11.10.2021

Def. 2.1 $\varphi \in F_L$ jest **tautologią** (Klasycznego rachunku Logicznego), gdy $\forall \underset{\text{model dla } L}{M}\ M \models \varphi$.

Piszemy $\models \varphi$.

Jak rozpoznać, że $\models \varphi$? NIEROZSTRZYGALNE

Niekiedy jest łatwo, np. $x = x$,
"= jest relacją równoważności"

Def. 2.2 Formuły zdaniowe:

Z: zbiór zmiennych zdaniowych
$\leadsto$ S – zbiór formuł zdaniowych nad Z.

Definicja rekurencyjna:

- $v \in Z \implies v \in S$
- $\alpha, \beta \in S \implies \neg\alpha, (\alpha \wedge \beta) \in S$

"Jak to wszystko sprecyzować, to może humaniści by stracili pracę"

NIE MÓWIĆ "TAUTOLOGIA TO ZDANIE ZAWSZE PRAWDZIWE"

Potocznie tautologia to zdanie, którego prawdziwość wynika z jego struktury.

Def. 2.3 **Wartościowanie logiczne**: dowolna funkcja $v : S \to \{0,1\}$ t.że $v(\neg\alpha) = 1 - v(\alpha)$,

$v(\alpha \wedge \beta) = \min\{v(\alpha), v(\beta)\}$ dla dowolnych $\alpha, \beta \in S$.

Def. 2.4 $\alpha \in S$ jest **tautologią** klasycznego rachunku zdań, gdy

$\underset{\text{wartościowanie}}{\forall v : S \to \{0,1\}}$ $v(\alpha) = 1$ $\left(\models \alpha\right)$

Przykład. $\models \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ dla każdego $\alpha \in S$.

Istnieje algorytm rozstrzygający, czy $\models \alpha$.

Def. 2.5 Zał. że $\underset{\alpha(p_1, \dots, p_n)}{\alpha \in S}$ jest zbudowana ze zmiennych zdaniowych $p_1, \dots, p_n$ oraz spójników logicznych. Niech $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in F_L$. Zał., że $\varphi \in F_L$ powstaje z α przez podstawienie wszędzie φ_i za p_i. Mówimy wtedy, że φ jest **przykładem** formuły α.

Tw. 2.6 Jeśli $\models \alpha$ oraz φ: przykład α, to $\models \varphi$.

Ćw.

Def. 2.7 **Reguły wnioskowania:**

$$\frac{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}{\varphi} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{przesłanki (premises)} \\ \leftarrow \text{konkluzja, teza} \quad \varphi_i, \varphi \in F_L \end{array}$$

Podobnie $\dfrac{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}{\alpha}$, $\alpha_i, \alpha \in S$.

Def. 2.8 Reguła $\dfrac{\varphi_1 \ldots \varphi_n}{\varphi}$ jest **poprawna** **(sound)**,

gdy $\forall M$ dla L $(M \models \varphi_1, \ldots, M \models \varphi_n \Rightarrow M \models \varphi)$.

Dla formuł zdaniowych reguła $\dfrac{\alpha_1 \ldots \alpha_n}{\alpha}$

jest poprawna, gdy

$$\forall v : S \to \{0,1\} \ (v(\alpha_1) = \ldots = v(\alpha_n) = 1 \Rightarrow v(\alpha) = 1)$$

Przykłady

- modus ponens (reguła odrywania) cut rule $\quad \dfrac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta}, \quad \dfrac{\varphi, \varphi \to \psi}{\psi}$

• reguła generalizacji $\frac{\varphi}{\forall v \varphi}$ v: zmienna

$\forall$ - rule ("A" rule)

Aksjomatyczne ujęcie KRL

A0. przykłady tautologii KRZ

A1. $\forall v (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall v \psi)$ (gdy v nie jest zm. wolną φ)

A2. $\forall v \varphi \longrightarrow \varphi(v/t)$

pod warunkiem, że żadne z takich wystąpień v w φ nie jest w zasięgu kwantyfikatora wiążącego jakąś zmienną w t

[tu: $t \in J_L$, którego podstawiamy w φ za każde wolne wystąpienie zmiennej]

Istotne zastrzeżenie:

$\varphi: \exists y \; x \neq y$, $t = y$, $\varphi(x/t): \exists y \; y \neq y$

$\exists y (x \neq y) \to \exists y (y \neq y)$ nie jest tautologią.

Aksjomaty równości $\left(\begin{array}{l} v, v_1, v_2 \text{ – zmienne} \\ t \text{ – term} \\ \varphi \text{ – formuła} \end{array} \right)$

- $v = v$
- $v_1 = v_2 \longrightarrow t(\ldots v_1 \ldots) = t(\ldots v_2 \ldots)$
- $v_1 = v_2 \longrightarrow \left(\varphi(\ldots v_1 \ldots) \rightarrow \varphi(\ldots {}^{v_1}/_{v_2} \ldots) \right)$

Pod warunkiem, że to (wolne) wystąpienie v_1 pod które podstawiamy v_2 nie jest w zasięgu kwantyfikatora wiążącego v_2.

<u>Def. 2.9</u> Załóżmy, że $X \subseteq \mathcal{F}_L$, $\varphi \in \mathcal{F}_L$. Mówimy, że

$X \vdash \varphi \overset{def.}{\iff}$ istnieje ciąg formuł

„dowodzi"

$\underbrace{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}_{\text{dowód formalny}} = \varphi$ t. że $\forall i \leq n$:

1° $\alpha_i \in X$ lub α_i jest aksjomatem KRL

2° α_i wynika z $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}\}$ na mocy modus ponens lub $\forall$-reguły, tzn.

$\exists j, t < i \quad \alpha_t = (\alpha_j \rightarrow \alpha_i)$

$\left(\text{wtedy } \frac{\alpha_j, \alpha_t}{\alpha_i} \text{ przykład MP} \right)$

lub $\exists j < i \quad \alpha_i = \forall v \alpha_j$

Def. 2.10 $\vdash \varphi$, gdy $\emptyset \vdash \varphi$.

(φ jest tezą KRL)

Uwaga: $X \vdash \varphi \iff \exists \underset{\substack{\uparrow \\ \text{skończone}}}{X_0} \subseteq X \quad X_0 \vdash \varphi$

Przykład $\vdash \underline{\forall x \varphi \to \exists x \varphi}$

Gdyby struktura była pusta, to nie działa. Czemu?

$\beta: \forall x \varphi \to \neg \forall x \neg \varphi$

$\alpha_1: \forall x \varphi \to \varphi(x/y)$

$\alpha_2: \forall x \neg \varphi \to \neg \varphi(x/y)$

tu y: zmienna spoza φ

$\alpha_3: \alpha_2 \to (\varphi(x/y) \to \neg \forall x \neg \varphi(x))$ } AO, prawo transpozycji

$\alpha_4: \varphi(x/y) \to \neg \forall x \neg \varphi(x)$ {MP, α_2, α_3}

$\alpha_5: \alpha_1 \to (\alpha_4 \to \beta)$ [AO] $((\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)))$

$\alpha_6: \beta$ ($2 \times$ MP, $\alpha_1, \alpha_4, \alpha_5$)

Uwaga $\vdash \varphi \Rightarrow \models \varphi$, tzn. KRL jest poprawny (sound)

TW. 2.11 (Gödla o pełności KRL) completeness theorem

$$\models \varphi \Rightarrow \vdash \varphi$$

Def. 2.12 $X \subseteq \mathcal{F}_L$. $Cn(X) = \{\varphi \in \mathcal{F}_L : X \vdash \varphi\}$.
konsekwencje

X jest **teorią**, gdy $X = Cn(X)$.

Fakt 2.13 $\varphi \vdash \overline{\varphi}$ i $\overline{\varphi} \vdash \varphi$

d-d $\forall$-reguła

$\boxed{\vdash \overline{\varphi} \to \varphi}$

Def. 2.14 $X, Y \subseteq \mathcal{F}_L$ są **równoważne**, gdy

$$Cn(X) = Cn(Y)$$

Wniosek 2.15 X i $\{\overline{\varphi} : \varphi \in X\}$ są równoważne.

Def. 2.16 X jest **sprzeczny**, gdy istnieje zdanie φ t. że $X \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$. W przeciwnym razie mówimy, że X jest **niesprzeczny**

Def. 2.17 (1) $M \models X \iff \forall \varphi \in X \; M \models \varphi$
M jest modelem X

(2) X jest **zupełny** $\iff$ $\forall$ zdania φ ($X \vdash \varphi$ lub $X \vdash \neg\varphi$)

(3) X jest **rozstrzygalny** $\iff$ istnieje algorytm rozstrzygający, czy $X \vdash \varphi$ dla $\varphi \in \mathcal{F}_L$

Przykład (1) $Th(M) = \{\varphi \in \mathcal{F}_L : M \models \varphi\}$: niesprzeczna, zupełna
(teoria str. M)

(2) $\emptyset$ jest niesprzeczny

Tw. 2.18 (Gödel, o istnieniu modelu) Jeżeli S jest niesprzecznym zbiorem zdań, to S ma model (mocy $\leq \aleph_0 + |S|$)