G. KARCH & M. KRUPSKI & SZ. CYGAN

"Scio me nihil scire." [i]

Sokrates

Przedłużanie rozwiązań i metoda Eulera

Zadanie 1. Załóżmy, że funkcja $f = f(t,x)$ jest klasy C^1 na zbiorze $t_0 \leq t < \infty$, $-\infty < y < \infty$ oraz spełnia dodatkowe oszacowanie $|f(t,y)| \leq K$ na całym tym zbiorze dla pewnej stałej $K > 0$. Udowodnić, że rozwiązanie zagadnienia

$$x' = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0$$

istnieje dla wszyskich $t \geq t_0$.

Zadanie 2. Udowodnij, że poniższe równania uzupełnione warunkiem początkowym $x(0) = 1$ mają rozwiązanie dla wszystkich $t \geq 0$:
a) $x' = t^3 - x^3$, b) $x' = tx + e^{-x}$.

Zadanie 3. Uzasadnij, że zagadnienie $y' = 1 + y^2,\ \ y(0) = 0$ nie ma rozwiązania określonego na całej prostej.

Zadanie 4. Rozważamy równanie $y' = f(t,y)$. Krzywe opisane równaniem $f(t,y) = k$ dla różnych stałych k nazywamy *izoklinami*. Z równania wynika, że dana izoklina jest przecinana przez wszystkie rozwiązania pod stałym kątem. W poniższych przykładach narysuj izokliny i przy ich pomocy naszkicuj przebieg przykładowych rozwiązań:

$$y' = -t, \quad y' = -\frac{t}{y}, \quad y' = 1 + y^2, \quad y' = \frac{t+y}{t-y}, \quad y' = t^2 + y^2.$$

Zadanie 5. Używając metody Eulera z krokiem $h = 0,1$ wyznacz przybliżoną wartość rozwiązania dla $t = 1$. Oszacuj błąd jaki popełniamy. Nastęnie znajdź rozwiązanie podanego zagadnienienia i porównaj otrzymaną wartość z wartością rzeczywistą.
$y' = 1 + t - y$, $y(0) = 0$; $y' = 2ty$, $y(0) = 2$; $y' = 1 + y^2 - t^2$, $y(0) = 0$.

Zadanie 6. Oszacuj błąd jaki popełniamy używając metody Eulera z krokiem h aby znaleźć przybliżoną wartość rozwiązania zagadnienia $y' = (t^2 + y^2)/2,\ \ y(0) = 1$ dla dowolnego $t \in [0, 2/5]$. Wskazówka: Rozważaj prostokąt R: $0 \leq t \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2$.

[i] Wiem, że nic nie wiem.

Powtórzenie materiału z wykładu: schemat Eulera – numeryczna aproksymacja rozwiązań

Na wykładzie podano metodę numerycznego przybliżania rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

na odcinku $[t_0, t_0 + a]$. Dzielimy ten przedział na N równych części tworząc ciąg:

$$t_k = t_0 + k\frac{a}{N}, \quad k = 0, 1, 2, 3, ..., N.$$

Alternatywnie, możemy zapisać ten ciąg następująco: $t_{k+1} = t_k + h$, gdzie $h = \frac{a}{N}$. Ciąg liczb przybliżających rozwiązanie w punktach $y(t_k)$, zwany schematem Eulera, ma postać:

$$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0), \quad y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1)$$

i ogólnie

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k), \quad y_0 = y(t_0).$$

Wprowadźmy prostokąt $R = \{(t, y) \ : \ t_0 \leq t \leq t_0 + a, \ \ y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$. Załóżmy, że

$$\max_{(t,y)\in R}\left|\frac{\partial f(t,y)}{\partial y}\right| \leq L \quad \text{oraz} \quad \max_{(t,y)\in R}\left|\frac{\partial f(t,y)}{\partial t} + f\frac{\partial f(t,y)}{\partial y}\right| \leq D.$$

Na wykładzie oszacowano błąd jaki popełniamy przybliżając rozwiązanie ciągiem y_k. Przy założeniu, że $kh \leq a$ udowodniono, że

$$|y(t_k) - y_k| \leq \frac{Dh}{2L}[e^{aL} - 1], \quad k = 1, ..., N.$$