~~Aksjomaty~~ ZFC Axioms

A1. (existence ~~istnienia~~) : "exists ~~istnieje~~ $\emptyset$" : $\exists x \forall y \; y \notin x$

A2. (~~ekst~~ extensionality)

If x, y have the same elements, then $x = y$

A3. (Pair) $\forall x, y \; \exists z \; \forall t \; (t \in z \Leftrightarrow t = x \vee t = y)$

A4. Comprehension (wyróżniania)

Assume $\varphi(x, \bar{z}) \in \mathcal{F}_{L_{ZF}}$, X : a set $\rightsquigarrow$

$\exists Y = \{x \in X : \varphi(x, \bar{y})\}$

Formally : axiom scheme for a formula $\varphi(x, \bar{z})$.

$$\forall x \; \exists y \; \forall t \; (t \in y \Leftrightarrow t \in x \wedge \varphi(t, \bar{z}))$$

A5. Union : $\forall x \; \bigcup x$ exists

A6. Power set : $\forall x \; \exists \mathcal{P}(x)$

A7. Replacement (zastępowania)

If $\varphi(x, y, \bar{z}) \in \mathcal{F}_{L_{ZF}}$ is a function [i.e. $\forall x \exists! y \; \varphi(x, y, \bar{z})$]

then $\forall X \; \exists Y = \{y : (\exists x \in X) \; \varphi(x, y, \bar{z})\}$

A8. Infinity ("There is an infinite set")

How to write it down?

For example : $\mathrm{ind}(x) = (\forall y \in x)(y \cup \{y\} \in x) \wedge \emptyset \in x$
(inductive)

Axiom : $\exists x \; \mathrm{ind}(x)$

A9. Regularity $\forall x \neq \emptyset \; \exists y \in x \; y \cap x = \emptyset$.

A10. Choice Axiom:

If $\forall a \in A \; a \neq \emptyset$, then $\exists f : A \longrightarrow \bigcup A \; \forall a \in A \; f(a) \in a$

Remark 1. (ZFC) $\neg \exists x \forall y \; y \in x$ (There is no set of all sets)

<u>Proof</u> Suppose not and x is the set (capo di tutti capi) of all sets. Then x violates several axioms:

- comprehension: let $x' = \{y \in x : y \notin y\}$ ⇝ Russell antinomy

(• regularity + pair)
$x \in x \Rightarrow \underline{\underline{\{x\}}}$

<u>Therefore</u> <u>classes</u>

Let $\varphi(x, \bar{y}) \in F_{L_{ZF}}$

then for every $\bar{y}$ we think of $\varphi(x, \bar{y})$ as class $C_{\varphi, \bar{y}} = \{x : \varphi(x, \bar{y})\}$

A class is <u>proper</u> if ~~there~~ it is not a set.

$C_{\varphi, \bar{y}}$

Example: $C_{=} = \{x : x = x\}$ is a proper class.

Natural numbers: $\mathbb{N} = \bigcap \{x : ind(x)\}$: a set

because: let x_0: inductive (by ∞-axiom).

5. Wymagania techniczne i edytorskie

5.1 Zaleca się przygotowywanie prac dyplomowych przy użyciu programu TeX, z uwagi na przystosowanie tego programu do profesjonalnego składu tekstów matematycznych. Dopuszczalne jest przygotowywanie prac dyplomowych przy użyciu programu Microsoft Word lub podobnych edytorów tekstu, pod warunkiem zachowania zasad składu tekstów matematycznych.

5.2 Strona tytułowa pracy dyplomowej powinna być zgodna ze wzorem umieszczonym na stronie Instytutu Matematycznego (zakładka Praca dyplomowa).

5.3 Strony pracy dyplomowej powinny być numerowane zaczynając od strony tytułowej.

Then $\mathbb{N} = \{t \in x_0 : \forall x\, (\mathrm{ind}(x) \to t \in x)\}$

exists by comprehension axiom.

$\mathbb{N}$: the smallest inductive set.

$\underset{\substack{\| \\ 0}}{\emptyset} \in \mathbb{N}$, $\underset{\substack{\| \\ 1=\{0\}}}{\emptyset \cup \{\emptyset\}} \in \mathbb{N}$, $\underset{\substack{\| \\ 1\cup\{1\}=\{0,1\}}}{2} \in \mathbb{N}$, $\dots$, $\overset{\substack{\mathbb{N} \\ \Downarrow}}{n} = \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Def. $\mathrm{Ord}(x) = \begin{cases} \text{"}(x, \in) \text{ is a well-ordered set"} \\ \text{and} \\ \underline{\forall y \in x\ y \subseteq x} \end{cases}$

that is: "x is transitive".

<u>Fact</u>. (ZF) $\mathrm{Ord}(x) \wedge \mathrm{Ord}(y) \to \begin{cases} x \in y \ \underline{\vee}\ y \in x \ \underline{\vee}\ x = y \\ \text{and} \\ \mathrm{Ord}(x \cup \{x\}) \end{cases}$

(2) $\mathrm{Ord}(x) \wedge y \in x \Rightarrow \mathrm{Ord}(y) \wedge$

x transitive $\Rightarrow \Downarrow$ $y \subseteq x$ "y : an initial segment of x".

(3) $\neg\exists x\ \ x = \{y : \mathrm{Ord}(y)\}$ (But $\mathrm{Ord} = \{y : \mathrm{Ord}(y)\}$ is a (proper) class)

<u>Proof</u> (3) Suppose $x = \{y : \mathrm{ord}(y)\}$.

Then $\mathrm{ord}(x)$, hence $x \in x$.

Let $x' = \{x\}$. x' violates regularity axiom

since: $y \in x' \Rightarrow y \cap x' \neq \emptyset$

<u>Remark</u> Ord is a well-ordered (by $\in$) class.

$\mathrm{Ord}(x) \Rightarrow \underset{x+1}{\overset{\text{transitive}}{x \cup \{x\}}} \in \mathrm{Ord}$: a successor of x

Examples of ordinal numbers: (Ord)

$$\underbrace{0, 1, 2, \ldots}_{= \mathbb{N}} ; \underset{\mathbb{N}}{\overset{\omega}{\|}}, \omega+1, \omega+2, \ldots, \underset{\bigcup_{n<\omega} \omega+n}{\overset{\omega+\omega}{\|}}, \ldots$$

$\| \leftarrow$ replacement axiom

$\omega_1, \quad \omega_1 + 1, \ldots,$

$\| \nwarrow$ uncountable

$\{\alpha \in Ord : \alpha \text{ countable}\}$

~~Von~~ Neumann hierarchy of sets V_α, $\alpha \in Ord$:

- $V_0 = \emptyset$
- $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$
- $V_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} V_\alpha$, when λ: limit ordinal

] transfinite recursion.

How to ~~invent~~ define V_α honestly, by an L_{ZF}-formula?

$$x = V_\alpha \iff (\exists f : \text{function}) \left(\mathrm{Dom}\, f = \alpha + 1 \wedge \begin{cases} f(0) = \emptyset \\ (\forall \beta < \alpha)\ f(\beta+1) = \mathcal{P}(f(\beta)) \\ (\forall \beta < \alpha)\ (\mathrm{Lim}(\beta) \rightarrow f(\beta) = \bigcup_{\gamma<\beta} f(\gamma)) \end{cases} \text{ and } f(\alpha) = x \right)$$

f: a constructor function/sequence

5. Wymagania techniczne i edytorskie

5.1 Zaleca się przygotowywanie prac dyplomowych przy użyciu programu TeX, z uwagi na przystosowanie tego programu do profesjonalnego składu tekstów matematycznych. Dopuszczalne jest przygotowywanie prac dyplomowych przy użyciu programu Microsoft Word lub podobnych edytorów tekstu, pod warunkiem zachowania zasad składu tekstów matematycznych.

5.2 Strona tytułowa pracy dyplomowej powinna być zgodna ze wzorem umieszczonym na stronie Instytutu Matematycznego (zakładka Praca dyplomowa).

5.3 Strony pracy dyplomowej powinny być numerowane zaczynając od strony tytułowej.

Fact, (1) $V_\alpha \subseteq V_\beta$ for $\alpha < \beta$

(2) $\alpha \in V_{\alpha+1} \setminus V_\alpha$

(3) $\forall x \, \exists \alpha \; x \in V_\alpha$ hence $\forall x \; x \in V$

[here: $V = \bigcup_{\alpha \in Ord} V_\alpha$: a class proper class

$x \in V \iff \exists \alpha \, (Ord(\alpha) \wedge x \in V_\alpha)$]

Proof, (1), (2) : exercises.

(3) (a.a.) Suppose $x \notin V$.

Claim $\exists x' \notin V \; \forall y \in x' \; y \in V$

Proof Case 1 $\forall y \in x \; y \in V$. Then let $x' = x$.

Case 2.: $\boxed{\neg \text{ Case } 1}$

Let $x_1 = \underbrace{x \cup \bigcup x \cup \bigcup\bigcup x \cup \bigcup\bigcup\bigcup x \cup \dots}_{\substack{\shortparallel \\ TC(x)}}$,

$TC(x)$, transitive closure of x
(the smallest transitive set y s.t. $x \subseteq y$) ~~and~~

[Exercise:
$a \in TC(x) \Rightarrow a \subseteq x$.]

Now: if $x_1 \in V$, then $x \subseteq x_1$, hence $x \in V$ ↯.

So $x_1 \notin V$.

Let $y = \{t \in x_1 : t \notin V\}$. ~~B~~

If $y = \emptyset$, then $x_1 \subseteq V$ and we ~~are~~ are done in the Claim.

Otherwise $y \neq \emptyset$. By regularity choose $(*)\begin{cases} x' \in y \text{ with} \\ x' \cap y = \emptyset. \end{cases}$

So $x' \in x_1 \Rightarrow x' \subseteq x_1$

and by $(*)$ $\underbrace{\forall v \in x' \ v \in V}_{x' \subseteq V.}$ claim $\dashv$

Now we define

$$f : x' \longrightarrow Ord \quad f(\underset{x'}{\underset{\cap}{v}}) = \min\{\alpha : v \in V_\alpha\}$$

By replacement axiom:

$Rng\, f$ is a set. Hence $\bigcup Rng\, f = \beta \in Ord$.

$x' \subseteq V_\beta \Rightarrow x' \in V_{\beta+1}$. ↯.

<u>Thm</u> (on transfinite induction).

Let $\varphi(x, \bar{y}) \in F_{L_{ZF}}$.

<u>If</u> $\varphi(0, \bar{y})$ and $(\forall \alpha \in Ord)(\forall \beta < \alpha\ \varphi(\beta, \bar{y}) \rightarrow \varphi(\alpha, \bar{y}))$

<u>then</u> $\forall \alpha \in Ord\ \varphi(\alpha, \bar{y})$.

V is very ample (obszerny): interprets (practically) all mathematics

<u>Troubles</u> (1) V is too ample (allows existence of pathological objects, like Banach-Tarski paradox)

5. Wymagania techniczne i edytorskie

5.1 Zaleca się przygotowywanie prac dyplomowych przy użyciu programu TeX, z uwagi na przystosowanie tego programu do profesjonalnego składu tekstów matematycznych. Dopuszczalne jest przygotowywanie prac dyplomowych przy użyciu programu Microsoft Word lub podobnych edytorów tekstu, pod warunkiem zachowania zasad składu tekstów matematycznych.

5.2 Strona tytułowa pracy dyplomowej powinna być zgodna ze wzorem umieszczonym na stronie Instytutu Matematycznego (zakładka Praca dyplomowa).

5.3 Strony pracy dyplomowej powinny być numerowane zaczynając od strony tytułowej.

(2) There are simple L_{ZF}-sentences undecidable in ZFC, e.g. CH: $(\forall X \subseteq \mathbb{R})$ (X countable or $X \sim \mathbb{R}$)

Positive aspects of V:

V ~~is ver~~ interprets all mathematics

$\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\} = \omega \in V_{\omega+1}$. $\mathbb{R} = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \in V_{\omega+2}$.

$\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \in V_{\omega+5}$ (mathematical analysis)

CH:

① Gödel (~1930) $\vdash \mathrm{Con}\,ZFC \longrightarrow \mathrm{Con}(ZFC + CH)$

② Cohen (~1960) $\vdash \mathrm{Con}\,ZFC \longrightarrow \mathrm{Con}(ZFC + \neg CH)$

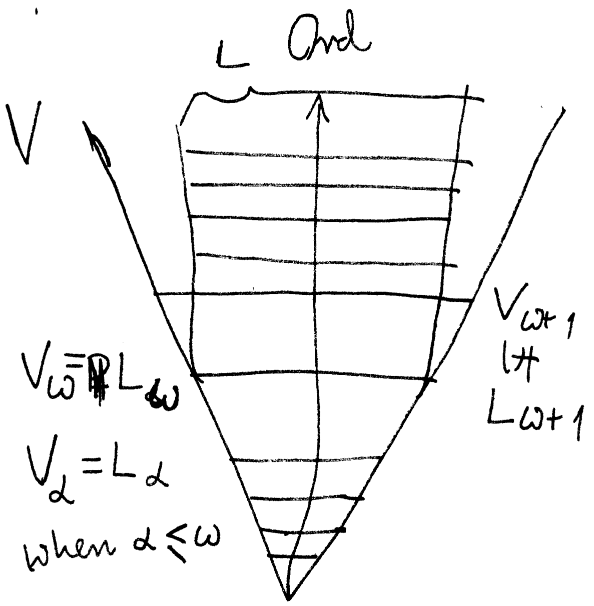
Ad ①: constructible universe L: (Gödel universe)

$L_0 = \emptyset$, $L_{\alpha+1} = \mathrm{Def}(L_\alpha, \in) =$

$$= \{X \subseteq L_\alpha : \overline{\exists \varphi(x, \bar{y}) \in \mathcal{F}_{L_{ZF}}\ \exists \bar{a} \subseteq L_\alpha\ \ \underbrace{X = \{b \in L_\alpha : (L_\alpha, \in) \models \varphi(b, \bar{a})\}}_{\text{how to write it down in } L_{ZF}?}}\}$$

$L_\delta = \bigcup_{\alpha < \delta} L_\alpha$, $\delta \in \mathrm{Lim}$

$L = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{Ord}} L_\alpha$: a proper class



Fact

(1) $Ord \subseteq L \subseteq V$

(2) $\alpha \subseteq L_\alpha \subseteq V_\alpha$, $\alpha \in L_{\alpha+1}$

(3) "$L \models ZFC + CH$"
(But: L is not a set)

(4) there is a total well-ordering on L

(5) $L \models (ZFC + V = L)$

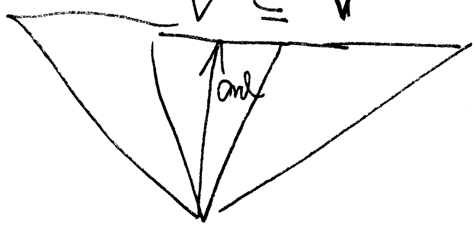
Ad ② Cohen forcing, boolean models :

Idea 1. ~~boolean~~ logical values of sentences $\in \mathbb{B}$: a boolean algebra.

$$\varphi \Rightarrow [\![\varphi]\!]_{\mathbb{B}} \in \mathbb{B}.$$

2. Construct a boolean universe $V^{\mathbb{B}} \supseteq V$ consisting of "boolean terms"

$V \subseteq V^{\mathbb{B}}$



$$V_0^{\mathbb{B}} = \emptyset$$

$$V_{\alpha+1}^{\mathbb{B}} = \{ f : f \text{ a function, } Dom\, f \subseteq V_\alpha^{\mathbb{B}}, Rng\, f \subseteq \mathbb{B} \}$$

f = a set of pairs $\langle x, b \rangle$, where $x \in V_\alpha^{\mathbb{B}}$, $b \in \mathbb{B}$

5.3 Strony pracy dyplomowej powinny być numerowane zaczynając od strony tytułowej.

5.2 Strona tytułowa pracy dyplomowej powinna być zgodna ze wzorem umieszczonym na stronie Instytutu Matematycznego (zakładka Praca dyplomowa).

5.1 Zaleca się przygotowywanie prac dyplomowych przy użyciu programu TeX, z uwagi na przystosowanie tego programu do profesjonalnego składu tekstów matematycznych. Dopuszczalne jest przygotowywanie prac dyplomowych przy użyciu programu Microsoft Word lub podobnych edytorów tekstu, pod warunkiem zachowania zasad składu tekstów matematycznych.

5. Wymagania techniczne i edytorskie

Idea $[\![t \in f]\!]_{\mathbb{B}} = b$, where $\langle t, b \rangle \in f$.

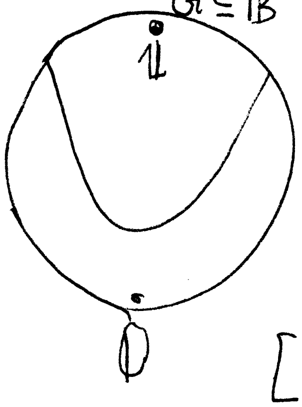
$\mathbb{B}$ chosen so that:

- $[\![\varphi]\!]_{\mathbb{B}} = 1\!\!1_{\mathbb{B}}$ for every $\varphi \in ZFC$
- $[\![CH]\!]_{\mathbb{B}} \neq 1\!\!1_{\mathbb{B}}$

hence: If ZFC is consistent, then $ZFC \nvdash CH$

3. Additional trick. (Solovay, 1970)

$G \subseteq \mathbb{B}$: a filter, even ultrafilter, so $\mathbb{B}/G \cong \{0, 1\!\!1\}$



"$V^{\mathbb{B}}/G$" $= V[G]$: a "real model" of $ZFC + \neg CH$

G: a generic ultrafilter in $\mathbb{B}$

[this trick is possible under some additional assumptions, like that V: countable]

But:

Gödel $\vdash \underbrace{Con(ZFC)}_{\text{i.e: "ZFC is consistent"}} \longrightarrow ZFC \nvdash Con(ZFC)$

So if ZFC is consistent, then $ZFC \nvdash \exists M \models ZFC$.

(nothing to say of a countable $M \models ZFC$)

But. Def $\overset{CN}{\varkappa}$ is (strongly) inaccessible if $\varkappa > \aleph_0$, $\varkappa$ regular (i.e. $cf(\varkappa) = \varkappa$) and $\forall \alpha < \varkappa \; 2^\alpha < \varkappa$.

Fact $\varkappa$ inaccessible $\Longrightarrow (V_\varkappa, \in) \models ZFC$.

Corollary:

$$\underbrace{ZFC + \text{"}\exists \kappa : \text{inaccessible"}}_{\substack{\parallel \\ \text{call it: } ZFC'}} \vdash Con(ZFC)$$

But: (Gödel thm). $Con\, ZFC' \Rightarrow ZFC' \nvdash Con(ZFC')$.

How to write down a sentence: "$Con\, ZFC$"?

$L_{ZF} \subseteq V_\omega$ (a natural interpretation or a Gödel numbering)

<u>Remark</u> The relation $Sat(M, \varphi, \bar{a}) \Leftrightarrow (M, \in) \models \varphi(\bar{a})$

[where $\varphi \in L_{ZF}$, $\bar{a} \subseteq M$]

is definable $\overset{\text{"}}{\varphi}(\bar{x})$ by a formula of L_{ZF} [exercise].

But (thinking of L_{ZF} as a subset of V_ω):
The relation $True(\varphi) \Leftrightarrow V \models \varphi$ is not definable in V

<u>Warning</u>! (Tarski thm on non-definability of truth, a special case)

Hence: research on "large cardinal numbers".

For example: $\kappa \in CN$ is measurable if $\kappa > \aleph_0$ and

5. Wymagania techniczne i edytorskie

5.1 Zaleca się przygotowywanie prac dyplomowych przy użyciu programu TeX, z uwagi na przystosowanie tego programu do profesjonalnego składu tekstów matematycznych. Dopuszczalne jest przygotowywanie prac dyplomowych przy użyciu programu Microsoft Word lub podobnych edytorów tekstu, pod warunkiem zachowania zasad składu tekstów matematycznych.

5.2 Strona tytułowa pracy dyplomowej powinna być zgodna ze wzorem umieszczonym na stronie Instytutu Matematycznego (zakładka Praca dyplomowa).

5.3 Strony pracy dyplomowej powinny być numerowane zaczynając od strony tytułowej.

and $\exists\, \mathcal{U} \subseteq P(\varkappa)$ an ultrafilter, closed under intersections of length $< \varkappa$.
(non-principal)

[like a $\varkappa$-additive (0-1)-measure on $P(\varkappa)$]

Def. An ultrafilter $\mathcal{U}$ on I is called $\varkappa$-complete if $\mathcal{U}$ is closed under intersections of length $< \varkappa$.

<u>Remark</u> $ZFC \vdash$ Peano arithmetic PA is consistent (as $ZFC \vdash \mathbb{N} \models PA$).

Interpretations in ZFC:

- an ordered pair: $\underbrace{\langle a, b \rangle}_{\text{remembers of its 1. and 2. coordinate}} = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ (Kuratowski) may be defined in many ways.
- more generally:
  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle a_1, \langle a_2, \dots, \langle a_{n-1}, a_n \rangle \dots \rangle\rangle$ nested sharp parentheses.
- relation R in a set A:
  $R \subseteq A^k = \{\langle a_1, \dots, a_k \rangle : a_i \in A\}$
- function $f : A \longrightarrow B$ "=" 1-valued relation $f \subseteq A \times B$.
- similarly formulas of L_{ZF} may be regarded as some elements of V_ω (so that $L_{ZF} \subseteq V_\omega$)
- logical connectives, quantifiers as some operators

on $L_{ZF} \subseteq V_\omega$

$\wedge(\varphi, \psi) = \varphi \wedge \psi, \quad \exists x_i \varphi \quad \ldots$

Assume $M = (A, R)$: an L-structure, where $L = \{\underline{R}\}$

A: finite $\neq \emptyset$ / from the real world.

$\underline{R}$: binary relational symbol

Then $\exists M' \in V_\omega \quad M' \cong M$.

<u>Proof</u> (1) We find $A' \in V_\omega \quad |A'| = |A|$.

(2) We find $R' \subseteq A' \times A'$, $R' \in V_\omega$ s.t.

$\langle A', R' \rangle \cong \langle A, R \rangle$

(3) $M' = \langle A', R' \rangle \in V_\omega$. $M' \cong M$, but ~~M count~~ M matters up to $\cong$!

Alternative set theories:

Example : New Foundations : NF, Quine ~~≈~~ ~ 1940.

$L = \{L_{ZF} = \{\in\}$.

5. Wymagania techniczne i edytorskie

5.1 Zaleca się przygotowywanie prac dyplomowych przy użyciu programu TeX, z uwagi na przystosowanie tego programu do profesjonalnego składu tekstów matematycznych. Dopuszczalne jest przygotowywanie prac dyplomowych przy użyciu programu Microsoft Word lub podobnych edytorów tekstu, pod warunkiem zachowania zasad składu tekstów matematycznych.

5.2 Strona tytułowa pracy dyplomowej powinna być zgodna ze wzorem umieszczonym na stronie Instytutu Matematycznego (zakładka Praca dyplomowa).

5.3 Strony pracy dyplomowej powinny być numerowane zaczynając od strony tytułowej.

Idea: avoid Russell antinomy

$$\{x : \underbrace{x \notin x}_{\neg x \in x \text{ strange formula}} \}$$

Avoid strange formulas.

<u>Def</u> $\varphi \in L_{ZF}$ is <u>stratifiable</u> if

$\exists f : Var(\varphi) \longrightarrow \mathbb{N}$ $\forall x, y \in Var(\varphi)$
all variables in φ

$$\begin{cases} \text{If } x = y \text{ appears in } \varphi\text{, then } f(x) = f(y) \\ \text{If } x \in y \text{ appears in } \varphi\text{, then } f(y) = f(x) + 1. \end{cases}$$

Axioms of NF:

1. Extensionality: $\cancel{x}$ $\forall t \, (t \in x \Leftrightarrow t \in y) \longrightarrow x = y$
2. "Stratified" full comprehension:
   Assume $\varphi(x, \bar{y})$ is stratifiable. Then
   $\exists z \, \forall x \, (x \in z \Longleftrightarrow \varphi(x, \bar{y}))$ (there is $z = \{x : \varphi(x, \bar{y})\}$)

· NF is finitely axiomatizable

· In NF: there is a set of all sets.