6.10.2021

Formalizacja matematyki: struktury, języki, spełnianie.

Uproszczony model rzeczywistości matematycznej: struktura (I rzędu)

Def. 1.1 $\mathcal{M} = (A, f_1, f_2, \dots, f_k, P_1, \dots, P_n, c_1, \dots, c_l)$

$\mathcal{M}$ – model, struktura

A – zbiór $\neq \emptyset$, uniwersum struktury $\mathcal{M}$

$f_1, \dots, f_k$ – funkcje, $f_i : A^{n_i} \longrightarrow A$ (n_i – "arność")

$P_1, \dots, P_n$ – predykaty w A (relacje), $P_i \subseteq A^{m_i}$

$c_1, \dots, c_l$ – stałe, $c_i \in A$

Przykłady

- gdy $n = 0$, $\mathcal{M}$ nazywamy strukturą algebraiczną (grupy, ciała)
- V, rodzina zbiorów, $(V, \in)$, $\in$ – relacja binarna

Zdania o $\mathcal{M}$:

w pewnym języku: f_i, P_j, c_t to symbole oznaczające funkcje, relacje, stałe.

Odróżniamy między symbolem, a jego znaczeniem.

$\underline{f_i}, \underline{P_j}, \underline{c_l}$ ← te dolne kreski mają zaznaczać, że mamy na myśli **symbol**,

f_i, P_j, c_l ← ich znaczenia w strukturze $\mathcal{M}$

<u>Def. 1.2</u> **Język** $L = \{\underline{f_1}, \dots, \underline{f_k}, \underline{P_1}, \dots, \underline{P_n}, \underline{c_1}, \dots, \underline{c_t}\}$ (struktury $\mathcal{M}$) wraz z arnościami tych funkcji i relacji

Inaczej: typ podobieństwa struktury $\mathcal{M}$, sygnatura $\mathcal{M}$

f_i, P_j, c_l to **interpretacje** $\underline{f_i}, \underline{P_j}, \underline{c_l}$

Mówimy, że $\mathcal{M}$ jest **modelem** dla L.

Def. 1.3 $\mathcal{M}$: **model** dla L

$$\left(M, f_1^{\mathcal{M}}, \ldots, f_k^{\mathcal{M}}, \underline{P}_1^{\mathcal{M}}, \ldots, \underline{P}_n^{\mathcal{M}}, \underline{c}_1^{\mathcal{M}}, \ldots, \underline{c}_t^{\mathcal{M}}\right)$$

uniwersum (oznaczone też $|\mathcal{M}|$) funkcje relacje stałe w $\mathcal{M}$, interpretacje symboli $f_i, \underline{P}_j, \underline{c}_l$ odpowiednich arności

Jak mówić w L? Do tego służą:

- symbole języka,
- symbole logiczne: $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$, $\forall, \exists, x_i \ (i \in \mathbb{N})$ zmienne
- symbol równości: $=$
- symbole pomocnicze (nawiasy, przecinki..)

$\Rightarrow, \Leftrightarrow$ to META SYMBOLE

Def. 1.4 Wyrażenia języka L:

1. wyrażenia nazwowe (**termy**): zbiór termów T_L języka L, def. rekurencyjnie.
   - zmienna, symbol stałej $\in T_L$ (termy **atomowe**)

• $\tau_1, \dots, \tau_n \in T_L$, f: symbol funkcji z L, n-arny

wtedy $f(\tau_1, \dots, \tau_n) \in T_L$

term złożony

term stały: term bez zmiennych

2. formuły języka L: F_L

formuły atomowe

• $(\tau_1 = \tau_2) \in F_L$

termy

• P_j – n-arny symbol relacyjny

$P_j(\tau_1, \dots, \tau_n) \in F_L$

formuły złożone

• $\varphi, \psi \in F_L \Rightarrow (\neg\varphi), (\varphi \wedge \psi) \in F_L$

• v: zmienna, $\varphi \in F_L$, wtedy

$\exists v\, \varphi$, $\forall v\, \varphi \in F_L$

"zasięg" $\exists v$ w $\exists v \varphi$

Przykład

$$\forall x \exists y (x \in y \wedge \forall x (x \in y \Rightarrow x = y))$$

w $L = \{\in\}$ (binarny symbol rel.)

Def. 1.5 Niech $\varphi \in \mathcal{F}_L$, v: zmienna występująca w φ.

- Jeśli to wystąpienie v w φ jest w zasięgu pewnego kwantyfikatora Q w v, to spośród wszystkich takich wystąpień Qv w φ, w których v jest zasięgu, wybieramy to najbardziej na prawo i mówimy, że to Qv **wiąże** to wystąpienie v w φ.
- Jeżeli takiego Qv nie ma, to mówimy, że v w φ jest **wolne**.
- v jest **wolne** w φ, gdy istnieje jej wolne wystąpienie

Konwencja: zapis $\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n)$ oznacza, że wszystkie zmienne wolne w φ są wśród $v_1, \dots, v_n$.

Def. 1.6 **Zdaniem** w L nazywamy formułę bez zmiennych wolnych.

Co to znaczy, że formuła jest prawdziwa w strukturze M dla L?

(św. Tomasz: prawdziwy sąd to taki, który jest zgodny z rzeczywistością)

Def. 1.7 Model M dla L.

$(M, f_1^M, \dots \underline{P}_1^M \dots \underline{c}_1^M)$ $\{f_1 \dots f_k, \underline{P}_1, \dots, \underline{P}_m, \underline{c}_1 \dots \underline{c}_t\}$

Niech $A = \{\underline{a} : a \in M\}$, zbiór NOWYCH symboli stałych.

Tworzymy nowy język $L(M) = L \cup A$. Interpretacje termów stałych τ w $L(M)$ w M:

- gdy $\tau = \underline{c}_i \rightsquigarrow \tau^M = \underline{c}_i^M$

  meta-symbol

- gdy $\tau = \underline{a} \rightsquigarrow \tau^M = a$

  $a \in M$

  termy atomowe

- gdy $\tau = f_i(\tau_1, \dots, \tau_n)$

$$\tau^M = f_i^M(\tau_1^M, \dots, \tau_n^M)$$

Def. 1.8 **Spełnianie** zdań φ języka $L(M)$ w M:

$M \models \varphi$: "φ jest **prawdziwe** w M"
spełnione

1. Zdania atomowe

meta symbol

- $M \models \tau_1 = \tau_2 \iff \tau_1^M = \tau_2^M$
- $M \models \underline{P_j}(\tau_1, \ldots \tau_n) \iff \langle \tau_1^M, \ldots, \tau_n^M \rangle \in \underline{P_j}^M$

2. Zdania złożone

- $M \models \varphi \wedge \psi \iff M \models \varphi$ oraz $M \models \psi$
- $M \models \neg \varphi \iff$ nieprawda, że $M \models \varphi$.
- $M \models \exists v\, \varphi \iff$ istnieje $a \in M$ t. że $M \models \varphi(\underline{a})$, gdzie $\varphi(\underline{a})$ powstaje z φ przez zastąpienie każdego wolnego v przez symbol $\underline{a}$.

Def. 1.9 Jeżeli zdanie φ nie jest prawdziwe w M, to mówimy, że jest **fałszywe** w M.

Konwencja: spełnienie w M formuły $\varphi(x_1, \dots, x_n)$: $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ spełnia $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, gdy

$$M \models \varphi(\underline{a}_1, \dots \underline{a}_n)$$

Def. 1.10 **Uniwersalne domknięcie** formuły φ: $\overline{\varphi} = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \varphi$

Mówimy, że $M \models \varphi \iff M \models \overline{\varphi}$

[to znamy dobrze, np. kiedy mówimy o łączności działania w grupie, to zwykle piszemy $(xy)z = x(yz)$, a nie $\forall x \forall y \forall z \, ((xy)z = x(yz))$.]