12.10.2021

D-d. Tw. Gödla o modelu (Leon Henkin) gdy L i S przeliczalne.

Niech $L' = L \cup \{c_n : n < \omega\}$ (zbiór nowych symboli stałych)

Niech $\{\varphi_n(x) : n < \omega\}$: numeracja formuł z $F_{L'}$ ze zmienną wolną x.

Pomocnicza funkcja $f : \omega \to \omega$ rosnąca i t. że $c_{f(n)}$ nie występuje w formułach $\varphi_0(x), \ldots, \varphi_n(x)$ dla $n = 0, 1, \ldots$

Niech $S_n = S \cup \{\underbrace{\exists x\, \varphi_i(x) \longrightarrow \varphi_i(c_{f(i)})}_{\text{Aksjomat Henkina}} : i < n\}$

$S = S_0 \subseteq S_1 \subseteq S_2 \subseteq \ldots$

Niech $S_\omega = \bigcup_n S_n$.

Fakt S_ω jest niesprzeczny.

D-d. nie wprost

Skoro S_ω sprzeczne, to pewne S_n sprzeczne.

Niech n to najmniejsze takie że S_{n+1} sprz.

($n \geq 0$ bo $S_0 = S$ niesprzeczne)

(tw. o dedukcji: φ zdanie, ψ formuła, $X \subseteq F_L$,
$X \cup \{\varphi\} \vdash \psi \Leftrightarrow X \vdash \varphi \to \psi$)

$$S_n \vdash (\exists x\, \varphi_n(x) \to \varphi_n(c_{f(n)})) \longrightarrow \alpha \wedge \neg\alpha$$

$\Downarrow$ A0, MP $\quad (p \to (q \wedge \neg q)) \to \neg p \quad$ (α: zd.)

$$S_n \vdash \neg(\exists x\, \varphi_n(x) \longrightarrow \varphi_n(c_{f(n)}))$$

$\Updownarrow$ A0, MP

$$S_n \vdash \exists x\, \varphi_n(x) \wedge \neg\varphi_n(c_{f(n)})$$

$\Downarrow$

$S_n \vdash \exists x\, \varphi_n(x)$ oraz $S_n \vdash \neg\varphi_n(c_{f(n)})$

Z wybor f symbol $c_{f(n)}$ nie występuje w zdaniach z S_n. W dowodzie $\neg\varphi_n(c_{f(n)})$ z S_n możemy zastąpić każde wystąpienie $c_{f(n)}$ przez nową zmienną y nie występującą w formułach dowodu. Dostajemy dowód $\neg\varphi_n(y)$ z S_n. Stąd $S_n \vdash \neg\varphi_n(y)$.

Na mocy $\forall$-reguły $S_n \vdash \forall y\, \neg\varphi_n(y)$

Na mocy A2, MP $S_n \vdash \forall x \neg \varphi_n(x)$

Ale $S_n \vdash \exists x\, \varphi_n(x)$, stąd S_n sprzeczne.

Ale n miało być minimalne.

FAKT $\blacksquare$

Z tw. Lindenbauma niech $S' \supseteq S_\omega$ będzie niesprzecznym, zupełnym zb. zdań.

$C = \{c_n : n < \omega\} \leftarrow$ tu def. relację równoważności:

$$c_n \sim c_m \iff S' \vdash c_n = c_m.$$

(Ćw. sprawdzić że to rel. równoważności)

Budujemy model M z klas abstrakcji:

$|M| = C/\sim$. Musimy zinterpretować symbole języka L' w M:

(1) $R_i^M([c_{i_1}]_\sim, [c_{i_2}]_\sim, \ldots, [c_{i_n}]_\sim)$

$$\overset{def}{\iff} S' \vdash R_i(c_{i_1}, \ldots, c_{i_k})$$

(2) $f_j^M([c_{i_1}]_\sim, \ldots, [c_{i_k}]_\sim) = [c_{i_{k+1}}]_\sim$

$$\overset{def}{\iff} S' \vdash f_j(c_{i_1}, \ldots, c_{i_k}) = c_{i_{k+1}}$$

(3) $\underline{c}_n^M = [c_n]_\sim$, $\underset{L}{\to} \underline{c}^M = [c_n]_\sim$ gdy $S' \vdash \underline{c} = c_n$

Poprawność (2):

$$S' \vdash \exists x\, f_j(\overbrace{c_{i_1}, \ldots, c_{i_k}}^{\bar{c}}) = x \quad \text{bo z A2}$$

$$\forall x\,(x \neq f_j(\bar{c})) \to f_j(\bar{c}) \neq f_j(\bar{c})$$

$$\Downarrow \text{A0}$$

$$f_j(\bar{c}) = f_j(\bar{c}) \to \exists x\,(x = f_j(\bar{c}))$$

$$\vdash f_j(\bar{c}) = f_j(\bar{c})$$

$$\Downarrow \text{MP}$$

$$\vdash \exists x\, \underbrace{f_j(\bar{c}) = x}_{= \varphi_n(x) \text{ dla pewnego } n}$$

Ponadto $S' \vdash \exists x\, \varphi_n(x) \to \varphi_n(c_{f(n)})$

Zatem z MP $S' \vdash \varphi_n(c_{f(n)})$.

(3) Analogicznie

Lemat. $\forall$ zdania $\alpha \in \mathcal{F}_{L'}$ $(M \models \alpha \iff S' \vdash \alpha)$

D-d. Ind. względem dł. α.

1° α: atomowe

(a) $\alpha: t_1 = t_2$

$M \models t_1 = t_2$

$\iff t_1^M = t_2^M$

$\iff [c_n]_\sim = [c_m]_\sim$

$\iff S' \vdash c_n = c_m \overset{\text{ćw.}}{\iff} S' \vdash t_1 = t_2$

ćw. istnieją c_n, c_m t. że

$S' \vdash t_1 = c_n, \quad S' \vdash t_2 = c_m$

$\Downarrow$ ind. wzg. dł. t_1

$t_1^M = [c_n]_\sim$

(b) $\alpha: R(t_1, \dots, t_k)$

$M \models R_i(t_1, \dots, t_k) \iff R_i^M([c_{i_1}]_\sim, \dots, [c_{i_k}]_\sim)$

$S' \vdash t_l = c_{i_l}$

$\Downarrow$

$t_l^M = [c_{i_l}]_\sim$

$\overset{\text{def. } M}{\iff} S' \vdash R_i(c_{i_1}, \dots, c_{i_k})$

$\overset{\text{aks. } =}{\iff} S' \vdash R_i(t_1, \dots, t_k)$

2° spójniki

(a) negacja: $M \models \neg\alpha \iff \neg(M \models \alpha)$

$\underset{\text{z zał. ind.}}{\iff} \neg(S' \vdash \alpha)$ S': niesprzeczny zupełny

$S' \vdash \neg\alpha$

(b) koniunkcje : podobnie

3° kwantyfikatory

$\exists$: $\alpha : \exists x\, \varphi_n(x)$. $M \models \exists x \varphi_n(x) \Rightarrow M \models \varphi_n([c_k]_n)$

$\underset{\text{z zał. ind.}}{\Longleftrightarrow} S' \vdash \varphi_n(c_k) \underset{A2}{\Longrightarrow} S' \vdash \exists x\, \varphi_n(x)$

$S' \vdash \exists x\, \varphi_n(x) \Longrightarrow S' \vdash \varphi_n(c_{f(n)}) \overset{\text{zał. ind.}}{\Longrightarrow} M \models \varphi_n(c_{f(n)})$

$\Downarrow$

$M \models \exists x\, \varphi_n(x)$

Lemat □

Z tego skoro $M \models S'$, to $M \models S$

Tw. ■

<u>Wn.</u> tw. Gödla o pełności KRL

$$\models \varphi \Rightarrow \vdash \varphi$$

<u>D-d.</u> <u>BSO</u> φ : zdanie (patrz $\overline{\varphi}$)

Zał. nie wprost że $\nvdash \varphi$. Wtedy z tw. o dedukcji $\{\neg\varphi\}$ niesprzeczny. Z tw. o istnieniu modelu $\exists M \models \neg\varphi$ więc $\nvDash \varphi$.

TW. (o zwartości)

Jeżeli każdy skończony podzbiór $X \subseteq \mathcal{F}_L$ ma model, to X ma model.

Wn. $X \vdash \varphi \iff (\forall M \models X)\, M \models \varphi$

Ustalamy (przeliczalny) L, rozważamy tylko struktury dla L.

Def. 3.1 $M \equiv N$ (**elementarnie równoważne**)

$$\Updownarrow \text{def.}$$

$$Th(M) = Th(N) \iff \forall \varphi \in \mathcal{F}_L \ (M \models \varphi \iff N \models \varphi)$$

Def. 3.2 $M \subseteq N \iff |M| \subseteq |N|$ oraz

podstruktura

$$\forall i,j,t \quad f_i^M = f_i^N\restriction_{|M|},$$
$$R_j^M = R_j^N\restriction_{|M|},$$
$$c_t^M = c_t^N$$

Def. 3.3 $g : M \xrightarrow{\cong} N \iff g : |M| \xrightarrow[\text{na}]{1-1} |N|$
izomorfizm

oraz $\forall \bar{a} \in |M|$
$\forall b \in |M|$

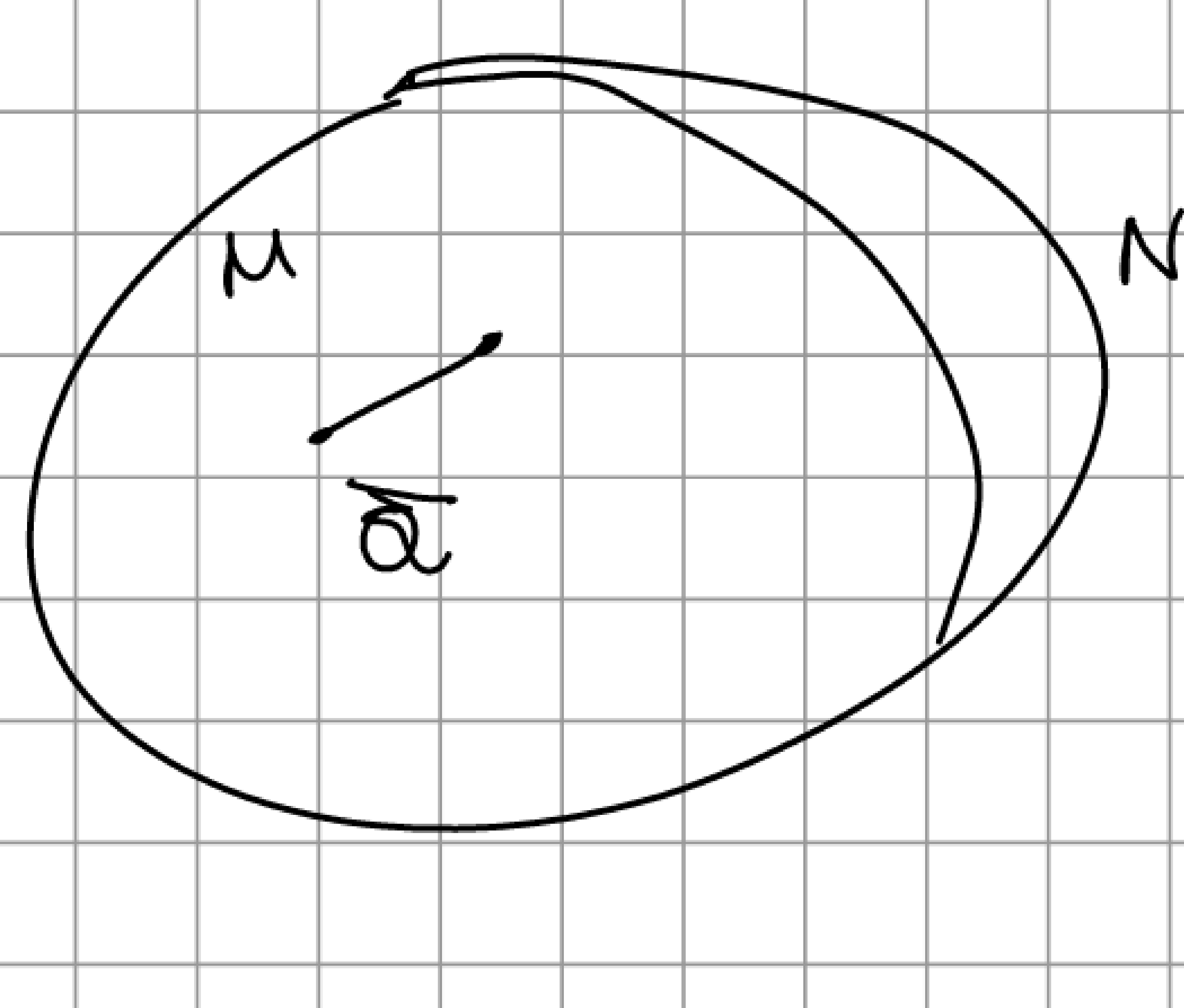
$\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$
$g(\bar{a}) = (g(a_1), \dots, g(a_n))$

$$\forall i, j, t \begin{cases} M \models R_i(\bar{a}) \iff N \models R_i(g(\bar{a})) \\ M \models f_j(\bar{a}) = b \iff N \models f_j(g(\bar{a})) = g(b) \\ M \models c_t = b \iff N \models c_t = g(b) \end{cases}$$

Def. 3.4 $M \cong N \iff \exists g : M \xrightarrow{\cong} N$
izomorficzne

Def. 3.5 $M \prec N$ gdy $M \subseteq N$ oraz
elementarna podstruktura

$$\forall \bar{a} \subseteq M \ \forall \varphi(\bar{x}) \in \mathcal{F}_L \ (M \models \varphi(\bar{a}) \iff N \models \varphi(\bar{a}))$$



Def. 3.6 $f: M \xrightarrow{\equiv} N \iff \forall \bar{a} \in M \ \forall \varphi(\bar{x}) \in F_L$
elementarne
$M \models \varphi(\bar{a}) \iff N \models \varphi(f(\bar{a}))$

Test Tarskiego-Vaughta Załóżmy, że $A \subseteq |M|$.
Wtedy A jest uniwersum elementarnej podstruktury M wtedy, gdy

(*) Dla każdej formuły $\varphi(x, \bar{y}) \in F_L$, $\bar{a} \in A$
jeśli $M \models \exists x\, \varphi(x, \bar{a})$, to dla pewnego $b \in A$, $M \models \varphi(b, \bar{a})$

D-d. "$\Rightarrow$" $A = |N|$, $N \prec M$

$M \models \exists x\, \varphi(x, \bar{a}) \Rightarrow N \models \exists x\, \varphi(x, \bar{a})$

$\iff$ dla pewnego $b \in A$ $N \models \varphi(b, \bar{a})$

$\Downarrow$

$M \models \varphi(b, \bar{a})$

"$\Leftarrow$"

(a) $A = |N|$ dla pewnego $N \subseteq M$.

tzn. że $f_i^M[A] \subseteq A$. Tak jest, bo:

dla $\bar{a} \subseteq A$ $M \models \exists x\, f_i(\bar{a}) = x$

Z (*) $M \models f_i(\bar{a}) = b$ dla $b \in A$, tzn. $f_i^M(\bar{a}) = b$

(b) Dla każdej formuły $\varphi(\bar{y}) \in \mathcal{F}_L$ i $\bar{a} \subseteq A$

$M \models \varphi(\bar{a}) \iff N \models \varphi(\bar{a})$ (to chcemy pokazać)

indukcja względem dł. φ:

- φ atomowa: OK, bo $N \subseteq M$
- przejście przez spójniki: łatwe
- przejście przez kwantyfikatory

$\exists$: $\varphi(\bar{y}) = \exists x \psi(x, \bar{y})$

$M \models \exists x \psi(x, \bar{a}) \overset{(*)}{\iff} M \models \psi(b, \bar{a}) \overset{\text{zał. ind.}}{\iff} N \models \psi(b, \bar{a})$

dla pewn. $b \in A$ — dla pewn. $b \in A$

$\iff N \models \exists x \psi(x, \bar{a})$ ∎

<u>Wn.</u> (tw. Löwenheima - Skolema, Malcewa)

(a) Jeśli $A \subseteq |M|$, to $(\exists N \prec M)(A \subseteq |N|$,
(Dolne)

$\|N\| \leq |A| + |L|)$

$|L| \overset{\text{def.}}{=} |\mathcal{F}_L|$

(b) Jeśli M: nieskończony, to $\exists N \succ M$
(Górne)

dowolnie dużej mocy

D-d. (a) $\kappa = |A| + |L|$. Konstruujemy ciąg

$$a_\alpha \in M, \ \alpha < \kappa \quad (a_{<\alpha} = \{a_\beta : \beta < \alpha\})$$

Rekurencyjnie

- Na kroku α rozważamy formułę $\varphi_\alpha(x) \in F_L(Aa_{<\alpha})$ t. że $M \models \exists x\, \varphi_\alpha(x)$

Jako a_α bierzemy dowolny świadek tego $\circlearrowleft$