Zad. 8

a)
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x^2 \\ xy \end{bmatrix}$$

Oczywiście $\frac{\begin{bmatrix} x^2 \\ xy \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\|} \xrightarrow[\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to 0]{} 0$

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(1-\lambda) + 2 =$$

$$= \lambda^2 - (a+1)\lambda + 2 + a$$

$$\Delta = (a+1)^2 - 4(2+a) =$$

$$= a^2 - 2a - 7$$

$$\lambda_0 = \frac{a+1 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

Chcemy $Re(\lambda_0) < 0$. $(\iff Re(2\lambda_0))$

$$Re(a+1 \pm \sqrt{\Delta}) = a+1 \pm Re(\sqrt{a^2-2a-7})$$

$a^2-2a-7 = (a-1+2\sqrt{2})(a-1-2\sqrt{2})$

Dla $a \in (-\infty, 1-2\sqrt{2}] \cup [1+2\sqrt{2}, \infty)$:

- "+" $\sqrt{a^2-2a-7} < -(1+a)$, $a \geqslant -1$

$a^2-2a-7 > 1+2a+a^2$

$0 > 8+4a$

$-2 > a$, czyli $a \in (\infty, -2) \cap [-1, \infty) = \emptyset$

Dla $a < -1$ nierówności w drugą stronę, zatem

$-2 < a$, $a < -1 \Rightarrow a \in (-2, -1)$

Zatem $a \in (-2, 1-2\sqrt{2}]$

- "−" $\sqrt{a^2-2a-7} > 1+a$, dla $a \geqslant -1$

$a^2-2a-7 > a^2+2a+1$

$\vdots$

$-2 > a$ Znowu $a \in \emptyset$

gdy $a < -1$ mamy $-2 < a \Rightarrow a \in (-2, 1-2\sqrt{2}]$

Dla $a \in (1-2\sqrt{2}, 1+2\sqrt{2})$ mamy

$\mathrm{Re}\left(\sqrt{a^2-2a-7}\right) = 0$

Czyli chcemy $0 > 1+a$

$\Updownarrow$

$-1 > a$

Czyli $a \in (1-2\sqrt{2}, -1)$

Zatem wartości własne macierzy

$\begin{bmatrix} a & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ mają ujemną wartość

własną dla $a \in (-2, -1)$.

b) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & 1 \\ 1 & b-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(b-\lambda) - 1 =$$

$$= \lambda^2 - (a+b)\lambda - 1 + ab$$

$\Delta = a^2 - 2ab + b^2 + 4 = (a-b)^2 + 4$

$$\lambda_0 = \frac{a+b \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

Chcemy $\mathrm{Re}(2\lambda_0) < 0$.

Czyli $a+b \pm \sqrt{(a-b)^2+4} < 0$

• "−" $a+b < \sqrt{(a-b)^2+4}$, zał. $a+b \geq 0$

$$a^2+2ab+b^2 < (a-b)^2+4$$

$$ab < 1 ,$$ dla $a+b<0$ nierówność w drugą stronę

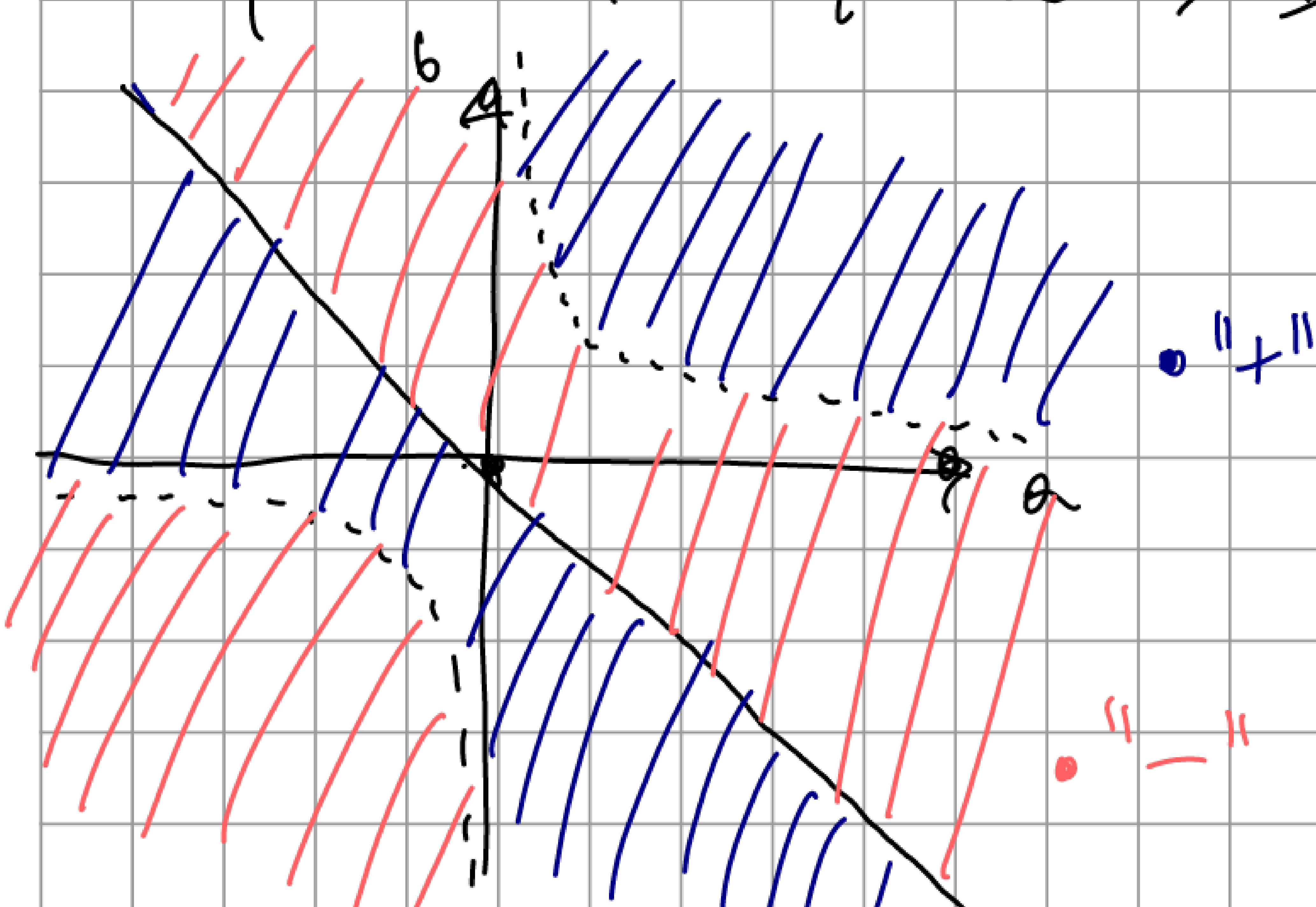
$$\begin{cases} a+b \geq 0 \\ ab < 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b < 0 \\ ab > 1 \end{cases}$$

• "+" $\sqrt{(a-b)^2+4} < -(a+b)$, dla $a+b \leq 0$:

$$\vdots$$

$$ab < 1$$ dla $a+b>0$ przeciwny zwrot

$$\begin{cases} a+b \leq 0 \\ ab < 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b > 0 \\ ab > 1 \end{cases}$$



$\rightsquigarrow \quad a+b=0$

Wystarczy, że $a+b+\sqrt{(a-b)^2+4} < 0$.

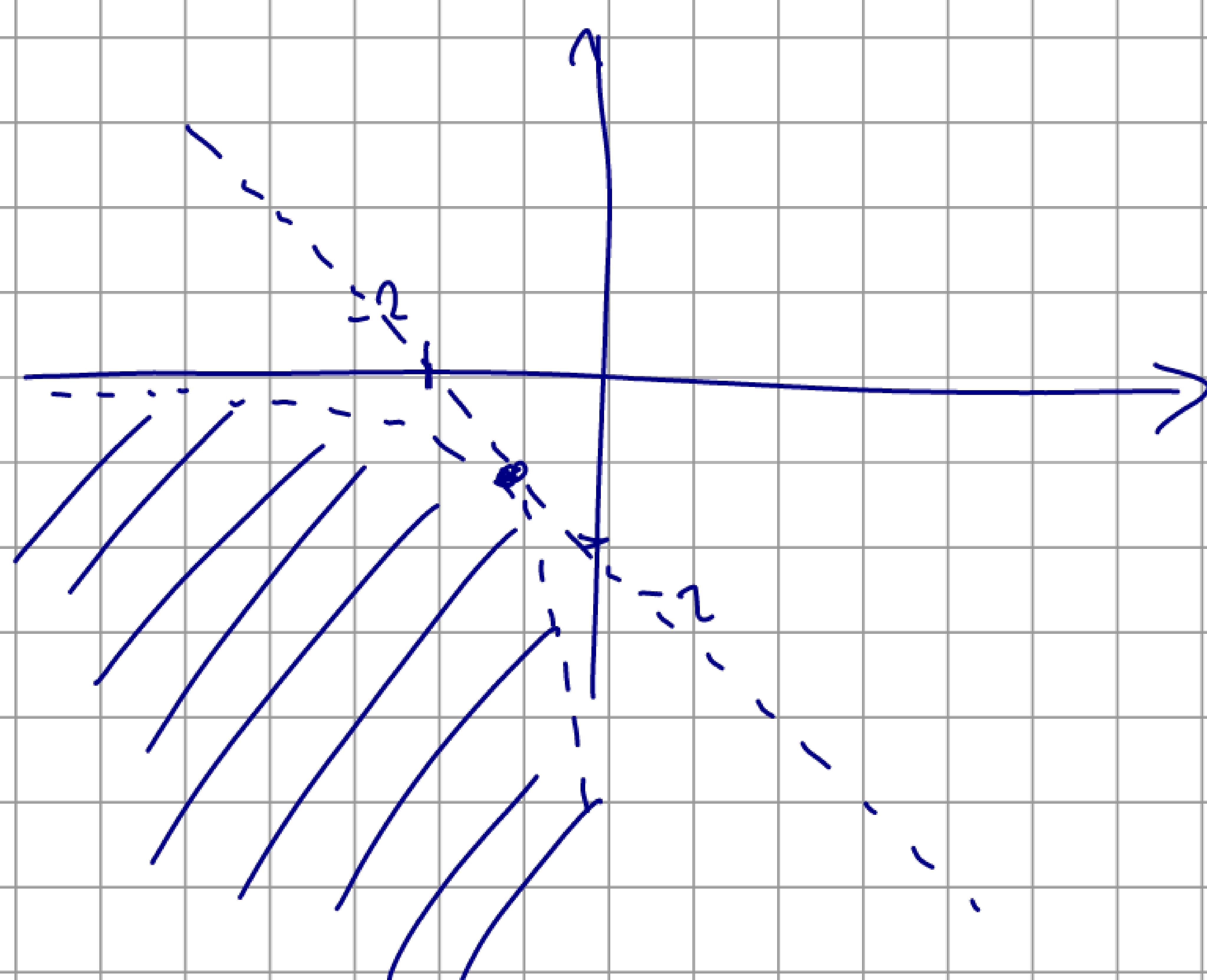
Na pewno $a+b < -2$.

Zatem chcemy $\sqrt{(a-b)^2+4} < \underbrace{-(a+b)}_{\text{dodatnie}}$

$$\Updownarrow$$

$$(a-b)^2+4 < a^2+2ab+b^2$$

$$1 < ab$$



Zatem po prostu $ab > 1$, $a, b < 0$.