G. KARCH & M. KRUPSKI & SZ. CYGAN

W każdej nauce jest tyle prawdy, ile jest w niej matematki.

Immanuel Kant

Transformata Laplace'a

Zadanie 1. Niech $f(t) = t^a e^{-bt}$ dla pewnych dodatnich stałych a i b. Udowodnij, że funkcja f jest podwykładnicza z wykładnikiem $-b < \alpha < 0$.

Zadanie 2. Załóżmy, że $f(t)$ ma wzrost podwykładniczy. Udowodnij, że $\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}\{f\}(s) = 0$.

Zadanie 3. Stosując równość $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ oblicz $\mathcal{L}\{t^{-1/2}\}$.

Zadanie 4. Załóżmy, że $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ oraz że granica $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t}$ istnieje. Udowodnij wzór

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s) = \int_s^\infty F(u)\,\mathrm{d}u.$$

Zadanie 5. Oblicz transformaty Laplace'a funkcji :

a) t^n,

b) $t^n e^{at}$,

c) $t\sin at$,

d) $t^2\cos at$,

e) $t^k e^{at}\cos bt$,

f) $t^k e^{at}\sin bt$,

g) $\frac{\sin t}{t}$,

h) $\frac{\cos at - 1}{t}$,

i) $\frac{e^{at}-e^{bt}}{t}$.

Zadanie 6. Pokaż, że zachodzi wzór Borela:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t-v)g(v)\ \mathrm{d}v\right\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)\mathcal{L}\{g\}(s).$$

Z jego pomocą wyznacz transformatę odwrotną funkcji $\frac{1}{s^2(s^2+1)}$.

Zadanie 7. Stosując transformatę Laplace'a znajdź rozwiązania następujących zagadnień:

a) $y' - y = te^t$, $y(0) = 0$;

b) $y'' + y = \sin t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$;

c) $y'' + y = t\sin t$, $y(0) = 1$,$y'(0) = 2$;

d) $y'' - 5y' + 4y = e^{2t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

Zadanie 8. Stosując transformatę Laplace'a znajdź rozwiązania następujących zagadnień:

a) $\begin{cases} x' = 12x + 5y, & x(0) = 0, \\ y' = -6x + y, & y(0) = 1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = x - y - e^{-t}, & x(0) = 0, \\ y' = 2x + 3y + e^{-t}, & y(0) = 0. \end{cases}$