Twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu

Źródło: Dan Burton, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Wiemy, że wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków. Ważnym zagadnieniem związanym z rozwiązywaniem równań wielomianowych jest umiejętność wyznaczenia wszystkich pierwiastków wielomianu, czyli po prostu wszystkich rozwiązań równania $W(x) = 0$.
Czasem jest to stosunkowo proste, czasem trudne, czasem wręcz niemożliwe. W tym materiale pokażemy, jak wyznaczyć pierwiastki wymierne wielomianu o współczynnikach całkowitych.

Twoje cele

- Podasz i udowodnisz twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych.
- Wyznaczysz pierwiastki wymierne wielomianu o współczynnikach wymiernych.
- Zastosujesz to twierdzenie do znalezienia wszystkich (również niewymiernych) pierwiastków wielomianu w niektórych przypadkach.

Przeczytaj

Twierdzenie: o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych

Dany jest wielomian $W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, w którym wszystkie współczynniki a_n, a_{n-1}, ..., a_1 i a_0 są liczbami całkowitymi, przy czym $a_n \neq 0$ i $a_0 \neq 0$. Jeżeli liczba wymierna $\frac{p}{q}$ zapisana w postaci ułamka nieskracalnego, w którym liczby p i q są całkowite jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to p jest dzielnikiem (dodatnim lub ujemnym) wyrazu wolnego a_0, zaś q jest dzielnikiem współczynnika a_n przy najwyższej potędze zmiennej.

Dowód

Dane są liczby całkowite p, q spełniające założenia.

Wiemy, że $W\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, czyli
$a_n \cdot \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \cdot \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + a_1 \cdot \frac{p}{q} + a_0 = 0$.

Po obustronnym przemnożeniu przez q^n mamy
$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1 pq^{n-1} + a_0 q^n = 0$, więc $a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots$
$+ a_1 pq^{n-1} = -a_0 q^n$

Zauważmy, że liczba
$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1 pq^{n-1} =$
$= p\left(a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \ldots + a_1 q^{n-1}\right)$
jest podzielna przez p, więc również $a_0 q^n$ musi być podzielna przez p.

Liczby p i q są z założenia względnie pierwsze (bo ułamek $\frac{p}{q}$ jest nieskracalny), więc p musi być dzielnikiem a_0.

Analogicznie dowodzimy, że q musi być dzielnikiem a_n.

Wystarczy zauważyć, że liczba
$a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1 pq^{n-1} + a_0 q^n = q\left(a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 q^{n-2} + a_0 q^{n-1}\right)$
czyli $a_n p^n$ musi być podzielne przez q.

Przykład 1

Wyznaczmy wszystkie pierwiastki rzeczywiste wielomianu
$W(x) = 2x^4 - 11x^3 + 4x^2 + 2x + 15$.

- Na początek sprawdźmy, czy wielomian ma pierwiastki całkowite. Zgodnie z twierdzeniem o pierwiastkach całkowitych wielomianu o współczynnikach całkowitych szukamy ich wśród dzielników wyrazu wolnego (liczby ± 1, ± 3, ± 5, ± 15).

- Po wykonaniu obliczeń można zauważyć, że $W(5) = 0$.
- Korzystając z twierdzenia Bézouta po wykonaniu odpowiedniego dzielenia wielomianów możemy więc zapisać $W(x) = (x-5)\left(2x^3 - x^2 - x - 3\right)$.
- Zajmiemy się teraz wielomianem $W_1(x) = 2x^3 - x^2 - x - 3$. Jeżeli sprawdziliśmy wcześniej, że ± 1, ± 3 nie są pierwiastkami $W(x)$ to wiemy, że wielomian $W_1(x)$ nie ma pierwiastków całkowitych.
- Sprawdźmy, czy ma jakiś pierwiastek niecałkowity wymierny. Zgodnie z twierdzeniem o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych wystarczy przeanalizować liczby $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{3}{2}$.
- Po wykonaniu rachunków można zauważyć, że $W_1\left(\frac{3}{2}\right) = 0$.
- Po podzieleniu przez dwumian $x - \frac{3}{2}$ uzyskujemy równość $W(x) = (x-5)\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(2x^2 + 2x + 2\right)$.
- Za pomocą wyróżnika Δ możemy sprawdzić, że wielomian $W_2(x) = 2x^2 + 2x + 2$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.
- Jedynymi pierwiastkami rzeczywistymi wielomianu $W(x)$ są zatem liczby 5 oraz $\frac{3}{2}$.

Przykład 2

Wyznaczmy wszystkie pierwiastki rzeczywiste wielomianu $W(x) = 2x^4 + 7x^3 - 10x^2 - 21x + 12$.

Pierwiastki całkowite

- Sprawdźmy najpierw, czy wielomian ma jakieś pierwiastki całkowite. Jeżeli istnieją, muszą być całkowitymi dzielnikami wyrazu wolnego 12.
- Analizujemy więc wartość wielomianu dla ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 12.
- Po wykonaniu obliczeń (większość można przeliczyć w pamięci, wystarczy tylko oszacować wynik i sprawdzić, czy jest różny od zera) możemy zauważyć, że tylko $W(-4) = 0$.

Dzielenie
Po wykonaniu dzielenia $W(x)$ przez $x + 4$ dostajemy $W(x) = (x+4)\left(2x^3 - x^2 - 6x + 3\right)$. Wiemy, że dla dzielników wyrazu wolnego (czyli ± 1, ± 3) wielomian $W(x)$ przyjmuje wartości różne od zera, wielomian nie ma więc więcej pierwiastków całkowitych.

> Pierwiastki niecałkowite wymierne
>
> - Sprawdźmy, czy wielomian $2x^3 - x^2 - 6x + 3$ ma jakieś pierwiastki niecałkowite wymierne.
> - Zgodnie z twierdzeniem o pierwiastkach wymiernych pierwiastków takich należy szukać wśród liczb $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$.
> - Po wykonaniu obliczeń możemy zauważyć, że $W\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.
>
> Kolejne dzielenie
> Wykonując kolejne dzielenie możemy zatem zapisać, że
> $W(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(x+4)\left(2x^2 - 6\right)$.
>
> Wielomian drugiego stopnia
>
> - Pozostało przeanalizowanie wielomianu $2x^2 - 6$.
> - Wyłączając 2 przed nawias i korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów mamy
> $W(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+4)\left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)$.
>
>   Podsumowanie
>   Wielomian $W(x)$ ma zatem cztery pierwiastki rzeczywiste: liczby -4, $\frac{1}{2}$, $\sqrt{3}$ oraz $-\sqrt{3}$.

Zauważmy, że twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych możemy wykorzystać również do wyszukania wszystkich pierwiastków wymiernych wielomianu o współczynnikach wymiernych.

Wystarczy zauważyć, że przemnożenie wielomianu przez stałą niezerową nie zmienia jego pierwiastków.

Każdy wielomian o współczynnikach wymiernych możemy zatem sprowadzić do wielomianu o współczynnikach całkowitych mnożąc go przez wspólną wielokrotność mianowników wszystkich współczynników wielomianu.

Pokażemy to w kolejnych dwóch przykładach.

> **Przykład 3**
>
> Wyznaczmy wszystkie pierwiastki rzeczywiste wielomianu
> $W(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{15}x^3 - \frac{19}{30}x^2 + \frac{2}{15}x + \frac{2}{15}$.
>
> - Zauważmy, że po przemnożeniu wielomianu $W(x)$ przez 30 otrzymamy wielomian $V(x)$ o współczynnikach całkowitych mający te same pierwiastki, co wielomian $W(x)$.
>
> - $V(x) = 15x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 4x + 4$

- Spróbujmy na początek wyszukać pierwiastki całkowite wielomianu $V(x)$ analizując jego wartości dla liczb ± 1, ± 2, ± 4 (dzielniki wyrazu wolnego).
- Łatwo zauważymy, że $V(1) = V(-1) = 0$, więc wielomian $V(x)$ jest podzielny przez $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$.
- Wykonajmy dzielenie dowolnym sposobem (możemy np. użyć algorytmu dzielenia pisemnego lub dwukrotnie schematu Hornera). Uzyskamy zapis $V(x) = (x+1)(x-1)\left(15x^2 - 4x - 4\right)$.
- Za pomocą wyróżnika Δ możemy wyznaczyć pierwiastki trójmianu kwadratowego $15x^2 - 4x - 4$ - są to liczby $-\frac{2}{5}$ i $\frac{2}{3}$.
- Podsumujmy: wielomian $W(x)$ ma cztery pierwiastki rzeczywiste: 1, -1, $-\frac{2}{5}$ i $\frac{2}{3}$.

Przykład 4

Wyznaczmy wszystkie pierwiastki rzeczywiste wielomianu
$W(x) = \frac{1}{3}x^5 + \frac{1}{5}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{5}x^2 + x + \frac{3}{5}$.

Współczynniki całkowite
Po przemnożeniu przez 15 uzyskamy wielomian mający te same pierwiastki, ale o współczynnikach całkowitych:
$V\left(x\right) = 5x^5 + 3x^4 + 20x^3 + 12x^2 + 15x + 9$.

Pierwiastki całkowite
Zauważmy, że wszystkie współczynniki wielomianu są liczbami dodatnimi, więc pierwiastek musi być liczbą ujemną. Sprawdźmy, czy wśród ujemnych dzielników wyrazu wolnego, czyli liczb -1, -3, -9, są pierwiastki wielomianu $V(x)$.
Po wykonaniu obliczeń widzimy, że wielomian ten nie ma pierwiastków całkowitych.

Pierwiastki wymierne
Sprawdźmy, czy wielomian ma pierwiastki wymierne niecałkowite, analizując zgodnie z twierdzeniem liczby $-\frac{1}{5}$, $-\frac{3}{5}$, $-\frac{9}{5}$ (tu rachunki mogą być dość żmudne).
Po wykonaniu obliczeń znajdujemy pierwiastek wymierny $-\frac{3}{5}$.

Postać iloczynowa
Zgodnie z twierdzeniem Bézouta możemy zapisać
$V\left(x\right) = \left(x + \frac{3}{5}\right)\left(5x^4 + 20x^2 + 15\right)$.
Zauważmy, że wielomian $5x^4 + 20x^2 + 15$ nie ma pierwiastków rzeczywistych, bo jest sumą dwóch liczb nieujemnych (potęgi o wykładnikach parzystych) i liczby dodatniej 15.

Podsumowanie
Wielomian $W(x)$ ma tylko jeden pierwiastek rzeczywisty - jest nim liczba $-\frac{3}{5}$.

Słownik

twierdzenie Bézouta

liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ dzieli się przez dwumian $x - a$ bez reszty

twierdzenie o pierwiastkach całkowitych wielomianu o współczynnikach całkowitych

dany jest wielomian $W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, w którym wszystkie współczynniki a_n, a_{n-1}, $\ldots$, a_1 i a_0 są liczbami całkowitymi, przy czym $a_n \neq 0$ i $a_0 \neq 0$. Jeżeli liczba całkowita p jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to p jest dzielnikiem (dodatnim lub ujemnym) wyrazu wolnego a_0

twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych

dany jest wielomian $W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, w którym wszystkie współczynniki a_n, a_{n-1}, $\ldots$, a_1 i a_0 są liczbami całkowitymi, przy czym $a_n \neq 0$ i $a_0 \neq 0$. Jeżeli liczba wymierna $\frac{p}{q}$ zapisana w postaci ułamka nieskracalnego, w którym liczby p i q są całkowite jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to p jest dzielnikiem (dodatnim lub ujemnym) wyrazu wolnego a_0, zaś q jest dzielnikiem współczynnika a_n przy najwyższej potędze zmiennej

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z przedstawionym w animacji twierdzeniem o pierwiastkach wymiernych wielomianu mającego współczynniki całkowite i jego zastosowaniami.

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Film nawiązujący do treści materiału

Polecenie 2

Posługując się metodami zaprezentowanymi w animacji wyznacz wszystkie pierwiastki wymierne podanych wielomianów:

- $F(x) = 4x^5 + 6x^4 + 5x^2 - 9x - 6$,
- $G(x) = x^4 - 6x^3 - 4x^2 - 18x - 21$,
- $H(x) = 4x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x + 6$.

Polecenie 3

Nie wykonując dokładnych obliczeń uzasadnij, dlaczego poniższe wyrażenia nie są równe 0

1) $2 \cdot (-1)^4 - 2 \cdot (-1)^3 + 5 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) + 1$

2) $2 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^2 - 13 \cdot 2 + 1$

3) $5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \frac{9}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 6 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Dany jest wielomian $W(x) = 2x^5 - 3x^4 - 7x^3 + 5x + 15$. Ile jest różnych liczb wymiernych, które można zapisać w postaci ułamka zwykłego $\frac{p}{q}$ takiego, że p jest dzielnikiem całkowitym wyrazu wolnego wielomianu, a q jest dzielnikiem współczynnika przy najwyższej potędze niewiadomej?

- 8
- 12
- 16
- 14
- 9
- 4

Ćwiczenie 2

Wskaż wszystkie pierwiastki wymierne wielomianu $W(x) = 36x^3 + 12x^2 - 5x - 1$.

- [ ] $\frac{1}{3}$
- [ ] $\frac{1}{2}$
- [ ] $-\frac{1}{2}$
- [ ] $-\frac{1}{6}$
- [ ] $\frac{1}{6}$
- [ ] $-\frac{1}{3}$
- [ ] 1

Ćwiczenie 3

Oceń prawdziwość zdań.

- Każde zdanie prawdziwe zaznacz kolorem zielonym.
- Każde zdanie fałszywe zaznacz kolorem czerwonym.

Każdy wielomian o współczynnikach całkowitych ma przynajmniej jeden pierwiastek wymierny.
Jeżeli wyrazem wolnym wielomianu o współczynnikach całkowitych jest liczba nieparzysta, to wielomian ten na pewno nie ma pierwiastków całkowitych parzystych.
Jeżeli wyrazem wolnym wielomianu o współczynnikach całkowitych jest liczba parzysta, to wielomian ten na pewno nie ma pierwiastków całkowitych nieparzystych.

Ćwiczenie 4

Każdy z podanych wielomianów ma dokładnie jeden pierwiastek wymierny. Dopasuj pierwiastki do wielomianów.

$6x^4 + 2x^3 + 3x + 1$	$\frac{1}{3}$
$x^5 + 3x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 3$	$-\frac{1}{3}$
$6x^4 - 2x^3 + 9x - 3$	-3
$3x^4 - 9x^3 + 2x - 6$	3

Ćwiczenie 5

Wstaw współczynniki przy wyrazach wielomianu tak, by do zbioru pierwiastków tego wielomianu należały liczby -1 oraz 7:

$5, 6, 14, 12$

$W(x) = x^4 -$ .... $x^3 -$ .... $x^2 -$ .... $x -$ ....

Ćwiczenie 6

Dane są wielomiany

- $F(x) = 2x^3 + 11x^2 + 17x + 6$,
- $G(x) = 2x^3 - 6x^2 - 2x + 6$,
- $H(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + 6$.

Każdy z nich ma dokładnie trzy pierwiastki wymierne. Wskaż liczby, które są pierwiastkami poszczególnych wielomianów.

	1	-1
2	-2	3
-3	6	-6
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
$-\frac{3}{2}$		

$F(x)$	□	□
□	□	□
□	□	□
□	□	□
□		

$G(x)$	□	□
□	□	□
□	□	□

□	□	□
□		
$H(x)$	□	□
□	□	□
□	□	□
□	□	□
□		

Ćwiczenie 7

Wielomian $W(x) = x^5 - 10x^4 + 26x^3 - 22x^2 + 25x - 12$ ma dokładnie jeden pierwiastek wymierny.

Pierwiastkiem tym jest liczba ______.

Ćwiczenie 8

Wskaż wszystkie pierwiastki wymierne wielomianu $W(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}$.

- [ ] $\frac{1}{3}$
- [ ] $-\frac{1}{2}$
- [ ] $\frac{1}{6}$
- [ ] -1
- [ ] $\frac{1}{2}$
- [ ] $-\frac{1}{6}$
- [ ] 1
- [ ] $-\frac{1}{3}$

Dla nauczyciela

Autor: Michał Niedźwiedź

Przedmiot: Matematyka

Temat: Twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne.

Zakres rozszerzony Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto

1) znajduje pierwiastki całkowite i wymierne wielomianu o współczynnikach całkowitych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa twierdzenia o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych i jego dowód;
- znajduje pierwiastki wymierne wielomianu o współczynnikach wymiernych;
- stosuje twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych do znalezienia wszystkich pierwiastków wielomianu w niektórych przypadkach.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- metoda tekstu przewodniego.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Przedstawienie tematu zajęć: „Twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu” oraz wspólne z uczniami ustalenie kryteriów sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj” oraz animacją. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenie nr 1-2, a następnie wybrany uczeń omawia ich wykonanie na forum krok po kroku.
3. Kolejne ćwiczenia (numer 3, 4 i 5) uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi.
4. Ćwiczenia numer 6, 7 i 8 uczniowie wykonują indywidualnie, a następnie omawia je nauczyciel.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: Na dzisiejszych zajęciach nauczyłam / nauczyłem się…

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują polecenie 2 w sekcji „Animacja”.

Materiały pomocnicze:

- Pierwiastki równań

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać animację do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc później samodzielnie rozwiązać zadania na lekcji.
- Nauczyciel może wykorzystać animację na lekcji poświęconej rozwiązywaniu równań wymiernych.