G. KARCH & M. KRUPSKI & SZ. CYGAN

"Mając dwadzieścia lat, myślałem tylko o kochaniu.

Potem kochałem już tylko myśleć. "

Albert Einstein

Istnienie i jednoznaczność rozwiązań

Zadanie 1. Wyprowadź wzór na n-tą iterację Picarda $y_n(x)$ i oblicz jej granicę gdy $n \to \infty$ dla podanych zagadnień Cauchy'ego:

a) $y' = -y \quad y(0) = 1,$ b) $y' = 2yt \quad y(0) = 1,$ c) $y' = -y^2 \quad y(0) = 0.$

Zadanie 2. Wyprowadź wzór na n-tą iterację Picarda dla zagadnienia początkowego $x' = x^2,\ x(0) = 1$ na odcinku $[0, 2]$, jeżeli $x_0(t) \equiv 1$. Oblicz granicę tego ciągu. Znajdź rozwiązanie zagadnienia i porównaj rezultaty.

Zadanie 3. Stosując twierdzenie Picarda-Lindelöfa dla podanych niżej zagadnień Cauchy'ego udowodnij, że rozwiązanie $y = y(t)$ istnieje na zadanym przedziale:

a) $y' = y^2 + \cos t^2$, $y(0) = 0$, $0 \le t \le \frac{1}{2}$, b) $y' = 1 + y + y^2 \cos t$, $y(0) = 0$, $0 \le t \le \frac{1}{3}$.

Zadanie 4. Rozważmy równanie $2y = t^2 y''$. Rozwiązania $y \equiv 0$ i $y = t^2$ spełniają warunki początkowe $y = y' = 0$ dla $t = 0$. Wyjaśnij, dlaczego zachodzi ta niejednoznaczność rozwiązań.

Zadanie 5. Zbadaj ilość rozwiązań zagadnienia w zależności od wartości parametru a:

a) $y' = y^a,\ \ y(0) = 0,$ b) $y' = y\,|\log y|^a,\ \ x(0) = 0.$

Zadanie 6. Znajdź rozwiązanie zagadnienia $y' = t\sqrt{1 - y^2}$, $y(0) = 1$, różne od rozwiązania $y(t) \equiv 1$. Które z założeń twierdzenia Picarda-Lindelöfa nie jest spełnione?

Zadanie 7. Niech $y(t)$ będzie nieujemną ciągłą funkcją spełniającą

$$y(t) \le L \int_{t_0}^{t} y(s)\, ds$$

na odcinku $t_0 \le t \le t_0 + \alpha$. Udowodnij, że $y(t) = 0$ dla $t_0 \le t \le t_0 + \alpha$ (łatwiejsza wersja lematu Gronwalla). WSKAZÓWKA: Pokaż indukcyjnie, że $y(t) \leqslant c(L^n/n!)(t - t_0)^n$.

Zadanie 8. Stosując lemat Gronwalla udowodnij, że $y(t) = -1$ jest jedynym rozwiązaniem zagadnienia $y' = t(1 + y),\ \ y(0) = -1$.

Zadanie 9. Zbadaj istnienie rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego $y' = f(y, t)$ i $y(0) = 0$, gdzie

$$f(y,t) = \begin{cases} -1 & t \le 0,\ y \in \mathbb{R} \\ 1 & t > 0,\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Powtórzenie materiału z wykładu: Iteracje Picarda.

Twierdzenie 1. Funkcja $y = y(t)$ jest rozwiązaniem zagadnienia

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

wtedy i tylko wtedy gdy $y = y(t)$ jest rozwiązaniem równania całkowego

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds.$$

Iteracje Picarda dla zagadnienia Cauchy'ego () to ciąg funkcji $y_n(t)$, $n = 0, 1, 2, 3, ...$, zdefiniowanych następująco

$$y_0(t) \equiv y_0, \quad y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))\, ds.$$

Przykład. Ciąg iteracji Picarda dla zagadnienia $\frac{dy}{dt} = y,\ y(0) = 1$ ma postać $y_n(t) = 1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+...+\frac{t^n}{n!}$.

Na wykładzie rozważano zagadnienie Cauchy'ego

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

Sformułowano i udowodniono następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2. (Picarda-Lindelöfa) Załóżmy, że funkcje $f(t, y)$ i $\frac{\partial f(t,y)}{\partial y}$ są ciągłe w prostokącie

$$R = \{(t, y)\ :\ t_0 \le t \le t_0 + a,\ |y - y_0| \le b\}.$$

Obliczmy $M = \max_{(t,y)\in R} |f(t, y)|$ oraz $\alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$.
Wtedy zagadnienie początkowe $\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie $y(t)$ na odcinku $t_0 \le t \le t_0 + \alpha$. Podobny wynik jest prawdziwy dla $t < t_0$.

Najważniejsze fakty z dowodu:

- Najpierw dowodzi się, że ciąg iteracji Picarda $y_n(t)$ zbiega jednostajnie do pewnej funkcji $y(t)$.
- Następnie przechodząc do granicy otrzymujemy, że funkcja $y(t)$ jest rozwiązaniem równania całkowego równoważnego zagadnieniu ().
- Aby udowodnić jednoznaczność rozwiązań postępujemy następująco. Zakładamy (nie wprost), że mamy dwa rozwiązania $y(t)$ i $\bar{y}(t)$ zagadnienia (). Definiujemy funkcję $w(t) = y(t) - \bar{y}(t)$ i dowodzimy, że spełnia ona nierówność

$$|w(t)| \le L \int_{t_0}^{t} |w(s)|\, ds$$

  dla pewnej stałej L. Aby udowodnić, że $w(t) \equiv 0$ na odcinku $[t_0, t_0 + \alpha]$ stosujemy lemat Gronwalla.

Twierdzenie 3. (Lemat Gronwalla) Załóżmy, że funkcja $u(t)$ jest nieujemna na przedziale $[t_0, T]$ i spełnia na tym przedziale nierówność całkową

$$u(t) \le a + b \int_{t_0}^{t} u(s)\, ds$$

dla wszyskich $t \in [t_0, T]$ i pewnych stałych $a \ge 0$ i $b > 0$. Wtedy zachodzi oszacowanie $u(t) \le ae^{b(t-t_0)}$.

Uwaga. W dowodzie jednoznaczności rozwiązań zagadnienia () stosujemy to twierdzenie z $a = 0$.