G. KARCH & M. KRUPSKI & SZ. CYGAN

Jest tylko 10 rodzajów ludzi na Świecie:
ci, którzy rozumieją układ dwójkowy,
i ci, którzy go nie rozumieją.

Autor nieznany

Równania liniowe skalarne wyższych rzędów

Zadanie 1. Znajdź rozwiązania ogólne równań:

a) $y'' + y' - 2y = 0$,
b) $y^{(4)} + 4y = 0$,
c) $y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9y^{(3)} = 0$,
d) $y'' + y = 4\sin t$,
e) $y'' - 2y' + y = 6te^t$,
f) $y'' - 5y' = 3t^2 + \sin 5t$.

Zadanie 2. Znajdź rozwiązania szczególne równań

a) $y'' - 2y' + 2y = e^t + t\cos t$, b) $y'' - y = 4 \operatorname{sh} t$, c) $y'' + 3y = t^3 - 1$,

nie korzystając z metody uzmienniania parametrów.

Zadanie 3. Znajdź rozwiązania ogólne równań

a) $y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t}$, b) $y'' + 4y = 2 \operatorname{tg} t$, c) $y'' - 4y' + 4y = te^{2t}$,

używając metody uzmienniania parametrów.

Zadanie 4. Rozwiąż zagadnienia początkowe

a) $y^{(3)} - y' = 0$,
$y(0) = 3,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 1$,

b) $y^{(3)} - 3y' - 2y = 9e^{2x}$,
$y(0) = 0,\ y'(0) = -3,\ y''(0) = 3$.

Zadanie 5. Skonstruuj równanie różniczkowe liniowe jednorodne trzeciego rzędu, które spełniają funkcje t, t^2, e^t.

Zadanie 6. Załóżmy, że równanie $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$ ma trzy rozwiązania:

$$t^2, \quad t^2 + e^{2t}, \quad 1 + t^2 + 2e^{2t}.$$

Znajdź rozwiązanie ogólne.

Zadanie 7. Załóżmy, że $a > 0$, $b > 0$ i $c > 0$. Udowodnij, że każde rozwiązanie równania $ay'' + by' + cy = 0$ dąży do 0 gdy $t \to \infty$.

Zadanie 8. Znajdź postać ogólną rozwiązania równania $y'' + y = f(t)$. Znajdź warunki jakie powinna spełniać funkcja f na to, aby wszystkie rozwiązania tego równania były ograniczone dla $t \to +\infty$.

Zadanie 9. Pokaż, że rozwiązanie równania $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ albo ma na każdym skończonym przedziale $[a, b]$ tylko skończenie wiele zer, albo jest tożsamościowo równe zeru. Jak uogólnić ten wynik na równania liniowe wyższego rzędu?

Zadanie 10. Udowodnij, że rozwiązania równania $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ z $q(x) < 0$ nie mogą mieć dodatnich maksimów (lokalnych).