L' \rangle$ i dla każdego j

$q_{i,j} \wedge \beta_{i,j} \to \beta'_{i+1,j} \wedge q'_{i+1,j-1}$

– analogicznie dla instrukcji w prawo

- Wtedy $\varphi_w = \bigwedge_i \mathrm{Conf}(i) \wedge \mathrm{Pierwszy}(0) \wedge \mathrm{Ostatni}(q(|w|)) \wedge \bigwedge_i \mathrm{Krok}(i)$

$\blacksquare$