

11.10.2021

Def. 2.1 $\varphi \in \mathcal{F}_L$ jest tautologią (Klasycznego rachunku Logicznego), gdy $\forall M \text{ model dla } L \quad M \models \varphi$.

Piszemy $\models \varphi$.

Jak rozpoznać, że $\models \varphi$? NIEROZSTRZYGAJNE

Niekiedy jest taut., np. $x = x$,

" \models jest relacją równoważności"

Def. 2.2 Formaty zdaniowe:

Z : zbiór zmiennych zdaniowych

$\hookrightarrow S$ - zbiór format zdaniowych nad Z .

Definicja rekurencyjna:

• $v \in Z \Rightarrow v \in S$

• $\alpha, \beta \in S \Rightarrow \neg \alpha, (\alpha \wedge \beta) \in S$

"Jakby to wszystko sprędy zowie, to może kumaniszi by stracili pracę"

NIE MÓWIĆ
"TAUTOLOGIA
TO ZDANIE
ZA WSZE
PRAWDZINE"

Potocznie tautologia to zdanie, którego prawdziwość wynika z jego struktury.

Def. 2.3 Wartościowanie logiczne: dowolna funkcja

$$v: S \rightarrow \{0, 1\} \text{ t.j. } v(\neg \alpha) = 1 - v(\alpha),$$

$$v(\alpha \wedge \beta) = \min\{v(\alpha), v(\beta)\} \text{ dla dowolnych } \alpha, \beta \in S.$$

Def. 2.4 $\alpha \in S$ jest tautologią klasycznego rachunku zdań, gdy

$$\forall v: S \rightarrow \{0, 1\} \quad v(\alpha) = 1 \quad (\models \alpha)$$

wartościowanie

Przykład. $\models \neg(\alpha \wedge \neg \alpha)$ dla każdego $v \in S$.

Istnieje algorytm rozstrzygający, czy $\models \alpha$.

Def. 2.5 Zauważ, że $\alpha \in S$ jest zbudowane

ze zmiennych zdaniowych p_1, \dots, p_n oraz

spójników logicznych. Niech $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{F}_L$.

Zauważ, że $\varphi \in \mathcal{F}_L$ powstałe przez podstawienie

wszędzie φ_i za p_i . Mówimy wtedy, że

φ jest przykładem formuły α .

Tw. 2.6 Jeśli $\models \alpha$ oraz φ : przykłada α , to $\models \varphi$.
Ćw.

Def. 2.7 Reguły wnioskowania:

$\frac{\varphi_1, \dots, \varphi_n}{\varphi} \leftarrow$ przesłanki (premises)
 $\varphi \leftarrow$ konkluzja, teza $\varphi_i, \varphi \in \mathcal{F}_L$

Podobnie $\frac{\alpha_1, \dots, \alpha_n}{\alpha}, \alpha_i, \alpha \in S$.

Def. 2.8 Reguła $\frac{\varphi_1 \dots \varphi_n}{\varphi}$ jest poprawna, (sound),

gdy $\forall M$ dla L ($M \models \varphi_1, \dots, M \models \varphi_n \Rightarrow M \models \varphi$).

Dla formuł zdaniowych reguła $\frac{\alpha_1 \dots \alpha_n}{\alpha}$

jest poprawna, gdy

$\forall v: S \rightarrow \{0, 1\} \quad (v(\alpha_1) = \dots = v(\alpha_n) = 1 \Rightarrow v(\alpha) = 1)$

Przykłady

- modus ponens
(reguła odrywania)
cut rule

$$\frac{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}{\beta}, \quad \frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$

• reguła generalizacji
 \forall -rule ("A" rule)

$$\frac{\varphi}{\forall v \varphi}$$

v : zmienna

Aksjomatyczne ujęcie KRZ

A0. przykłady tautologii KRZ

A1. $\forall v (\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \forall v \varphi)$ (gdy v nie jest zm. wdn φ)

A2. $\forall v \varphi \rightarrow \varphi(v/t)$

pod warunkiem,
 że żadne

$[t_i: t_i \in \mathcal{I}_L, \text{którego}$

z takich występień v w φ nie jest w zasięgu

podstawiamy w φ za każde wolne wystąpienie zmiennej v

kwantyfikatora wiążącego jakąś zmienną w t

Istotne zastrzeżenie:

$$\varphi: \exists y \ x \neq y, \quad t = y, \quad \varphi(x/t): \exists y \ y \neq y$$

$$\exists y (x \neq y) \rightarrow \exists y (y \neq y) \quad \text{nie jest}$$

tautologią.

Aksjomaty równości $(v, v_1, v_2 - \text{zmienna})$
 $t - \text{term}$
 $\varphi - \text{formuła}$

• $v = v$

• $v_1 = v_2 \rightarrow t(\dots v_1 \dots) = t(\dots v_2 \dots)$

• $v_1 = v_2 \rightarrow (\varphi(\dots v_1 \dots) \rightarrow \varphi(\dots v_2 \dots))$

Pod warunkiem, że to wystąpienie v_1 (wolne)
 pod które podstawiamy v_2 nie jest
 w zasięgu kwantyfikatora wiążącego v_2 .

Def. 2.9 Zał. że $X \subseteq \mathcal{F}_L, \varphi \in \mathcal{F}_L$. Mówimy, że

$X \vdash \varphi \stackrel{\text{def.}}{=} \text{istnieje ciąg formuł}$

"dowodzi"

$\alpha_1, \dots, \alpha_n = \varphi$ t. że $\forall i \leq n:$
 dowód formalny

1° $\alpha_i \in X$ lub α_i jest aksjometem KR1

2° α_i wynika z $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}\}$ na mocy
 modus ponens lub \forall -reguły, tzn.

$\exists j, t < i \quad \alpha_t = (\alpha_j \rightarrow \alpha_i)$

lub $\exists j < i \quad \alpha_i = \forall x \alpha_j$ (wtedy $\frac{\alpha_j, \alpha_i}{\alpha_i}$ przykład MP)

Def. 2.10 $\vdash \varphi$, gdy $\emptyset \vdash \varphi$.
 (φ jest tezą KRL)

Uwaga: $X \vdash \varphi \Leftrightarrow \exists X_0 \subseteq X \quad X_0 \vdash \varphi$

Podział $\vdash \forall x \varphi \rightarrow \exists x \varphi$

$\beta : \forall x \varphi \rightarrow \neg \forall x \neg \varphi$

Gdyby struktura
 była pusta,
 to niedziła.
 Czym?

$\alpha_1 : \forall x \varphi \rightarrow \varphi(x/y)$
 $\alpha_2 : \forall x \neg \varphi \rightarrow \neg \varphi(x/y)$ } tu y : zmienna
 spoza φ

$\alpha_3 : \alpha_2 \rightarrow (\varphi(x/y) \rightarrow \neg \forall x \neg \varphi(x))$ } AO, prawo
 transpozycji

$\alpha_4 : \varphi(x/y) \rightarrow \neg \forall x \neg \varphi(x)$ } MP, α_2, α_3

$\alpha_5 : \alpha_1 \rightarrow (\alpha_4 \rightarrow \beta)$ [AO] $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow$
 $(\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

$\alpha_6 : \beta$ (2x MP, $\alpha_1, \alpha_4, \alpha_5$)

Uwaga $\vdash \varphi \Rightarrow \models \varphi$, tzn. KRL jest poprawny (sound)

Tw. 2.11 (Gödel o pełności KRL)
 completeness theorem

$\models \varphi \Rightarrow \vdash \varphi$

Def. 2.12 $X \subseteq \mathcal{F}_L$. $Cn(X) = \{ \varphi \in \mathcal{F}_L : X \vdash \varphi \}$.
konsekwencje

X jest teorią, gdy $X = Cn(X)$.

Fakt 2.13 $\varphi \vdash \bar{\varphi}$ i $\bar{\varphi} \vdash \varphi$
d-d \forall -regula

$\vdash \bar{\varphi} \rightarrow \varphi$

Def. 2.13 $X, Y \in \mathcal{F}_L$ są równoważne, gdy
 $Cn(X) = Cn(Y)$

Wniosek 2.14 X i $\{ \bar{\varphi} : \varphi \in X \}$ są równoważne.

Def. 2.15 X jest sprzeczny, gdy istnieje zdanie φ t. że $X \vdash \varphi \wedge \neg \varphi$. W przeciwnym razie mówimy, że X jest niesprzeczny

Def. 2.16 (1) $M \models X \Leftrightarrow \forall \varphi \in X M \models \varphi$
 M jest modelem X

(2) X jest zupełny $\Leftrightarrow \forall$ zdanie φ ($X \vdash \varphi$ lub $X \vdash \neg \varphi$)

(3) X jest rozstrzygalny \Leftrightarrow istnieje algorytm rozstrzygający, czy $X \vdash \varphi$ dla $\varphi \in \mathcal{F}_L$

Przykład (1) $\text{Th}(M) = \{\varphi \in \mathcal{F}_L : M \models \varphi\}$: niespójny,
(teoria str. M) zupełna

(2) \emptyset jest niespójny

Tw. 2.17 (Gödel, o istnieniu modelu) Jeżeli S

jest niespójnym zbiorem zdań, to S

ma model (mocy $\leq \aleph_0 + |S|$)