Zad. 1

$$\begin{tikzcd} (a) \arrow[rr, Leftrightarrow] & & (c) \\ & (b) \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[ur, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

1° (a) $\Leftrightarrow$ (c)

$$\vdash (\varphi \wedge \psi) \to \chi \overset{\text{Gödel}}{\Longleftrightarrow} \models (\varphi \wedge \psi) \to \chi$$

$$\Leftrightarrow \forall M\text{-model } L \quad M \models (\varphi \wedge \psi) \to \chi$$

$$\Leftrightarrow \forall M\text{-model } L \quad M \models \varphi \wedge \psi \Rightarrow M \models \chi$$

$$\Leftrightarrow \forall M\text{-model } L \quad M \models \varphi, M \models \psi \Rightarrow M \models \chi$$

$$\Leftrightarrow \frac{\varphi, \psi}{\chi} \text{ jest poprawna}$$

2° (b) $\Rightarrow$ (a), ale nie odwrotnie: To wynika z dowodu tw. o dedukcji: jeśli nie mamy założenia o tym, że φ, ψ są zdaniami, to (a) $\Rightarrow$ (b) nie zachodzi, w drugą stronę działa zawsze.

Zad. 2

$$p(x) = \{ \exists y_1 : (y_1 = x) \wedge x+x \neq x,$$

$$\exists y_1, y_2 (y_1 = x \wedge y_2 + y_2 = x) \wedge x+x \neq x,$$

$$\exists y_1, y_2, y_3 (y_1 = x \wedge y_2 + y_2 = x \wedge y_3 + y_3 + y_3 = x) \wedge x+x \neq x,$$

$$\vdots$$

$$\}$$

Czyli w $p(x)$ są formuły ~~post~~ mówiące "x jest podzielny przez $1, 2, 3, \ldots, n$" oraz nie jest 0

Ten typ jest oczywiście niesprzeczny, ~~jest~~ nie ma też realizacji, no bo nie ma l. całkowitej podzielnej przez $1, 2, 3, \ldots$ wszystkie na raz.

Zad. 3 Yes. $M \equiv N \Rightarrow Def(M) \cong Def(N)$

as BA's.

<u>Proof</u>

$Def(M) \cong L_1(\emptyset) \cong Def(N)$

↑

This is the same for M and N,

because $Th(M) = Th(N)$, so the equiv. rel.

that gives $L_1(\emptyset)$ is the same. □

Zad. 4 ~~[illegible]~~ 2

(a) $p(x) \ni x+x=x \rightsquigarrow 0$ realizuje $p(x)$

$q(x) \ni x+x \neq x \rightsquigarrow$ cokolwiek $\neq 0$ realizuje $q(x)$

Trochę formalniej: $tp^{\mathbb{Q}}(0)$ to pierwszy typ,

$tp^{\mathbb{Q}}(q)$, $q \neq 0$ to drugi:

$tp^{\mathbb{Q}}(q) = tp^{\mathbb{Q}}(p)$, gdy $\begin{matrix} p \neq 0 \\ q \neq 0 \end{matrix}$.

(b) ~~Nieprzeliczalnie wiele~~ Przeliczalnie wiele.

Popatrzmy na formułę $\underbrace{x+x+\ldots+x}_{k} = \underbrace{y+y+\ldots+y}_{l}$

taką formułę spełniają takie p, q że $kp = ql$

czyli $\frac{p}{q} = \frac{l}{k} \longleftarrow l, k$ nieskracalne dają 1 typ,

takich par jest tyle co liczb wymiernych

i są realizowane dokładnie przez te liczby wymierne $\frac{l}{k}$.

Zad. 5 f jest jedn. ciągła $\overset{def.}{\iff}$ $\forall \varepsilon>0 \, \exists \delta>0 \, \forall x_1 x_2 \, (|x_1-x_2|<\delta \to |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon)$

"$\Leftarrow$" ~~(...)~~ Zał. że ~~istnieją tak~~

$$\mathbb{R} \models \exists n \in \mathbb{N} \, \forall m \in \mathbb{N} \, \exists x_1, x_2 \, (|x_1-x_2| < \tfrac{1}{m} \wedge |f(x_1)-f(x_2)| \geq \tfrac{1}{n})$$

(To równoważne temu, że f nie jest jedn. ciągła).

Niech n będzie tym świadkiem. Spójrzmy na typ

$$p(x_1, x_2) = \{ |x_1, x_2| < \tfrac{1}{m} \wedge |f(x_1)-f(x_2)| \geq \tfrac{1}{n} : m \in \mathbb{N} \}.$$

$\mathbb{R}^*$ ~~ma realizację~~ $p(x_1, x_2)$ jest oczywiście niesprzeczny: jeśli weźmiemy $p_0(x_1, x_2) \subseteq p(x_1, x_2)$,
skończone

to możemy dla największego m z którejś z formuł z $p_0(x_1, x_2)$ znaleźć świadków, oni będą realizowali całe $p_0(x_1, x_2)$.

$\mathbb{R}^*$ ma realizację $p(x_1, x_2)$ (pokazywaliśmy na ćw. że M $\aleph_1$-nasycony $\Rightarrow$ M realizuje wszystkie 2-typy).
o $< \aleph_1$ param.

Niech a, b to te realizacje. Wtedy $\varepsilon := b - a$.

Wtedy ~~$\forall n \in \mathbb{N}$~~ $\mathbb{R}^* \models |f(a+\varepsilon) - f(a)| \geq \frac{1}{n}$.

infinitezymalne,

bo $\mathbb{R}^* \models |b-a| < \frac{1}{m}$ dla $m \in \mathbb{N}$

„⇒" Zał. że $\underset{\mathbb{R}^*}{\mathbb{R}} \models \forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall x_1 x_2 \left(|x_1 - x_2| < \frac{1}{m} \to |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{n} \right)$

Weźmy dowolne $a, \varepsilon \in \mathbb{R}^*$. ~~Niech $a' = st(a)$, tzn.~~

infinitezymalne.

~~$a' \in \mathbb{R}$ oraz $\mathbb{R}^* \models a' = a + \varepsilon'$ infinitezymalne lub 0.~~

Wtedy $|f(a + \varepsilon) - f(a)|$ infinitezymalne.

Dowód: Weźmy $n \in \mathbb{N}$. Wybierzmy m: św. jedn. ciągłości f dla n.

Wtedy $\mathbb{R}^* \models |a + \varepsilon| < \frac{1}{m} \to |f(a+\varepsilon) - f(a)| < \frac{1}{n}$,

ale $\mathbb{R}^* \models |a + \varepsilon| < \frac{1}{m}$, zatem $\mathbb{R}^* \models |f(a+\varepsilon) - f(a)| < \frac{1}{n}$.

Zatem $|f(a + \varepsilon) - f(a)|$ infinitezymalne lub 0.

Zad. 6 $L = \{R\}$ ← ternarne relacje , $\exists! x\, \varphi(x) \iff \exists x\, \varphi(x) \wedge \forall y (\varphi(y) \to x = y)$

istnieje dokładnie jeden x

$$\cancel{\begin{aligned}\varphi: \forall x\, \exists y, z \Big[& \big(R(x,y,z) \vee R(y,x,z) \vee R(y,z,x)\big) \\ & \wedge \big(R(x,y,z) \to \neg R(y,x,z) \wedge \neg R(y,z,x)\big) \\ & \wedge \big(R(y,x,z) \to \neg R(x,y,z) \wedge \neg R(y,z,x)\big) \\ & \wedge \big(R(y,z,x) \to \neg R(x,y,z) \wedge \neg R(y,x,z)\big)\Big]\end{aligned}}$$

~~Słownie: φ mówi, że każdy x ma parę y, z (dokładnie jedną) taką, że razem spełniają R ale tylko w określonej kolejności.~~

$$\varphi: \forall x\, \exists! y, z \big(R(x,y,z) \wedge R(x,z,y) \wedge R(y,x,z) \wedge R(z,x,y) \wedge R(y,z,x) \wedge R(z,y,x)\big)$$

Słownie: dla każdego x są takie jedyne y, z że x, y, z spełniają R "w dowolnej kolejności".
Taka formuła mówi, że R dzieli elementy na rozłączne trójki.

W takim razie spektrum φ to modele, których moce są podzielne przez 3 (oczywiste jest, że dla każdej mocy $3 \cdot k$ istnieje taki model).

Zad. 7 Niech $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ będą kolejnymi formułami z T, które możemy efektywnie generować. ~~Niech A~~

Niech $A = \{\varphi_1, \varphi_1 \wedge \varphi_2, \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3, \dots\}$. Wtedy $Cn(A) = T$.

Wtedy algorytm, który sprawdza dla $\varphi \in \mathcal{F}$, czy $\varphi \in A$:

~~Alg~~ $n := 1$

$\psi := \varphi_0$

dopóki $|\varphi| < |\psi|$:

$\psi := \psi \wedge \varphi_n$ ← możemy to generować

$n := n + 1$

jeśli $\varphi = \psi$

~~zwróć~~ odpowiedz TAK

w p.p.

odpowiedz NIE

Algorytm zawsze się skończy, bo $|\varphi|$ sk., a $|\psi|$ rośnie w każdym kroku. Ponadto ψ to kolejne formuły z A, więc $\varphi \in A$ musi się w pewnym momencie zgodzić z ψ.

∎