G. Karch & M. Krupski & Sz. Cygan

"Słyszałem i zapomniałem.
Widziałem i zapamiętałem.
Zrobiłem i zrozumiałem. "

Konfucjusz

Układy równań liniowych

Zadanie 1. Pokaż, że dla zadanej macierzy A funkcja wykładnicza e^{tA} jest podanej postaci:

a) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $\quad e^{At} = e^{at}\begin{pmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -\sin bt & \cos bt \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $e^{At} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Zadanie 2. Znajdź macierz A, dla której

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} - e^t & e^{2t} - e^t & e^t - e^{2t} \\ e^{2t} - e^t & 2e^{2t} - e^t & e^t - e^{2t} \\ 3e^{2t} - 3e^t & 3e^{2t} - 3e^t & 3e^t - 2e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Zadanie 3. Obliczając wartości własne i wektory własne macierzy układu, rozwiąż zagadnienia początkowe:

a) $y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $y' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $y' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $y' = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -10 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix} y$.

Zadanie 4. Wyznacz wszystkie wektory y_0 takie, że rozwiązanie zagadnienia

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad y(0) = y_0$$

jest okresową funkcją t.

Zadanie 5. Niech W będzie podprzestrzenią niezmienniczą operatora liniowego $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Pokaż, że jeżeli $y_0 \in W$, to rozwiązanie $y(t)$ zagadnienia $y' = Ay, \quad y(0) = y_0$ spełnia $y(t) \in W$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$.

Zadanie 6. Załóżmy, że przynajmniej jedna wartość własna operatora liniowego A na $\mathbb{R}^n$ ma ściśle dodatnią część rzeczywistą. Pokaż, że dla dowolnych $a \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ istnieje rozwiązanie równania $y' = Ay$ takie, że $\|y(0) - a\| < \varepsilon$ oraz $\lim\limits_{t\to\infty} \|y(t)\| = \infty$.

Zadanie 7. Załóżmy, że $\phi_k(t)$ $(k = 1, 2, ..., n)$ są rozwiązaniami zagadnienia $y' = Ay$, $y(0) = e_k$ ($e_k = (0, ..., 1, ...0)$ – jedynka na k-tym miejscu). Udowodnij, że $e^{At} = (\phi_1(t), \dots, \phi_n(t))$.

Zadanie 8. Rozważamy układ n równań $y' = Ay + e^{\lambda t}v$, gdzie v jest wektorem własnym macierzy A odpowiadającym wartości własnej λ. Załóżmy, że macierz A ma n liniowo niezależnych wektorów własnych odpowiadających różnym wartościom własnym.

a) Pokaż, że nie istnieje wektor $a \in \mathbb{R}^n$ taki, że $\psi(t) = ae^{\lambda t}$ jest rozwiązaniem.

b) Pokaż, że rozwiązaniem jest $\psi(t) = ae^{\lambda t} + bte^{\lambda t}$ dla odpowiednio dobranych wektorów $a, b \in \mathbb{R}^n$.

Układy równań liniowych pierwszego rzędu

Najważniejsze twierdzenia podane na wykładzie:
Twierdzenie 1. Niech A będzie macierzą $n \times n$ o stałych współczynnikach. Wtedy zagadnienie początkowe

$$\bar{x}' = A\bar{x}, \qquad \bar{x}(t_0) = \bar{x}^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ ... \\ x_n^0 \end{pmatrix}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie dla $-\infty < t < +\infty$.

Twierdzenie 2. Niech A będzie macierzą $n \times n$ o stałych współczynnikach. Wszystkie rozwiązania układu $\bar{x}' = A\bar{x}$ tworzą n wymiarową przestrzeń liniową.

Znajomość dowodu tego twierdzenia jest obowiązkowa. Jego dowód polega na konstrukcji bazy liniowej przestrzeni rozwiązań opierając sie na sformułowanym powyżej twierdzeniu o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań.

Wartości własne i wektory własne, a wyznaczanie fundamentalnego zbioru rozwiązań

Celem wykładu było zaprezentowanie algorytów wyznaczania n niezależnych rozwiązań układu równań różniczkowych

$$\bar{x}' = A\bar{x}, \quad \text{gdzie} \quad \bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ ... \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Szukamy rozwiązań w specjalnej postaci

$$\bar{x}(t) = e^{\lambda t}\bar{v},$$

gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$, a $\bar{v}$ jest wektorem w $\mathbb{R}^n$. Zauważmy, że

$$\frac{d}{dt}e^{\lambda t}\bar{v} = \lambda e^{\lambda t}\bar{v} \quad \text{oraz} \quad A(e^{\lambda t}\bar{v}) = e^{\lambda t}A\bar{v}.$$

Podstawiając więc $\bar{x}(t) = e^{\lambda t}\bar{v}$ do układu otrzymujemy układ równań liniowych na λ i $\bar{v}$:

$$A\bar{v} = \lambda\bar{v}.$$

Wiadomo z wykładu z algebry liniowej, że niezerowe rozwiązania λ i $\bar{v}$ powyższego układu nazywają się odpowiednio *wartościami własnymi* i *wektorami własnymi*.
Z wykładu z algebry liniowej powinno być znane następujące twierdzenie.
Twierdzenie 3. Wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są niezależne.

Z tego twierdzenia wynika natychmiast, że jeżeli macieź A ma n różnych wartości własnych, to znajdując odpowiadające im wektory własne łatwo konstruujemy rozwiązanie ogólne.
Jeżeli macierz A ma zespoloną wartość własną, to wyznaczamy odpowiadający jej zespolony wektor własny, a następnie dwa rzeczywiste liniowo niezależne rozwiązania konstruujemy posługując się twierdzeniem.
Twierdzenie 4. Jeżeli $\bar{x}(t) = \bar{y}(t) + i\bar{z}(t)$ jest rozwiązaniem o wartościach zespolonych układu $\bar{x}' = A\bar{x}$, to $\bar{y}(t)$ oraz $\bar{z}(t)$ są rozwiązaniami o wartościach rzeczywistych tego układu.

Postać wykładnicza macierzy

Dla danej macierzy kwadratowej A definiujemy

$$e^{tA} \equiv I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + ... + \frac{A^nt^n}{n!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^kt^k}{k!}.$$

Najważnieszy fakt z wykładu mówi, że szereg ten jest zbieżny dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$ oraz

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}.$$

Twierdzenie 5. Dla dowolnego wektora $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, funkcja o wartościach w $\mathbb{R}^n$

$$\bar{x}(t) = e^{tA}\bar{v}$$

jest rozwiązaniem układu $\bar{x}' = A\bar{x}$.

Przy wyznaczaniu macierzy e^{tA} często przydaje się następujący lemat.
Lemat 6. Jeżeli $AB = BA$, to $e^{A+B} = e^Ae^B$.

Lemat ten nietrudno udowodnić stosując definicję funkcji wykładniczej.
Przykład. Wyznaczymy trzy liniowo niezależne rozwiązania następującego układu równań różniczkowych:

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \bar{x}.$$

Równaniem charakterystycznym macierzy układu jest $(1-\lambda)^2(2-\lambda)$ – zatem mamy dwie wartości własne: $\lambda = 1$ i $\lambda = 2$.
Wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej $\lambda = 2$ jest $(0,0,1)^T$, a więc jako pierwsze rozwiązanie naszego układu otrzymujemy

$$\bar{x}_1(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Podobnie wyznaczamy wektor własny odpowiadający $\lambda = 1$ i w ten sposób dostajemy drugie rozwiązanie układu:

$$\bar{x}_2(t) = e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ponieważ $\lambda = 1$ jest dwukrotną wartością własną więc teraz szukamy rozwiązania $\bar{v}$ układu

$$(A-I)^2\bar{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Natychmiast otrzymujemy, że rozwiązaniem jest $v_3 = 0$ oraz v_1, v_2 są dowolne. Wybierzmy tylko jeden z takich wektorów (niezależny od dwóch wektorów własnych znalezionych powyżej)

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

który spełnia $(A-I)^2\bar{v} = 0$, ale $(A-I)\bar{v} \neq 0$. Wyznaczamy teraz trzecie liniowo niezależne rozwiązanie rozważanego układu:

$$\begin{aligned} \bar{x}_3(t) &= e^{At} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^t e^{(A-I)t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= e^t \Big[I + t(A-I) \Big] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^t \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \\ &= e^t \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Macierz fundamentalna.

Niech A będzie macierzą $n \times n$ układu

$$\bar{x}' = A\bar{x}.$$

Załóżmy, że znamy n liniowo niezależnych rozwiązań tego układu: $\bar{x}^1(t), ..., \bar{x}^n(t)$. Wiemy, że rozwiązanie ogólne ukladu () ma postać

$$\bar{x}(t) = c_1\bar{x}^1(t) + ... + c_n\bar{x}^n(t).$$

Definicja 7. Utwórzmy macierz $X(t)$, której kolumnami są wektory $\bar{x}^1(t), ..., \bar{x}^n(t)$. Macierz $X(t)$ nazywa się macierzą fundamentalną układu ().

Najważniejsze twierdzenie dotyczące macierzy fundamentalnej. Znajomość dowodu jest obowiązkowa.
Twierdzenie 8. Załóżmy, że znamy macierz fundamentalną $X(t)$ układu $\bar{x}' = A\bar{x}$. Wtedy

$$e^{At} = X(t)X^{-1}(0).$$

Dowód tego twierdzenia opiera się na trzech lematach.
Lemat 9. Macierz $X(t)$ jest macierzą fundamentalną układu () wtedy i tylko wtedy gdy $X'(t) = AX(t)$ oraz $\det X(0) \neq 0$.

Lemat 10. Macierz e^{tA} jest macierzą fundamentalną układu ().

Lemat 11. Jeżeli $X(t)$ oraz $Y(t)$ są dwoma macierzami fundamentalnymi układu (), to istnieje macierz C o stałych współczynnika taka, że $Y(t) = X(t)C$.

Równania niejednorodne

Konstrukcja rozwiązań zagadnienia początkowego dla układu niejednorodnego

$$\bar{x}' = A\bar{x} + \bar{f}(t) \quad \text{gdzie} \quad \bar{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ ... \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$
$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}^0$$

Twierdzenie 12. Załóżmy, że $X(t)$ jest macierzą fundamentalną układu jednorodnego $\bar{x}' = A\bar{x}$. Wtedy rozwiązaniem zagadnienia niejednorodnego (1)-(2) jest

$$\bar{x}(t) = X(t)X^{-1}(t_0)\bar{x}^0 + X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)f(s)\,ds..$$

Dodatkowo, jeżeli przyjmiemy, że $X(t) = e^{tA}$, to wzór () możemy zapisać następująco

$$\bar{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\bar{x}^0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}f(s)\,ds.$$