ex. 3 $N = \prod_{i<\omega} \mathbb{N} / \mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ - non-principal ultrafilter on $\mathcal{U}$.

<u>Lemma</u> If $\mathcal{U}$ is a non-principal ultrafilter, then

(a) if $X \in \mathcal{U}$, then $\forall x \in X \quad X \setminus \{x\} \in \mathcal{U}$

(b) every cofinite set of $\mathbb{N}$ is in $\mathcal{U}$.

<u>Proof</u> (a) Take any $X \in \mathcal{U}$, $x \in X$. Suppose $X \setminus \{x\} \notin \mathcal{U}$. Then $X' \cup \{x\} \in \mathcal{U}$

$$\Longrightarrow (X' \cup \{x\}) \cap X \in \mathcal{U}$$

$$\Longrightarrow \{x\} \in \mathcal{U} \qquad ↯$$

(b) $\mathbb{N} \in \mathcal{U}$, so by simple induction $\mathbb{N} \setminus \{x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{U}$ for any $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$. $\square$

To solve our task: take $\langle a_i \rangle_{i<\omega} \subseteq \mathcal{V}$

where $b_i = \langle \underbrace{0, \dots, 0}_{i}, 1, 2, 3, \dots \rangle \in a_i$, $i < \omega$.

Then $a_i < a_{i+1}$ for any $i < \omega$:

Take b_i, b_{i+1} as representatives for a_i, a_{i+1}.

Then
$$\begin{array}{ccccccccccccc} b_i = \langle & 0, & \dots, & 0, & 1, & 2, & 3, & \dots & \rangle \\ & \parallel & & \parallel & \vee & \vee & \vee & \vee & \\ b_{i+1} = \langle & 0, & \dots, & 0, & 0, & 1, & 2, & \dots & \rangle, \end{array}$$

so the set $\{ j : b_{i,j} > b_{i+1,j} \}$ is cofinite, so it is in $\mathcal{U}$, thus $a_i < a_{i+1}$, so $\langle a_i \rangle_{i<\omega}$ is decreasing.

Zad. 5 Pokazać, że $M = \prod_{n<\omega} M_i / \mathcal{U}$ jest $\aleph_1$-nasycone.

<u>Dowód</u> Weźmy $A \subseteq M$, $|A| < \aleph_1$. Weźmy dowolny typ $p(x) \in S_1^M(A)$. Formuły w $p(x)$ są z języka $\mathcal{L}(A)$, jednak my chcielibyśmy w pewnym momencie skorzystać z tw. Łosia, dlatego każde $\hat{\varphi}(x) \in p(x)$ traktujemy jako parę $\varphi(x, \bar{y}) \in F_L$ i $\bar{a}^\varphi = a^\varphi_{i_1}, \dots, a^\varphi_{i_{k_\varphi}} \subseteq M$, takie że $\varphi(x, \bar{a}^\varphi)$ jest tożsame z $\hat{\varphi}(x)$.

Teraz umiemy już mówić co to znaczy, że M_i spełnia $\hat{\varphi}(x)$: $M_i \models \hat{\varphi}(x) \iff$
$\iff M_i \models \varphi(x, \bar{a}^\varphi(i))$. Dla czytelności pominę $\bar{a}^\varphi$ w dalszej części rozwiązania.

Z przeliczalności $\mathcal{L}$ oraz A mamy, że $p(x)$ przeliczalny. Niech zatem $p(x) = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots\}$.
Skoro $p(x)$ niesprzeczny, to

$$M \models \exists x \bigwedge_{i \le n} \varphi_i(x) \overset{\text{Łoś}}{\iff} \{ j : \overbrace{M_j \models \exists x \bigwedge_{i \le n} \varphi_i(x)}^{(*)} \} \in \mathcal{U}.$$

Niech $n_j = \max\{ n : j \geq n$ oraz $(*)\}$.

Słownie, n_j jest ostatnim takim prefiksem n nie dłuższym niż j, że M_j spełnia ten prefiks formuły. Wtedy $[f]_\sim \in M$ t. że

- Jeżeli $n_j = 0$, wtedy $f(j) \in M_j$ dowolne
- w p.p. $f(j) = a_j$ t. że $M_j \models \bigwedge_{i \le n_j} \varphi_i(a_j)$

Wtedy $[f]_\sim$ realizuje $p(x)$. Weźmy dowolne $n < \omega$. Wtedy dla każdego $j \geq n$ t. że $(*)$ mamy $n_j \geq n$, zatem

$M_j \models \varphi_n(f(j))$, ale $\{ j \geq n$ i $(*)\} \in \mathcal{U}$,

więc z tw. Łosia $M \models \varphi_n([f]_\sim)$.

■