6.10.2021

Formalizacja matematyki: struktury, języki, spełnianie.

Uproszczony model rzeczywistości matematycznej:

struktura (I rzędu)

Def. 1.1 $\mathcal{M} = (A, f_1, f_2, \dots, f_k, P_1, \dots, P_n, c_1, \dots, c_l)$

model, struktura

A – zbiór $\neq \emptyset$, uniwersum struktury $\mathcal{M}$

"arność" n_i

$f_1, \dots, f_k$ – funkcje, $f_i : A^{n_i} \longrightarrow A$

$P_1, \dots, P_k$ – predykaty w A (relacje), $P_i \subseteq A^{m_i}$

$c_1, \dots, c_l$ – stałe, $c_i \in A$

Przykłady

- gdy $n = 0$, $\mathcal{M}$ nazywamy strukturą algebraiczną (grupy, ciała)
- V, rodzina zbiorów, $(V, \in)$

$\in$ – relacja binarna

Zdania o $\mathcal{M}$:

w pewnym języku: f_i, P_j, c_t to symbole oznaczające funkcje, relacje, stałe.

Odróżnienie między symbolem, a jego znaczeniem.

$\underline{f}_i, \underline{P}_j, \underline{c}_l$ ← te dolne kreski mają zaznaczać, że mamy na myśli **symbol**,

f_i, P_j, c_l ← ich znaczenia w strukturze $\mathcal{M}$

<u>Def. 1.2</u> **Język** L (struktury $\mathcal{M}$) $= \{\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_k, \underline{P}_1, \dots, \underline{P}_n, \underline{c}_1, \dots, \underline{c}_t\}$ wraz z arnościami tych funkcji i relacji

Inaczej: typ podobieństwa struktury $\mathcal{M}$, sygnatura $\mathcal{M}$

f_i, P_j, c_l to **interpretacje** $\underline{f}_i, \underline{P}_j, \underline{c}_l$

Mówimy, że $\mathcal{M}$ jest **modelem** dla L.

Def. 1.3 M: **model** dla L

$$(M, f_1^M, \ldots, f_k^M, \underline{P}_1^M, \ldots, \underline{P}_n^M, \underline{c}_1^M, \ldots, \underline{c}_t^M)$$

uniwersum (oznaczane też $|M|$) funkcje relacje stałe w M, interpretacje symboli $f_i, \underline{P}_j, \underline{c}_l$ odpowiednich arności

Jak mówić w L? Do tego służą:

- symbole języka,
- symbole logiczne: $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$, $\forall, \exists, x_i \ (i \in \mathbb{N})$ zmienne
- symbol równości: $=$
- symbole pomocnicze (nawiasy, przecinki..)

$\Rightarrow, \Leftarrow$ to META SYMBOLE

Def. 1.4 Wyrażenia języka L:

1. wyrażenia nazwowe (**termy**): zbiór termów T_L języka L, def. rekurencyjna.
   - zmienna, symbol stałej $\in T_L$ (termy **atomowe**)

- $\tau_1, \dots, \tau_n \in \mathcal{T}_\mathcal{L}$, f: symbol funkcji z L, n-arny

wtedy $f(\underset{\uparrow}{\tau_1}, \dots, \tau_n) \in \mathcal{T}_\mathcal{L}$

term **złożony**

term **stały** := term bez zmiennych

2. formuły języka L: $\mathcal{F}_\mathcal{L}$

formuły atomowe

- $(\tau_1 = \tau_2) \in \mathcal{F}_\mathcal{L}$

termy

- P_j – n-arny symbol relacyjny

$P_j(\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathcal{F}_\mathcal{L}$

formuły złożone

- $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_\mathcal{L} \Rightarrow (\neg\varphi), (\varphi \wedge \psi) \in \mathcal{F}_\mathcal{L}$
- v : zmienna, $\varphi \in \mathcal{F}_\mathcal{L}$, wtedy

$\underbrace{\exists v\, \varphi}$, $\forall v\, \varphi \in \mathcal{F}_\mathcal{L}$

"zasięg" $\exists v$ w $\exists v \varphi$

Przykład

$$\forall x\, \exists y\, (x \in y \wedge \forall x (x \in y \Rightarrow x = y))$$

w $\mathcal{L} = \{\in\}$ (binarny symbol rel.)

Def. 1.5 Niech $\varphi \in F_L$, v: zmienna występująca w φ.

- Jeśli to wystąpienie v w φ jest w zasięgu pewnego kwantyfikatora Q w v, to spośród wszystkich takich wystąpień Qv w φ, w których v jest zasięgu, wybieramy to najbardziej na prawo i mówimy, że to Qv **wiąże** to wystąpienie v w φ.
- Jeżeli takiego Qv nie ma, to mówimy, że v w φ jest **wolne**.
- v jest **wolne** w φ, gdy istnieje jej wolne wystąpienie

Konwencja: zapis $\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n)$ oznacza, że wszystkie zmienne wolne w φ są wśród $v_1, \dots, v_n$.

Def. 1.6 **Zdaniem** w L nazywamy formułę bez zmiennych wolnych.

Co to znaczy, że formuła jest prawdziwa w strukturze M dla L?

(św. Tomasz: prawdziwy sąd to taki, który jest zgodny z rzeczywistością)

<u>Def.</u> 1.7 Model M dla L.

$$\left(M, f_1^M, \ldots \underline{P}_1^M \ldots \underline{c}_1^M \right) \qquad \{ f_1 \ldots f_k, \underline{P}_1, \ldots, \underline{P}_m, \underline{c}_1 \ldots \underline{c}_t \}$$

Niech $A = \{ \underline{a} : a \in M \}$, zbiór NOWYCH symboli stałych.

Tworzymy nowy język $L(M) = L \cup A$. Interpretacje termów stałych σ w $L(M)$ w M:

- gdy $\tau = \underline{c}_i \rightsquigarrow \tau^M = \underline{c}_i^M$

meta-symbol

- gdy $\tau = \underline{a} \rightsquigarrow \tau^M = a$, $a \in M$

termy atomowe

- gdy $\tau = f_i(\tau_1, \ldots, \tau_n)$

$$\tau^M = f_i^M(\tau_1^M, \ldots, \tau_n^M)$$

Def. 1.8 **Spełnienie** zdań φ języka $L(M)$ w M:

$M \models \varphi$: "φ jest **prawdziwe** w M"
spełnione

1. Zdania atomowe

meta symbol

- $M \models \tau_1 = \tau_2 \iff \tau_1^M = \tau_2^M$
- $M \models P_j(\tau_1, \dots \tau_n) \iff \langle \tau_1^M, \dots, \tau_n^M \rangle \in P_j^M$

2. Zdanie złożone

- $M \models \varphi \wedge \psi \iff M \models \varphi$ oraz $M \models \psi$
- $M \models \neg \varphi \iff$ nieprawda, że $M \models \varphi$.
- $M \models \exists v\, \varphi \iff$ istnieje $a \in M$ t.że $M \models \varphi(\underline{a})$, gdzie $\varphi(\underline{a})$ powstaje z φ przez zastąpienie każdego wolnego v przez symbol $\underline{a}$.

Def. 1.9 Jeżeli zdanie φ nie jest prawdziwe w M, to mówimy, że jest **fałszywe** w M.

Konwencja: spełnienie w M formuły $\varphi(x_1, \dots, x_n)$:
$\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ spełnia $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, gdy
$$M \models \varphi(\underline{a}_1, \dots \underline{a}_n)$$

Def. 1.10 **Uniwersalne domknięcie** formuły φ: $\overline{\varphi} = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \varphi$

Mówimy, że $M \models \varphi \iff M \models \overline{\varphi}$

[to znamy dobrze, np. kiedy mówimy o łączności działania w grupie, to zwykle piszemy $(xy)z = x(yz)$, a nie $\forall x \forall y \forall z \, ((xy)z = x(yz))$.]

11.10.2021

Def. 2.1 $\varphi \in \mathcal{F}_L$ jest **tautologią** (Klasycznego rachunku Logicznego), gdy $\forall M$ (model dla L) $M \models \varphi$.

Piszemy $\models \varphi$.

Jak rozpoznać, że $\models \varphi$? NIEROZSTRZYGALNE

Niekiedy jest łatwo, np. $x = x$,

„=" jest relacją równoważności"

Def. 2.2 Formuły zdaniowe:

Z: zbiór zmiennych zdaniowych

$\mathcal{O}$ $\leadsto$ S – zbiór formuł zdaniowych nad Z.

Definicja rekurencyjna:

- $v \in Z \implies v \in S$
- $\alpha, \beta \in S \implies \neg\alpha, (\alpha \wedge \beta) \in S$

„Jak to wszystko sprecyzować, to może humaniści by stracili pracę"

NIE MÓWIĆ „TAUTOLOGIA TO ZDANIE ZAWSZE PRAWDZIWE"

Potocznie tautologia to zdanie, którego prawdziwość wynika z jego struktury.

Def. 2.3 **Wartościowanie logiczne**: dowolna funkcja $v : S \to \{0, 1\}$ t. że $v(\neg\alpha) = 1 - v(\alpha)$,

$v(\alpha \wedge \beta) = \min\{v(\alpha), v(\beta)\}$ dla dowolnych $\alpha, \beta \in S$.

Def. 2.4 $\alpha \in S$ jest **tautologią** klasycznego rachunku zdań, gdy

$\underset{\text{wartościowanie}}{\forall v : S \to \{0, 1\}}$ $v(\alpha) = 1$ $(\models \alpha)$

Przykład. $\models \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ dla każdego $v \in S$.

Istnieje algorytm rozstrzygający, czy $\models \alpha$.

Def. 2.5 Zał. że $\underset{\alpha(p_1, \dots, p_n)}{\alpha \in S}$ jest zbudowana ze zmiennych zdaniowych $p_1, \dots, p_n$ oraz spójników logicznych. Niech $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in F_L$. Zał., że $\varphi \in F_L$ powstaje z α przez podstawienie wszędzie φ_i za p_i. Mówimy wtedy, że φ jest **przykładem** formuły α.

Tw. 2.6 Jeśli $\models \alpha$ oraz φ: przykład α, to $\models \varphi$.

Ćw.

Def. 2.7 **Reguły wnioskowania:**

$$\frac{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}{\varphi}$$ ← przesłanki (premises)

← konkluzja, teza $\varphi_i, \varphi \in F_L$

Podobnie $\frac{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}{\alpha}$, $\alpha_i, \alpha \in S$.

Def. 2.8 Reguła $\frac{\varphi_1 \ldots \varphi_n}{\varphi}$ jest **poprawna** (sound),

gdy $\forall M$ dla L $(M \models \varphi_1, \ldots, M \models \varphi_n \Rightarrow M \models \varphi)$.

Dla formuł zdaniowych reguła $\frac{\alpha_1 \ldots \alpha_n}{\alpha}$

jest poprawna, gdy

$$\forall v: S \to \{0,1\} \ \left(v(\alpha_1) = \ldots = v(\alpha_n) = 1 \Rightarrow v(\alpha) = 1\right)$$

Przykłady

- modus ponens (reguła odrywania) cut rule $\quad \frac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta}, \quad \frac{\varphi, \varphi \to \psi}{\psi}$

- reguła generalizacji $\dfrac{\varphi}{\forall v\, \varphi}$ v: zmienna

$\forall$ - rule ("A" rule)

Aksjomatyczne ujęcie KRL

A0. przykłady tautologii KRZ

A1. $[\forall v(\varphi \to \psi)] \to (\varphi \to \forall v\, \psi)$ (gdy v nie jest zm. wolną φ)

A2. $\forall v\, \varphi \longrightarrow \varphi(v/t)$

pod warunkiem, że żadne z takich wystąpień v w φ nie jest w zasięgu kwantyfikatora wiążącego jakąś zmienną w t

[tu: $t \in J_L$, którego podstawiamy w φ za każde wolne wystąpienie zmiennej v]

Istotne zastrzeżenie:

$\varphi: \exists y\ x \neq y$, $t = y$, $\varphi(x/t): \exists y\ y \neq y$

$\exists y(x \neq y) \to \exists y(y \neq y)$ nie jest tautologią.

Aksjomaty równości $\left(\begin{array}{l} v, v_1, v_2 \text{ - zmienne} \\ t \text{ - term} \\ \varphi \text{ - formuła} \end{array} \right)$

- $v = v$
- $v_1 = v_2 \longrightarrow t(\dots v_1 \dots) = t(\dots v_2 \dots)$
- $v_1 = v_2 \longrightarrow \left(\varphi(\dots v_1 \dots) \to \varphi(\dots {}^{v_1}\!/_{v_2} \dots)\right)$

Pod warunkiem, że to (wolne) wystąpienie v_1 pod które podstawiamy v_2 nie jest w zasięgu kwantyfikatora wiążącego v_2.

<u>Def. 2.9</u> Zał. że $X \subseteq \mathcal{F}_L$, $\varphi \in \mathcal{F}_L$. Mówimy, że

$X \vdash \varphi \overset{\text{def.}}{\iff}$ istnieje ciąg formuł

„dowodzi"

$\underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_n}_{\text{dowód formalny}} = \varphi$ t. że $\forall i \leq n$:

1° $\alpha_i \in X$ lub α_i jest aksjomatem KRL

2° α_i wynika z $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}\}$ na mocy modus ponens lub $\forall$-reguły, tzn.

$\exists j, t < i \quad \alpha_t = (\alpha_j \to \alpha_i)$

(wtedy $\dfrac{\alpha_j, \alpha_t}{\alpha_i}$ przykład MP)

lub $\exists j < i \quad \alpha_i = \forall v \alpha_j$

Def. 2.10 $\vdash \varphi$, gdy $\emptyset \vdash \varphi$.

(φ jest tezą KRL)

Uwaga: $X \vdash \varphi \iff \exists X_0 \subseteq X \;\; X_0 \vdash \varphi$

skończone

Przykład $\vdash \underbrace{\forall x \varphi \to \exists x \varphi}$

$$\beta : \forall x \varphi \to \neg \forall x \neg \varphi$$

Gdyby struktura była pusta, to nie działa. Czemu?

$$\alpha_1 : \forall x \varphi \to \varphi(^x/_y)$$

$$\alpha_2 : \forall x \neg \varphi \to \neg \varphi(^x/_y)$$

tu y : zmienna spoza φ

$$\alpha_3 : \alpha_2 \to \left(\varphi(^x/_y) \to \neg \forall x \neg \varphi(x)\right)$$ AO, prawo transpozycji

$$\alpha_4 : \varphi(^x/_y) \to \neg \forall x \neg \varphi(x)$$ MP, α_2, α_3

$$\alpha_5 : \alpha_1 \to (\alpha_4 \to \beta)$$ [AO] $((\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)))$

$$\alpha_6 : \beta \quad (2 \times MP, \alpha_1, \alpha_4, \alpha_5)$$

Uwaga $\vdash \varphi \Rightarrow \models \varphi$, tzn. KRL jest poprawny (sound)

TW. 2.11 (Gödla o pełności KRL)
completeness theorem

$$\models \varphi \Rightarrow \vdash \varphi$$

<u>Def. 2.12</u> $X \subseteq \mathcal{F}_L$. $Cn(X) = \{\varphi \in \mathcal{F}_L : X \vdash \varphi\}$.
konsekwencje

X jest **teorią**, gdy $X = Cn(X)$.

<u>Fakt 2.13</u> $\varphi \vdash \overline{\varphi}$ i $\overline{\varphi} \vdash \varphi$

<u>d-d</u> $\forall$-reguła

$\boxed{\vdash \overline{\varphi} \to \varphi}$

<u>Def. 2.14</u> $X, \Psi \subseteq \mathcal{F}_L$ są **równoważne**, gdy

$$Cn(X) = Cn(\Psi)$$

<u>Wniosek 2.15</u> X i $\{\overline{\varphi} : \varphi \in X\}$ są równoważne.

<u>Def. 2.16</u> X jest **sprzeczny**, gdy istnieje zdanie φ t. że $X \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$. W przeciwnym razie mówimy, że X jest **niesprzeczny**

<u>Def. 2.17</u> (1) $M \models X \iff \forall \varphi \in X \; M \models \varphi$
M jest modelem X

(2) X jest **zupełny** $\iff$ $\forall$ zdania φ ($X \vdash \varphi$ lub $X \vdash \neg\varphi$)

(3) X jest **rozstrzygalny** $\iff$ istnieje algorytm rozstrzygający, czy $X \vdash \varphi$ dla $\varphi \in \mathcal{F}_L$

Przykład (1) $Th(M) = \{\varphi \in \mathcal{F}_L : M \models \varphi\}$: niesprzeczna, zupełna
(teoria str. M)

(2) $\emptyset$ jest niesprzeczny

TW. 2.18 (Gödel, o istnieniu modelu) Jeżeli S jest niesprzecznym zbiorem zdań, to S ma model (mocy $\leq \aleph_0 + |S|$)

12.10.2021

D-d. Tw. Gödla o modelu (Leon Henkin) gdy L i S przeliczalne.

Niech $L' = L \cup \{c_n : n < \omega\}$ (zbiór nowych symboli stałych)

Niech $\{\varphi_n(x) : n < \omega\}$: numeracja formuł z $F_{L'}$ ze zmienną wolną x.

Pomocnicza funkcja $f : \omega \to \omega$ rosnąca i t. że $c_{f(n)}$ nie występuje w formułach $\varphi_0(x), \ldots, \varphi_n(x)$ dla $n = 0, 1, \ldots$

Niech $S_n = S \cup \{\underbrace{\exists x\, \varphi_i(x) \longrightarrow \varphi_i(c_{f(i)})}_{\text{Aksjomat Henkina}} : i < n\}$

$S = S_0 \subseteq S_1 \subseteq S_2 \subseteq \ldots$

Niech $S_\omega = \bigcup_n S_n$.

Fakt S_ω jest niesprzeczny.

D-d. nie wprost

Skoro S_ω sprzeczne, to pewne S_n sprzeczne.

Niech n to najmniejsze takie że S_{n+1} spr.

($n \geq 0$ bo $S_0 = S$ niesprzeczne)

(tw. o dedukcji: ψ zdanie, φ formuła, $X \subseteq F_L$,
$X \cup \{\varphi\} \vdash \psi \Leftrightarrow X \vdash \varphi \to \psi$)

$$S_n \vdash (\exists x\, \varphi_n(x) \to \varphi_n(c_{f(n)})) \longrightarrow \alpha \wedge \neg\alpha$$

$\Downarrow$ A0, MP $\quad (p \to (q \wedge \neg q)) \to \neg p \quad (\alpha$: zd.$)$

$$S_n \vdash \neg(\exists x\, \varphi_n(x) \to \varphi_n(c_{f(n)}))$$

$\Updownarrow$ A0, MP

$$S_n \vdash \exists x\, \varphi_n(x) \wedge \neg\varphi_n(c_{f(n)})$$

$\Downarrow$

$S_n \vdash \exists x\, \varphi_n(x)$ oraz $S_n \vdash \neg\varphi_n(c_{f(n)})$

Z wybor f symbol $c_{f(n)}$ nie występuję w zdaniach z S_n. W dowodzie $\neg\varphi_n(c_{f(n)})$ z S_n możemy zastąpić każde wystąpienie $c_{f(n)}$ przez nową zmienną y nie występującą w formułach dowodu. Dostajemy dowód $\neg\varphi_n(y)$ z S_n. Stąd $S_n \vdash \neg\varphi_n(y)$.

Na mocy $\forall$-reguły $S_n \vdash \forall y\, \neg\varphi_n(y)$

Na mocy A2, MP $S_n \vdash \forall x \neg \varphi_n(x)$

Ale $S_n \vdash \exists x\, \varphi_n(x)$, stąd S_n sprzeczne.

Ale n miało być minimalne.

FAKT $\boxed{}$

Z tw. Lindenbauma niech $S' \supseteq S_\omega$

będzie niesprzecznym, zupełnym zb. zdań.

$C = \{c_n : n < \omega\}$ ← tu def. relację równoważności:

$$c_n \sim c_m \iff S' \vdash c_n = c_m.$$

(Ćw. sprawdzić że to rel. równoważności)

Budujemy model M z klas abstrakcji:

$|M| = C/_\sim$. Musimy zinterpretować symbole

języka L' w M:

(1) $R_i^M([c_{i_1}]_\sim, [c_{i_2}]_\sim, \dots, [c_{i_n}]_\sim)$

$$\overset{def}{\iff} S' \vdash R_i(c_{i_1}, \dots, c_{i_k})$$

(2) $f_j^M([c_{i_1}]_\sim, \dots, [c_{i_k}]_\sim) = [c_{i_{k+1}}]_\sim$

$$\overset{def}{\iff} S' \vdash f_j(c_{i_1}, \dots, c_{i_k}) = c_{i_{k+1}}$$

(3) $\underline{c}_n^M = [c_n]_\sim$, $\underline{c}^M = [c_n]_\sim$ gdy $S' \vdash \underline{c} = c_n$
$\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ L$

Poprawność (2):

$$S' \vdash \exists x\, f_j(\overbrace{c_{i_1}, \dots, c_{i_k}}^{\bar{c}}) = x \quad \text{bo z A2}$$

$$\forall x\,(x \neq f_j(\bar{c})) \to f_j(\bar{c}) \neq f_j(\bar{c})$$

$$\Downarrow \text{A0}$$

$$f_j(\bar{c}) = f_j(\bar{c}) \to \exists x\,(x = f_j(\bar{c}))$$

$$\vdash f_j(\bar{c}) = f_j(\bar{c})$$

$$\Downarrow \text{MP}$$

$$\vdash \exists x\, \underbrace{f_j(\bar{c}) = x}_{= \varphi_n(x) \text{ dla pewnego } n}$$

Ponadto $S' \vdash \exists x\, \varphi_n(x) \to \varphi_n(c_{f(n)})$

Zatem z MP $S' \vdash \varphi_n(c_{f(n)})$.

(3) Analogicznie

<u>Lemat.</u> $\forall$ zdania $\alpha \in \mathcal{F}_{L'}$ $(M \models \alpha \iff S' \vdash \alpha)$

<u>D-d.</u> Ind. względem dł. α.

1° α: atomowe

(a) $\alpha : t_1 = t_2$

$M \models t_1 = t_2$

$\iff t_1^M = t_2^M$

$\iff [c_n]_\sim = [c_m]_\sim$

$\iff S' \vdash c_n = c_m \overset{\text{ćw.}}{\iff} S' \vdash t_1 = t_2$

ćw. istnieją c_n, c_m t. że

$S' \vdash J_1 = c_n$, $S' \vdash J_2 = c_m$

$\Downarrow$ ind. wzg. dł. J_1

$J_1^M = [c_n]_\sim$

(b) $\alpha : R(t_1, \dots, t_k)$

$M \models R_i(t_1, \dots, t_k) \iff R_i^M([c_{i_1}]_\sim, \dots, [c_{i_k}]_\sim)$

$S' \vdash t_l = c_{i_l}$

$\Downarrow$

$t_l^M = [c_{i_l}]_\sim$

$\overset{\text{def. } M}{\iff} S' \vdash R_i(c_{i_1}, \dots, c_{i_k})$

$\overset{\text{aks. }=}{\iff} S' \vdash R_i(t_1, \dots, t_k)$

2° spójniki

(a) negacja: $M \models \neg\alpha \iff \neg(M \models \alpha)$

$\underset{\text{z zał. ind.}}{\iff} \neg(S' \vdash \alpha)$

S': niesprzeczny zupełny

$S' \vdash \neg\alpha$

(b) koniunkcje : podobnie

3° kwantyfikatory

$\exists$: $\alpha : \exists x\, \varphi_n(x)$. $M \models \exists x \varphi_n(x) \Rightarrow M \models \varphi_n([c_k]_n)$

$\underset{\text{z zał. ind.}}{\Longleftrightarrow} S' \vdash \varphi_n(c_k) \underset{A2}{\Rightarrow} S' \vdash \exists x\, \varphi_n(x)$

$$S' \vdash \exists x\, \varphi_n(x) \Rightarrow S' \vdash \varphi_n(c_{f(n)}) \overset{\text{zał. ind.}}{\Rightarrow} M \models \varphi_n(c_{f(n)})$$

$$\Downarrow$$

$$M \models \exists x\, \varphi_n(x)$$

Lemat ∎

Z tego skoro $M \models S'$, to $M \models S$

Tw. ∎

<u>Wn. 2.13</u> tw. Gödla o pełności KRL

$$\models \varphi \Rightarrow \vdash \varphi$$

<u>D-d.</u> <u>BSO</u> φ : zdanie (patrz $\overline{\varphi}$)

Zał. nie wprost że $\nvdash \varphi$. Wtedy z tw.

o dedukcji $\{\neg\varphi\}$ niesprzeczny. Z tw.

o istnieniu modelu $\exists M \models \neg\varphi$ więc $\not\models \varphi$.

∎

Tw. 2.20 (o zwartości)

Jeżeli każdy skończony podzbiór $X \subseteq \mathcal{F}_L$ ma model, to X ma model.

Wn. 2.21 $X \vdash \varphi \iff (\forall M \models X)\ M \models \varphi$ ■

Ustalamy (przeliczalny) L, rozważamy tylko struktury dla L.

Def. 3.1 $M \equiv N$ (elementarnie równoważne)

$$\Updownarrow \text{def.}$$

$$Th(M) = Th(N) \iff \forall \varphi \in \mathcal{F}_L \ (M \models \varphi \iff N \models \varphi)$$

Def. 3.2 $M \subseteq N \iff |M| \subseteq |N|$ oraz

podstruktura $\forall i,j,t$ $f_i^M = f_i^N \restriction_{|M|}$,

$R_j^M = R_j^N \restriction_{|M|}$,

$c_t^M = c_t^N$

Def. 3.3 $g: M \xrightarrow{\cong} N \iff g: |M| \xrightarrow[\text{na}]{1-1} |N|$

izomorfizm

oraz $\forall \bar{a} \in |M|$, $\forall b \in |M|$

$\boxed{\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \quad g(\bar{a}) = (g(a_1), \dots, g(a_n))}$

$$\forall i, j, t \begin{cases} M \models R_i(\bar{a}) \iff N \models R_i(g(\bar{a})) \\ M \models f_j(\bar{a}) = b \iff N \models f_j(g(\bar{a})) = g(b) \\ M \models c_t = b \iff N \models c_t = g(b) \end{cases}$$

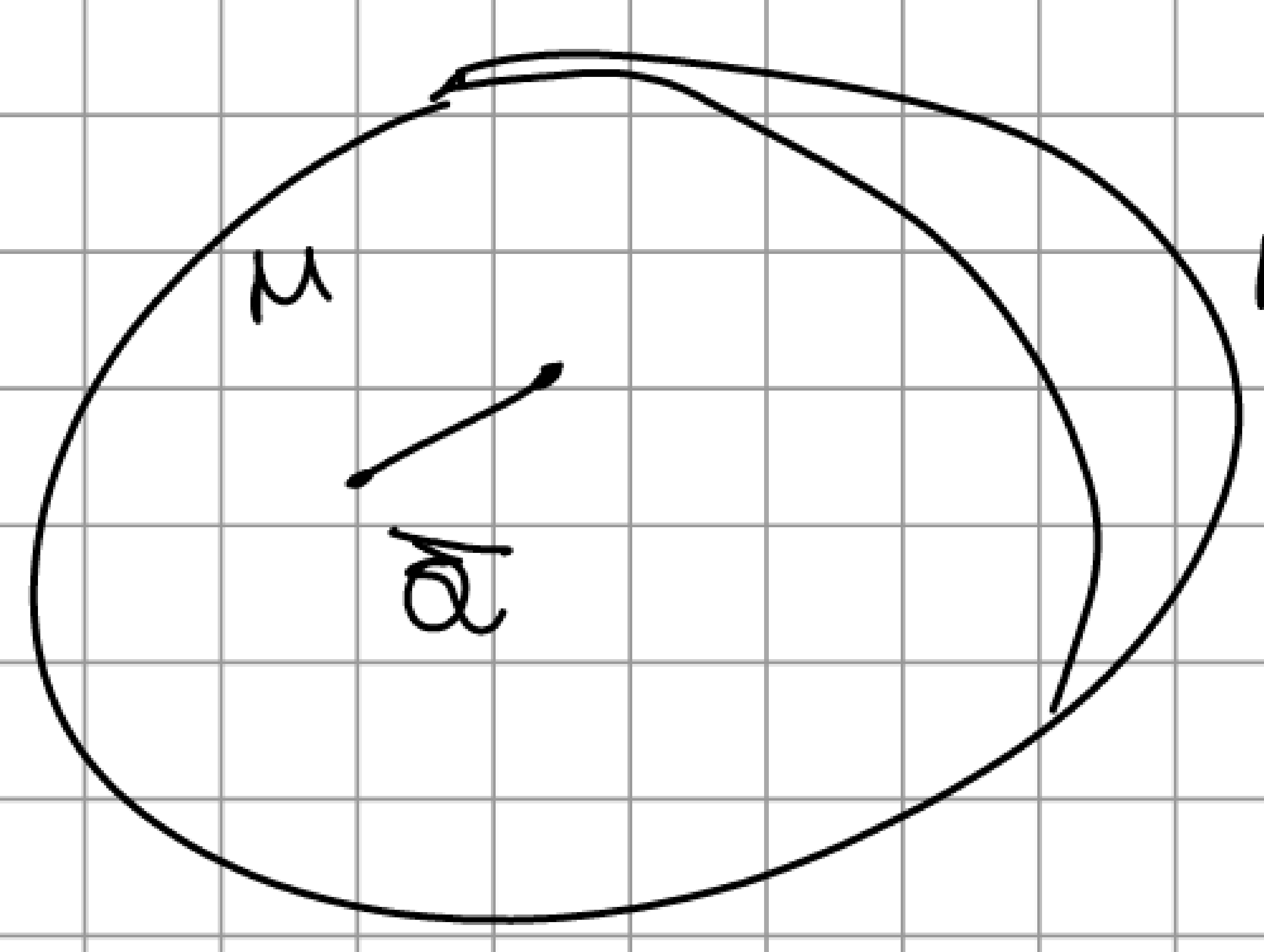
Def. 3.4 $M \cong N \iff \exists g: M \xrightarrow{\cong} N$

izomorficzne

Def. 3.5 $M \prec N$ gdy $M \subseteq N$ oraz

elementarna podstruktura

$$\forall \bar{a} \subseteq M \ \forall \varphi(\bar{x}) \in \mathcal{F}_L \ (M \models \varphi(\bar{a}) \iff N \models \varphi(\bar{a}))$$



Def. 3.6 $f : M \xrightarrow{\equiv} N \iff \forall \bar{a} \in M \ \forall \varphi(\bar{x}) \in F_L$
elementarne
$M \models \varphi(\bar{a}) \iff N \models \varphi(f(\bar{a}))$

Test Tarskiego-Vaughta Załóżmy, że $A \subseteq |M|$. Wtedy A jest uniwersum elementarnej podstruktury M wtedy, gdy spełnia warunek:

(*) Dla każdej formuły $\varphi(x, \bar{y}) \in F_L$, $\bar{a} \in A$ jeśli $M \models \exists x\, \varphi(x, \bar{a})$, to dla pewnego $b \in A$, $M \models \varphi(b, \bar{a})$

D-d. "$\Rightarrow$" $A = |N|$, $N \prec M$, $\bar{a} \subseteq A$

$M \models \exists x\, \varphi(x, \bar{a}) \Rightarrow N \models \exists x\, \varphi(x, \bar{a})$

$\iff$ dla pewnego $b \in A$ $N \models \varphi(b, \bar{a})$

$\Downarrow$

$M \models \varphi(b, \bar{a})$

"$\Leftarrow$"

(a) $A = |N|$ dla pewnego $N \subseteq M$.

tzn. że $f_i^M[A] \subseteq A$. Tak jest, bo:

dla $\bar{a} \subseteq A$ $M \models \exists x\, f_i(\bar{a}) = x$

Z $(*)$ $M \models f_i(\bar{a}) = b$ dla $b \in A$, tzn. $f_i^M(\bar{a}) = b$

(b) Dla każdej formuły $\varphi(\bar{y}) \in \mathcal{F}_L$ i $\bar{a} \subseteq A$

$M \models \varphi(\bar{a}) \iff N \models \varphi(\bar{a})$ (to chcemy pokazać)

indukcja względem dł. φ:

- φ: atomowa: OK, bo $N \subseteq M$
- przejście przez spójniki: łatwe
- przejście przez kwantyfikatory

$\exists$: $\varphi(\bar{y}) = \exists x\, \psi(x, \bar{y})$

$M \models \exists x\, \psi(x, \bar{a}) \overset{(*)}{\iff} M \models \psi(b, \bar{a}) \overset{\text{zał. ind.}}{\iff} N \models \psi(b, \bar{a})$

dla pewn. $b \in A$ — dla pewn. $b \in A$

$\iff N \models \exists x\, \psi(x, \bar{a})$ $\blacksquare$

<u>Wn. 3.7</u> (tw. Löwenheima – Skolema, Malceva)

(a) Jeśli $A \subseteq |M|$, to $(\exists N \prec M)(A \subseteq |N|$,
(Dolne)

$\|N\| \leq |A| + |L|$
$\overset{\text{def.}}{=} |\mathcal{F}_L|$

(b) Jeśli M: nieskończony, to $\exists N \succ M$
(Górne)

dowolnie dużej mocy

D-d. (a) $\kappa = |A| + |L|$. Konstruujemy ciąg

$a_\alpha \in M$, $\alpha < \kappa$ $\quad \left(a_{<\alpha} = \{ a_\beta : \beta < \alpha \} \right)$

Rekurencyjnie

- Na kroku α rozważmy formułę

$\varphi_\alpha(x) \in \mathcal{F}_L(A a_{<\alpha})$ t. że $M \models \exists x\, \varphi_\alpha(x)$

Jako a_α bierzemy dowolny świadek tego

$\blacksquare$

20.10.2021

<u>Proof</u> (upward L-S, Malcev thm)

Consider theory $T = Th(M, \underline{a}^M)_{a \in |M|}$ in Language $\mathcal{L}(M)$.

elemental diagram of M

Let $\varkappa$ be any cardinal number.

Let $\{c_\alpha : \alpha < \varkappa\}$ be a set of new constant symbols. Let $T' = T \cup \{c_\alpha \neq c_\beta : \alpha < \beta < \varkappa\}$ in $\mathcal{L}' = \mathcal{L}(M) \cup \{c_\alpha : \alpha < \varkappa\}$. We'll prove that T' is consistent.

Let $X \subseteq T'$ be finite. We expand $(M, a)_{a \in |M|}$ interpreting finitely many c_α's appearing in X as distinct elements of M

$\rightsquigarrow$

We get a model of X, so X is consistent, so T' is (compactness thm)

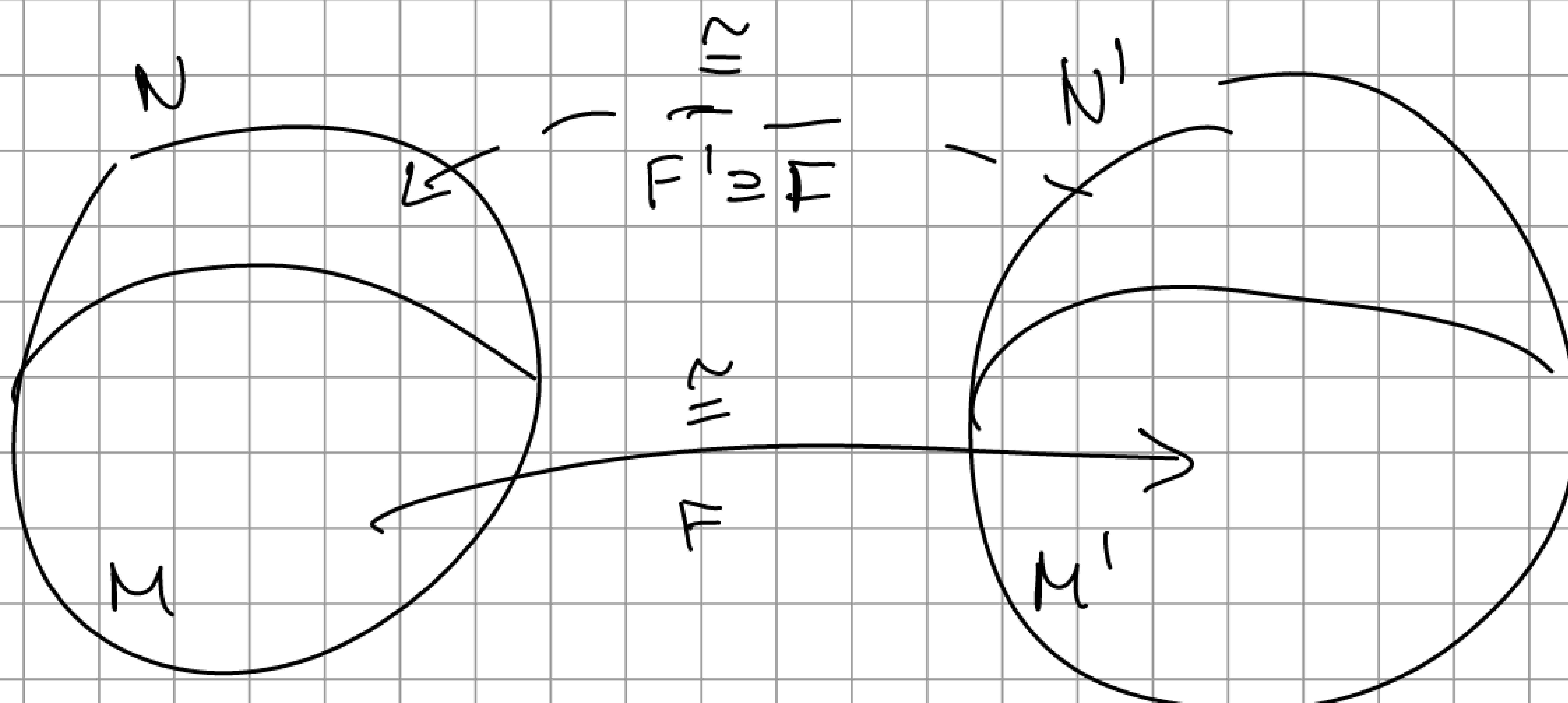
Let $N' \models T' \supseteq T$. Also $N' \models c_\alpha \neq c_\beta$ for all $\alpha < \beta < \kappa$. Hence $\|N'\| \geq \kappa$

$N' = (N', \underline{a}^N)_{a \in |M|}$

Exercise: • $\{\underline{a}^N : a \in |M|\} = |M'|$ for some $M' \prec N'$

• $M \cong M'$

$a \mapsto \underline{a}^N$



• we can extend F so that N is isomorphic to N'.

Löwenheim-Skolem paradox

"We cannot express uncountability"

My interpretation of this paradox:

Let $(V, \in) \models ZFC$ be some "big" model that contains $\mathbb{N}$ and is transitive

$\forall A, B \in V$ $A \subseteq B \Leftrightarrow A \in B$

Take subset of ZFC (call it ZFC^{*} s.t. it's finite and $ZFC^{*} \models$ "For every X we have $|\mathcal{P}(X)| \neq |X|$"

(This is Cantor's theorem, it is true in ZFC and we can take some finite number of ZFC axioms that prove this).

Take some $\mathbb{N} \subseteq \underset{\text{countable}}{M} \models ZFC^{*}$ (L-S thm). $M \subseteq V$

We also need M to be transitive (just add some axioms to ZFC*).

Now, $M \models$ "$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \neq \mathbb{N}$" which can be written as

$$M \models \quad \forall X \subseteq \mathbb{N} (X \in A) \longrightarrow |A| \neq |\mathbb{N}|$$

We now that $A \in M$ ($\Longleftrightarrow A \subseteq M$), M is countable, but proves that A is uncountable! (which is not true in V).

<u>Problem</u> How to determine if $M \equiv N$ or $M \cong N$?

$\Downarrow$

<u>Ehrenfeucht – Fraïssé games</u>

Assume, that $\mathcal{L}$ if a finite relational language. We consider $\mathcal{L}$-structures M, N.

Def. 4.1 $\Gamma_n(M, N)$ is a game consisting of n moves (each move is one move for a player).

n-move game

We call the players
↳ I (spoiler) ↳ II (prover)

At each move players pick one element of M and N (one from each). On move i $(1 \leq i \leq n)$ the players have already picked elements $a_1, \dots, a_{i-1} \in M$, $b_1, \dots, b_{i-1} \in N$. Now I picks one of M, N and then one element from it. Player II responds with picking an element from the other model: $a_i \in M$, $b_i \in N$.

After n moves: $\{a_1,\dots,a_n\} \subseteq M$, $\{b_1,\dots,b_n\} \subseteq N$.

$$f : a_i \longmapsto b_i$$

Player II wins if f is an isomorphism of the induced substructures.

Example When $M \cong N$, then II obviously win. Just tak $F : M \xrightarrow{\cong} N$ and pick according to it.

Example $(\mathbb{Z},\leq) \underset{\not\cong}{\equiv} (\mathbb{Z}_1,\leq) \sqcup (\mathbb{Z}_2,\leq)$

$$\mathbb{Z}_1 \cong \mathbb{Z}, \qquad \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}$$

$$\underset{\mathbb{Z}_1}{(\cdots\cdots)} < \underset{\mathbb{Z}_2}{(\cdots\cdots)}$$

For instance: $n=5$

$$\mathrm{I}: 1 \longrightarrow \mathrm{II}: 1_1$$

$$\mathrm{II}: 32 \longleftarrow \mathrm{I}: 1_2$$

$$\vdots$$

Arbitrary number greater then 5 wins!

Proof excersice. ∎

Thm 4.2 (Ehrenfeucht – Fraïssé)

$M \equiv N \iff \forall n$ II has a winning strategy in $\Gamma_n(M, N)$

Def. 4.3 X is a set of axioms of theory T when $Cn(X) = T$.

Examples of theories

Let $L = \{\leq\}$.

1. LO (linear order): axioms "$\leq$ is a linear order".

2. DLO (dense LO): axioms of LO and:
$$(\forall x, y)(x < y \to \exists z \; x < z < y)$$

3. DLO_0 (DLO without endpoints): axioms of DLO and:
$$\forall x \exists y, z \; y < x < z$$

DLO_0 is consistent, because it has a model: $\mathbb{Q}$. Moreover, it is complete and <u>decidable</u>.

Def. 4.3 Theory T is $\varkappa$-categorical if for every $M, N \models T$ s.t. $\|M\| = \|N\| = \varkappa$ we have $M \cong N$.

Remark 4.4 DLO_0 is $\aleph_0$-categorical

Proof (Back-and-forth argument)

Assume $M = \{a_n, n < \omega\} \models DLO_0$

$N = \{b_n, n < \omega\} \models DLO_0$

We construct functions f_n and sets $A_n \subseteq M$, $B_n \subseteq M$ such that

(a) $f_n \subseteq f_{n+1}$ (which implies $A_n \subseteq A_{n+1}$, $B_n \subseteq B_{n+1}$)

(b) $f_n : A_n \xrightarrow{\cong} B_n$ of induced structures

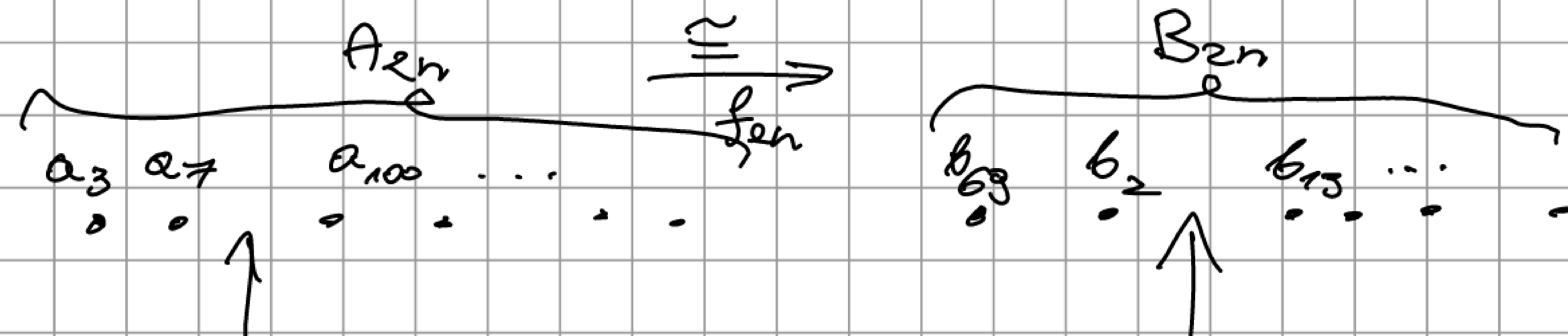
(c) $a_n \in A_{2n+1}$, $b_n \in B_{2n+2}$

Construction We will construct those objects recursively:

- $f_0 = A_0 = B_0 = \emptyset$
- recursive step: $2n \longrightarrow 2n+1 \longrightarrow 2n+2$

We have $f_{2n} : A_{2n} \longrightarrow B_{2n}$

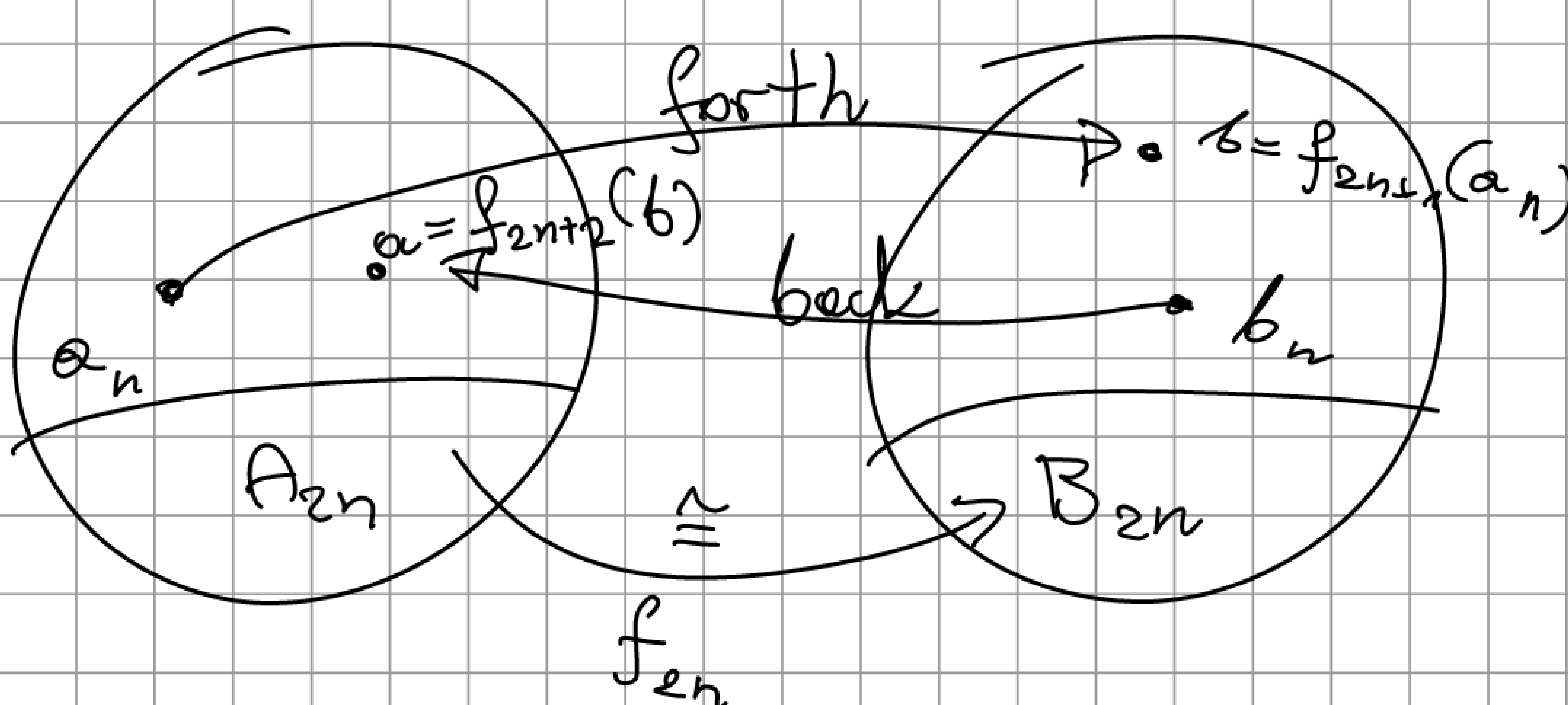
Look at a_n. If $a_n \in A_{2n}$, then $f_{2n+1} = f_{2n}$.
Else then $A_{2n+1} = A_{2n} \cup \{a_n\}$. Now:



a_n find any $b \in N$ s.t. b

Now $B_{2n+1} = B_{2n} \cup \{b\}$, $f_{2n+1} = f_{2n} \cup \langle a_n, b \rangle$

Similarly we chose a for b_n and construct $f_{2n+2}, A_{2n+2}, B_{2n+2}$.



Now $f = \bigcup_n f_n$, by (c) $\mathrm{Dom} f = M$, $\mathrm{Rng} f = N$ and by (b) f is an isomorphism.

Corollary 4.5 DLO_0 is complete

Proof Let $\varphi \in \mathcal{F}_L$ be a sentence. Suppose (ad absurdum) that $DLO_0 \nvdash \varphi$ and $DLO_0 \nvdash \neg\varphi$.

Hence, by "$\vdash \Leftrightarrow \vDash$" there is $M, N \vDash DLO_0$ s.t. $M \vDash \varphi$, $N \vDash \neg\varphi$

$$\begin{array}{ccc} M & & N \\ \curlyvee & & \curlyvee \\ M_0 & \cong & N_0 \end{array}, \text{ but } \begin{array}{l} M_0 \vDash \varphi \\ N_0 \vDash \neg\varphi \end{array} \quad ↯$$

(downward L-S) countable

27.10.2021

Henkin's proof of Gödel's model existance thm.

Why Henkin's axiom? Recall:

S - a consistent set of formulas

$\cap$

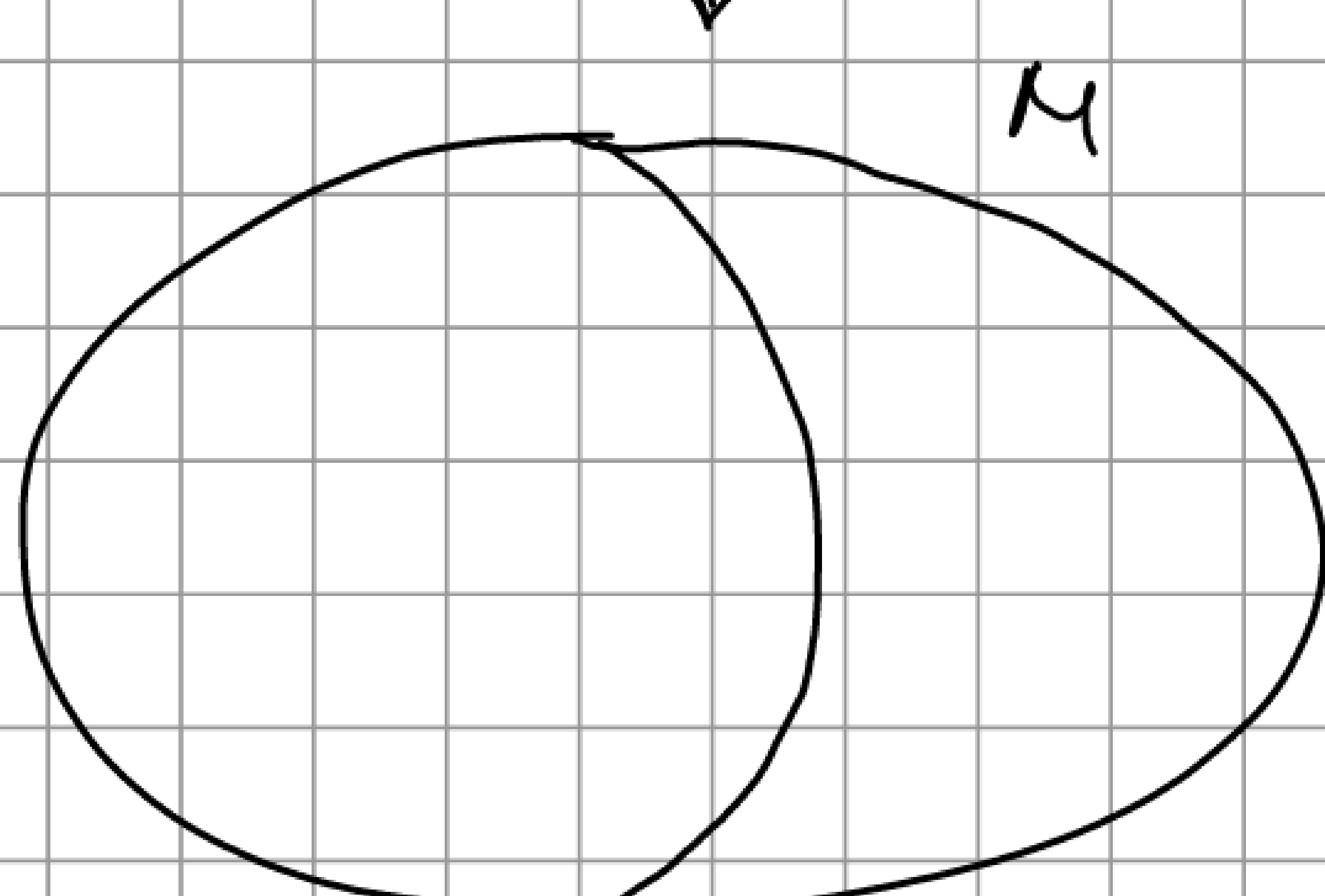
S' in $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c_n : n \in \mathbb{N}\}$

consistent
complete

Contains H_n : $\exists x\, \varphi_n(x) \longrightarrow \varphi_n(c_{f(n)})$

Enumeration of all formulas in $\mathcal{F}_{\mathcal{L}'}$

Suppose $M \models S'$



$N = \{c_n^M : n < \omega\}$

Henkin's axioms + completness of S' ensures

that N satisfies T-V test

$M \models \exists x\, \underbrace{\varphi(x, \bar{c})}_{\varphi_n(x) \text{ for some } n}$

S' is complete, so

$S' \vdash \exists x\, \varphi_n(x)$

Also $S' \vdash H_n \overset{MP}{\Rightarrow} S' \vdash \varphi_n(c_{f(n)}) \Rightarrow M \models \varphi_n(c_{f(n)})$

the witness from N

So $N \preccurlyeq M$, $N \models S'$

S' contains the "atomic diagram" of N

- $P_i(\bar{c})$ is decided is S'
- $f_j(\bar{c}) = c'$ — " —
- $c_n = c_m$ — " —

: this is enough to determine structure of N

DLO_0 : $\aleph_0$-categorical $\Rightarrow$ complete

Corollary 4.6. DLO_0 is decidable

Proof(a) Let $\varphi \in \mathcal{F}_L$: a sentence

Algorithm: generate proofs in DLO_0 : $\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \dots$ (in steps $0, 1, \dots$)

cntbly many

It exists because set of axioms is finite

In step i, $\bar{\alpha}_i$ is generated.

We verify if the conclusion of $\bar{\alpha}_i$ happens to be φ or $\neg\varphi$.

If YES, then we get either $DLO_0 \vdash \varphi$ or $DLO_0 \nvdash \varphi$, STOP.

If NOT, proceed to step $i+1$.

There is some proof of φ or $\neg\varphi$, because DLO_0 is complete.

<u>Remark 4.7</u> If T is a complete theory with **recursively enumerable** set of axioms, then T is decidable.

There is an effective way of generating these axioms in a list

<u>Proof (b)</u> (more practical)

<u>Fact 4.8</u> DLO_0 is **quantifier eliminable** (q.e.)

that is: $\forall \varphi \in \mathcal{F}_L \, \exists \psi \in \mathcal{F}_L \; DLO_0 \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$

with no quantifiers (quantifiers free)

<u>Proof (Fact 4.8)</u> Let $\varphi(\bar{x}) \in \mathcal{F}_L$.

There are finitely many configurations $C_1(\bar{x}), \dots, C_n(\bar{x})$

$C(\bar{x})$: a conjunction of atomic, negated atomic formulas about $\bar{x}$ completely describing ordering $<$ on $\bar{x}$

A **configuration**

$DLO_0 \vdash \dot{\bigvee}_{i=1}^{n} c_i(\bar{x})$

exclusive alternative

$\Updownarrow$

$(\mathbb{Q}, \leq) \models \dot{\bigvee}_{i=1}^{n} c_i(\bar{x})$

Exersice T is complete consistent theory, $M \models T$, $\varphi \in \mathcal{F}_L$, then
$T \vdash \varphi \iff M \models \varphi$

Also $\forall i \left[DLO_0 \vdash c_i(\bar{x}) \to \varphi(\bar{x}) \text{ or } DLO_0 \vdash c_i(\bar{x}) \to \neg\varphi(\bar{x}) \right]$

because: if $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Q}$, both satisfing $c(\bar{x})$, then
$\exists f \in Aut(\mathbb{Q}, \leq)\ f(\bar{a}) = \bar{b}$ fact ∎

Let $I = \{ i \in \{1, \dots, n\} : DLO_0 \vdash c_i(\bar{x}) \to \varphi(\bar{x}) \}$

<u>excersice</u>: $DLO_0 \vdash \varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \underbrace{\bigvee_{i \in I} c_i(\bar{x})}_{\psi:\ \text{quantifiers free}}$

$\Downarrow$

DLO_0 is decidable

(We trasform φ to ψ and look if it holds in $(\mathbb{Q}, \leq)$) ∎

Examples of theories with q.e.

(1) ACF_p = the theory of algebraically closed fields of char. $p \geq 0$

(2) RCF = the theory of real closed fields

$$Th(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$$

(3) Many easy theories:

e.g. the theory T of independent unary predicates $P_n(x)$, $n<\omega$

<u>axioms</u>: $A_{I,J}$: $\exists x \left(\bigwedge_{n\in I} P_n(x) \wedge \bigwedge_{n\in J} \neg P_n(x) \right)$

$I, J \subseteq \omega$ finite, disjoint

A model M of T:

$$M = (2^\omega, P_n)_{n<\omega}, \quad P_n(f) \iff f(n)=0$$

(4) Abelian groups, modules over a fixed ring

They have only reduction of quantifiers to the level of $\underbrace{pp}_{\text{positive primitive}}$-formulas

$$\exists \bar{y}\, A\bar{y} = \bar{x}$$

matrix

(5) $(\mathbb{R}, +, \cdot, <, \exp, \text{analytic functions with compact supports})$

$\Downarrow$

"almost" q.e. <u>o-minimal</u>

<u>Corollary 4.9</u> (weak Hilbert nullstellensatz)

If $\underset{\mathrm{ACF}_p}{K} \subseteq L$ and $F(\bar{x})$: a system of equations and non-equations with parameters in K, solvable in L, then $F(\bar{x})$ has a solution in K.

<u>Proof</u> In ACF_p: $F(\bar{x}) = F(\bar{x}, \underset{K}{\bar{a}}) \rightsquigarrow F(\bar{x}, \bar{y})$

by q.e. $\mathrm{ACF}_p \vdash \exists \bar{x}\, F(\bar{x}, \bar{y}) \longleftrightarrow \underset{\text{q.f.}}{\psi(\bar{y})}$

So $L \models \exists \bar{x}\, F(\bar{x}, \bar{a}) \iff L \models \psi(\bar{a})$

$\Downarrow$ because ψ has no quant.

$K \models \psi(\bar{a})$

So $\mathrm{ACF}_0 \models K \models \exists \bar{x}\, F(\bar{x}, \bar{a})$

$\blacksquare$

Def 5.1 An algebra of sets: $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ st.

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{C}$

(2) $\mathcal{C}$ closed under Boolean operations

$^c, \cup, \cap, \Delta, \ldots$

$(\mathcal{C}, \cup, \cap, {}^c, \underset{\emptyset}{\underset{\|}{\mathbb{0}^{\mathcal{C}}}}, \underset{X}{\underset{\|}{\mathbb{1}^{\mathcal{C}}}})$: a Boolean algebra

Generally $L_{BA} = \{\vee, \wedge, {}', \mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ BA: the theory of Boolean algebras

Axioms of BA

(1) $\vee, \wedge$: associative, commutative, distributive,

(2) $\mathbb{0}' = \mathbb{1}$, $\mathbb{1}' = \mathbb{0}$, $x'' = x$, $(x \vee y)' = x' \wedge y'$

$(x \wedge y)' = x' \vee y'$

(3) $x \vee (x \wedge y) = x$, $x \wedge (x \vee y) = x$

Thm (Stone) Every B. Algebras is $\cong$ an algebra of sets

Let $\mathbb{A} = (A, \wedge, \vee, ', 0, 1)$: a BA.

- For $x, y \in \mathbb{A}$ $x \leq y \iff x \vee y = y$
$\iff x \wedge y = x$

a partial ordering

- $a \overset{\neq 0}{\in} \mathbb{A}$ is an atom if $\forall x \in \mathbb{A}$ $x \leq a \to x = 0$
$\vee\, x = a)$
- $\mathbb{A}$ is atomless if it has no atoms.

<u>Example</u> the algebra of sets $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ generated by open intervals with rational endpoints is atomless BA.

<u>Def. 5.2</u> $\emptyset \neq \mathcal{U} \subseteq \mathbb{A}$ is a **filter** if

(1) $x \leq y$ and $x \in \mathcal{U} \Rightarrow y \in \mathcal{U}$

(2) $x, y \in \mathcal{U} \Rightarrow x \wedge y \in \mathcal{U}$

<u>Def. 5.3</u> $\mathcal{U}$ is a **proper filter** if $0 \notin \mathcal{U}$

<u>Def. 5.4</u> $\mathcal{U}$ is an **ultrafilter** in $\mathbb{A}$ if it is a maximal proper filter in $\mathbb{A}$

Remark 5.5 Every proper filter extends to an ultrafilter.

Def. 5.6 $S(\mathbb{A}) = \{$ ultrafilters in $\mathbb{A}\}$: a topological space

Stone space of $\mathbb{A}$

the basis of topology: $[a] = \{\mathcal{U} \in S(\mathbb{A}) : a \in \mathcal{U}\}$
(for $a \in \mathbb{A}$)

(it is clopen)

Proof of Stone representation thm

$\mathcal{C} = \{[a] : a \in \mathbb{A}\} \subseteq P(S(\mathbb{A}))$

$\mathbb{A} \ni a \xrightarrow{\cong} [a]$

$\blacksquare$