24.02.2021

Ω – zbiór zdarzeń elementarnych (czyli „wyników doświadczenia")

$\omega \in \Omega$ – konkretny wynik, czyli zdarzenie elementarne

$A \subset \Omega$ – zdarzenie (czyli podzbiór Ω)

$A \cap B$, A^c, $A \cup B$, różne operacje na zdarzeniach.

Def. 1.1 Rodzina $\mathcal{F}$ podzbiorów Ω nazywamy <u>σ-ciałem</u>, jeżeli

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(ii) $A \in \mathcal{F}$, to $A^c \in \mathcal{F}$

(iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, to $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Parę $(\Omega, \mathcal{F})$ nazywamy przestrzenią mierzalną.

Przykład

1. Rzut monetą. Możliwe dwa wyniki: orzeł (O) oraz reszka (R). $\Omega = \{O, R\}$.
   $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$
2. Rzut kostką. $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^{n}$
3. n rzutów kostką: $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$.
   Możemy wyróżnić konkretne zdarzenie, np. A – suma wyrzuconych wyników jest l. parzystą, wtedy
   $$A = \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega : \omega_1 + \ldots + \omega_n = 0 \mod 2\}$$
4. Czas oczekiwania na pewne zdarzenie (np. przyjazd tramwaju, wzrost kursu akcji), $\Omega = [0, \infty)$

Def 1.2 Niech $(\Omega, \mathcal{F})$ będzie p. mierzalną.

Funkcję $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ nazywamy

prawdopodobieństwem (miarą prob.)

jeżeli:

(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(ii) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$ dla dowolnych

parami rozłącznych zdarzeń

$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$

$(\Omega, \mathcal{F}) \rightsquigarrow (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Przestrzeń probabilistyczna

~provided by Kołmogorov, ok. 1930 r.

Przykład P-stwo klasyczne

Ω - skończ. zbiór, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$. Wówczas

wystarczy zdefiniować p-stwo na

zdarzeniach elementarnych: $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}$

Wtedy dla $A \subset \Omega$ mamy $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Przykład Załóżmy, że $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ jest zbiorem przeliczalnym i niech $p_1, p_2, \ldots \geq 0$ sumują się do 1. Wtedy $\mathcal{F} = 2^\Omega$ oraz $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$ dla $i \in \mathbb{N}$. Jednoznacznie definiuje to p. prob.

Tw. 1.4 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – p. prob.

$A, B, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$.

1° $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

2° $A_1, \ldots, A_n$ – parami rozłączne,

wtedy $\mathbb{P}(\bigcup_i A_i) = \sum_i \mathbb{P}(A_i)$

(dopuszczamy $n = \infty$)

3° $\mathbb{P}[A^c] = 1 - \mathbb{P}[A]$

4° $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}[B \setminus A] = \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A]$

$\mathbb{P}[B] \geq \mathbb{P}[A]$

5° $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$

6° $\mathbb{P}[\bigcup_i A_i] \leq \sum_i \mathbb{P}[A_i]$

Tw. 1.5 Zasada włączeń i wyłączeń

$A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$. Wtedy

$$\mathbb{P}[A_1 \cup \dots \cup A_n] =$$

$$= \sum_{i}^{n} \mathbb{P}[A_i] - \sum_{i<j}^{n} \mathbb{P}[A_i \cap A_j] + \sum_{i<j<k}^{n} \mathbb{P}[A_i \cap A_j \cap A_k]$$

$$+ \dots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}[A_1 \cap \dots \cap A_n]$$

Tw. 1.6 Tw. o ciągłości

$A_1, \dots, \in \mathcal{F}$.

1° Jeżeli ciąg zdarzeń $\{A_n\}$ jest wstępujący (tzn. $A_1 \subset A_2 \subset \dots$) oraz oraz $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, wtedy

$$\mathbb{P}[A] = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}[A_n]$$

2° Jeżeli ciąg zdarzeń $\{A_n\}$ jest zstępujący, to $(A_1 \supset A_2 \supset \dots)$ oraz $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, wtedy

$$\mathbb{P}[A] = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}[A_n]$$

Przykład Do urny wrzucamy nieskończenie wiele kul o numerach 1, 2, ... w następujący sposób:

- o godz. (12.00 − 1 min.) wrzucamy kule 1, 2, ..., 10;
- o godz. (12.00 − $\frac{1}{2}$ min.) wyciągamy a) kulę 10 b) kulę 1 c) losową kulę, a następnie wrzucamy kule 11, 12, ..., 20;
- o godz. (12.00 − $\frac{1}{4}$ min.) wyciągamy a) kulę 20 b) kulę 2 c) losową kulę
- ...

Ile kul będzie w urnie o 12:00?

a) ∞ wiele

b) 0

c) potrzymy na kulę 1.

A_n – po n krokach 1 jest w urnie, $A_n \supset A_{n+1}$

$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ – o 12.00 1 będzie w urnie

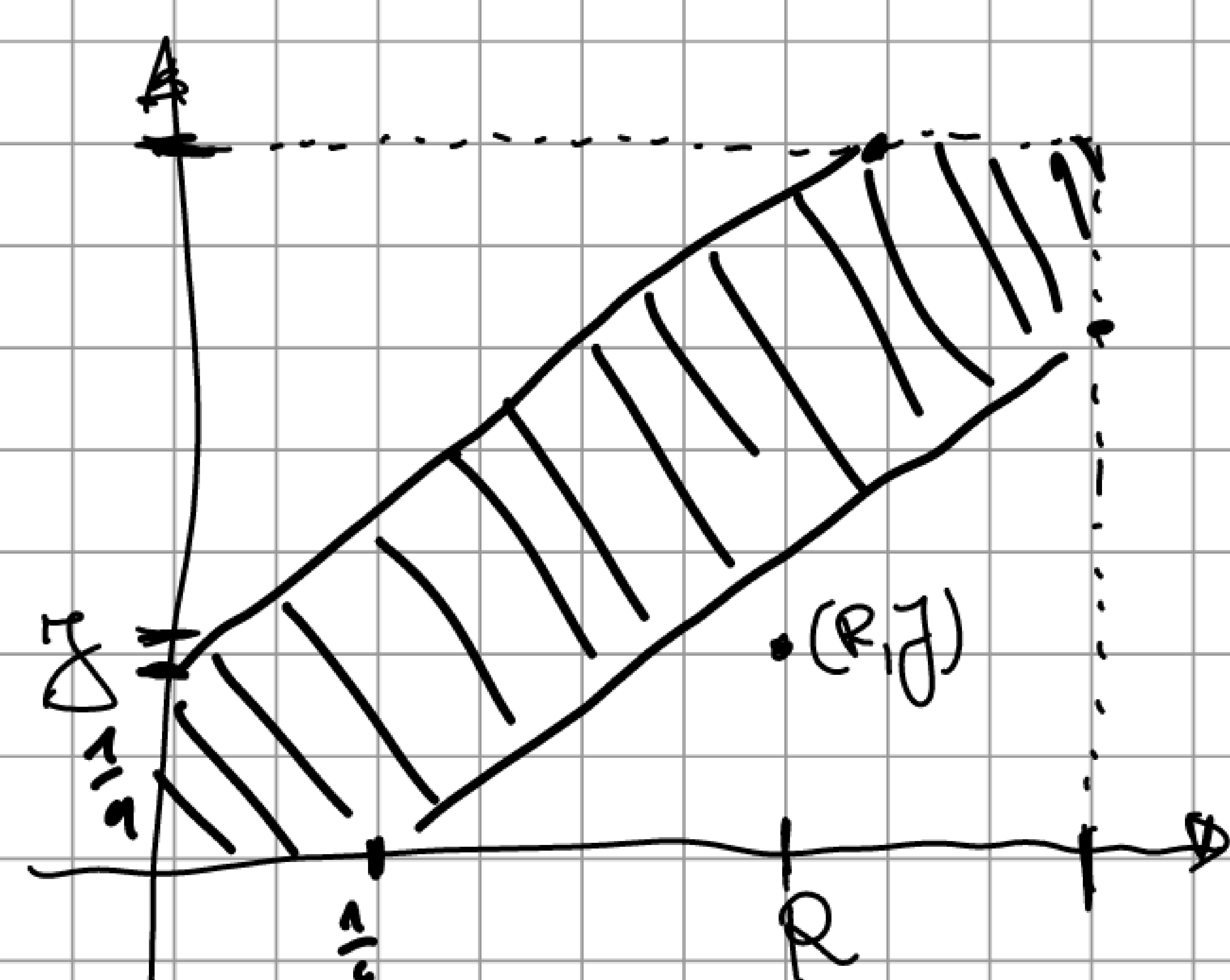
Z tw. o ciągłości $\mathbb{P}[A] = \lim_n \mathbb{P}[A_n]$.

$$\mathbb{P}[A] = \lim_n \mathbb{P}[A_n] = \frac{9}{10} \cdot \frac{18}{19} \cdot \ldots \cdot \frac{9n}{9n+1} \longrightarrow 0$$

Urna będzie pusta z pstwem 1.

Zadanie: zastanów się jak wygląda p. prob. dla powyższego przykładu.

Przykład Romeo i Julia umówili się na spotkanie o półtorej. Każde z nich przybędzie z losowym opóźnieniem co najwyżej godzinnym (i opóźnienie to jest jedn. rozł. w czasie). Osoba która przyjdzie pierwsza może czekać co najwyżej 15 minut. Jakie jest pstwo że się spotkają?



Spotkają się $\iff |R-J| < \frac{1}{4}$

$\Omega = [0,1]^2$, $\mathcal{F} = Bor([0,1]^2)$, $\mathbb{P} = Leb.$

Łatwo sprawdzić, że $\mathbb{P}[$  $] = \frac{7}{16}$.

03.03.2021

Przypomnienie:

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – przestrzeń probabilistyczna

przestrzeń (dyskretna, ciągła, po prostu zbiór punktów) → Ω

σ – ciało na Ω → $\mathcal{F}$

miara, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ → $\mathbb{P}$

Zawsze powinniśmy mieć z tyłu głowy jaką przestrzeń probabilistyczną rozważamy.

P-stwo geometryczne

Pytanie: jak losować punkty z odcinka $[0, 1]$?

Chcielibyśmy wziąć $x \in [0, 1]$, $\mathbb{P}[\{x\}] > 0$.

żeby była jednostajna $(x \neq y \Rightarrow \mathbb{P}[\{x\}] = \mathbb{P}[\{y\}])$

$\Downarrow$

$\mathbb{P}[\{x\}] = 0$.

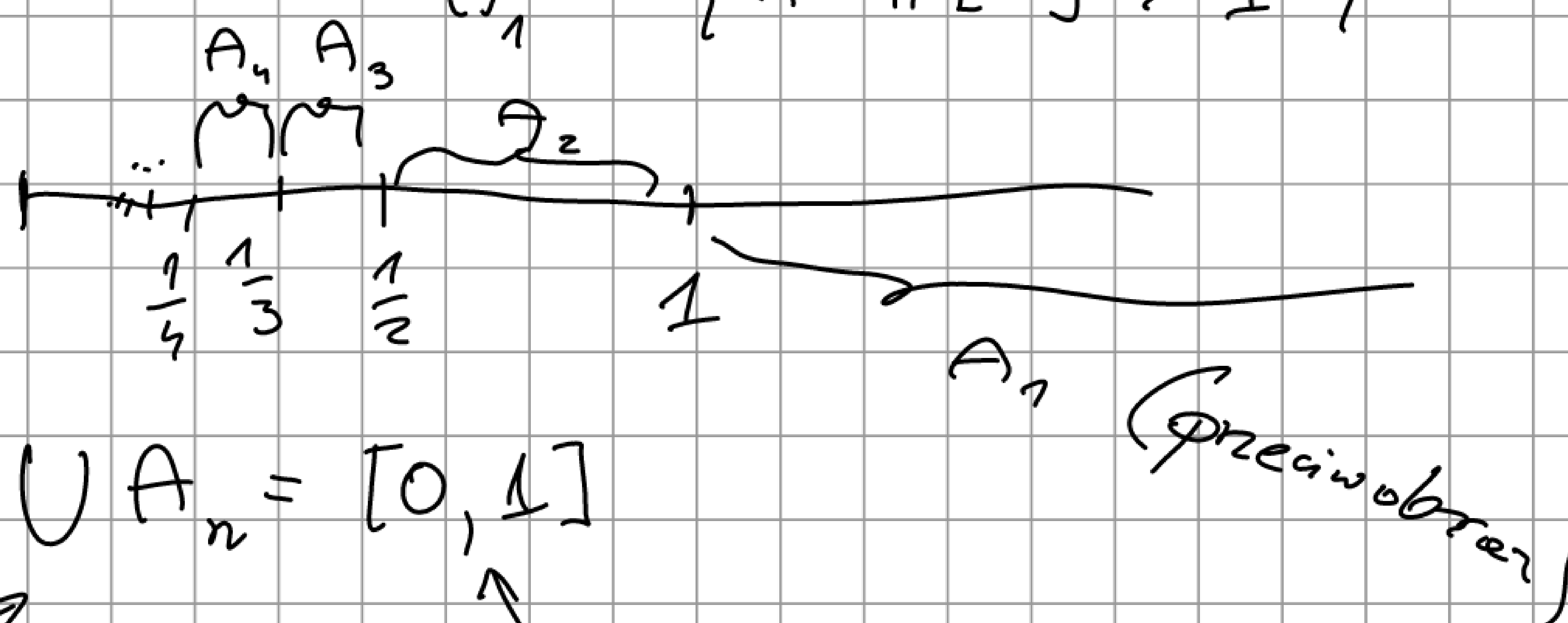
Jeżeli miara nie musi być jednostajna, to i tak się nie da tak zrobić, żeby $\forall x \in [0,1]\ \mathbb{P}[\{x\}] > 0$, bo mielibyśmy

$$(*)\quad \sum_{x\in[0,1]} \mathbb{P}[\{x\}] = \infty$$

Szkic dowodu $(*)$:

Zdefiniujmy $A_n := \{x : \mathbb{P}[x] \in (\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}]\}$

$A_1 := \{x : \mathbb{P}[x] > 1\}$



$$\bigcup A_n = [0,1]$$

przeliczalna suma

nieprzeliczalne

$\Downarrow$

$\exists k$ t. że A_k nieprzeliczalne

$\Downarrow$

$$\sum_{x\in A_k} \mathbb{P}[\{x\}] = \infty$$

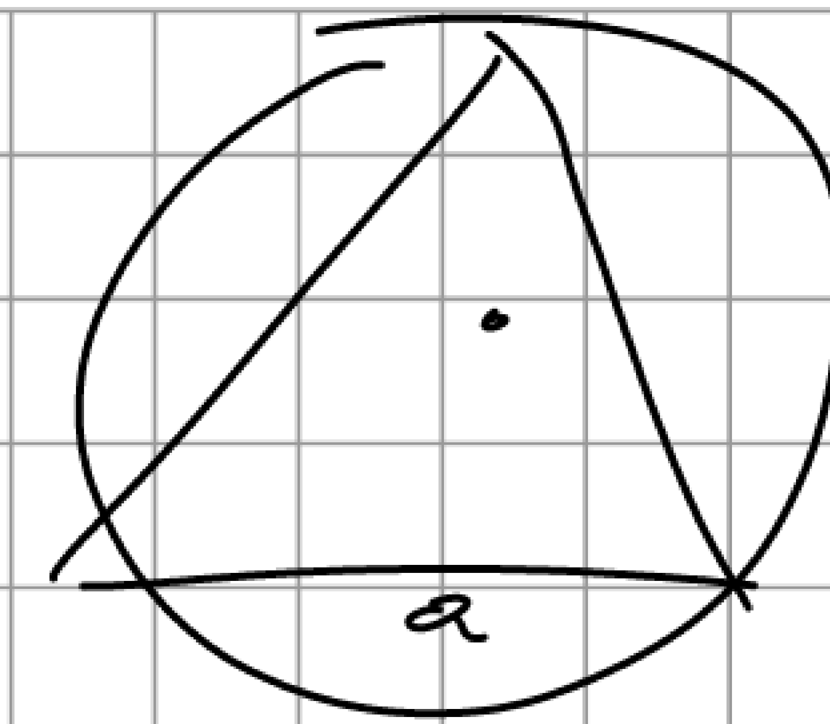
To nam mówi, że nie możemy za bardzo zrobić sensownej miary „na punktach".
Jeżeli zależy nam na sensownej jednostajnej mierze, to bierzemy miarę Lebesgue'a:

$$([0,1], \mathrm{Bor}[0,1], \mathrm{Leb})$$

<u>Przykład</u> Paradoks Bertranda

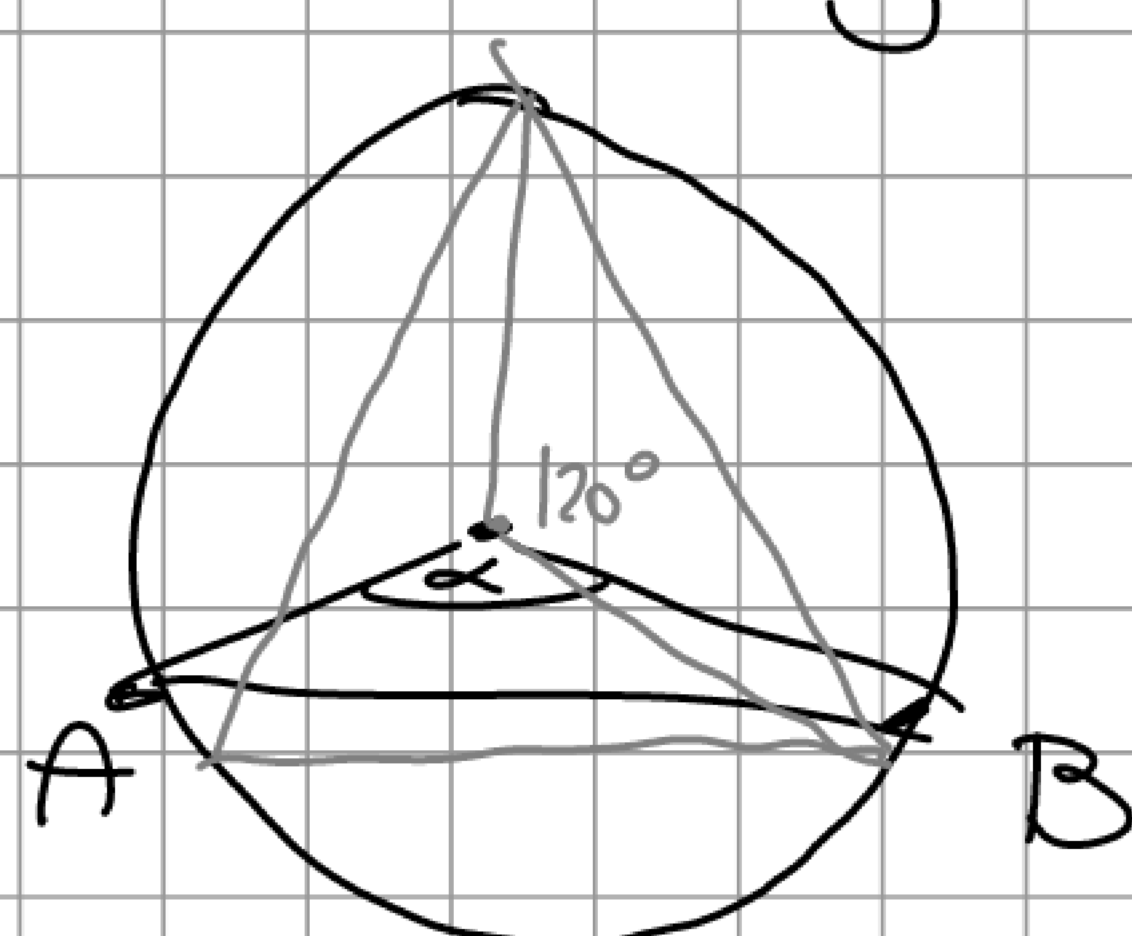
W okręgu o promieniu 1 wybrano losowo cięciwę AB. Jakie jest p-stwo, że będzie ona dłuższa niż bok trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg?

Cel: $\mathbb{P}[|AB| > a]$



Rozw. 1

Dł. cięciwy zależy jedynie od kąta, na którym jest rozwarta:



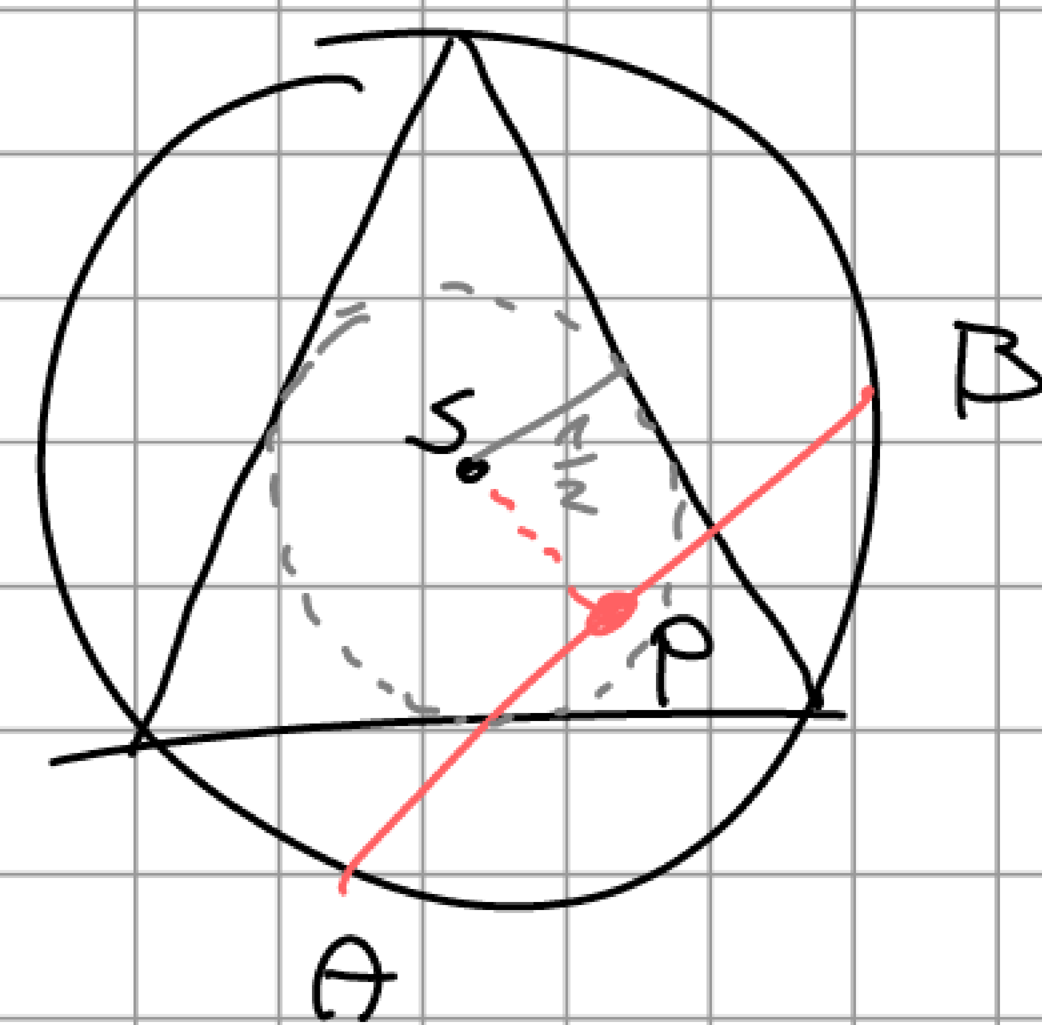
$|AB| > a \iff \alpha > \frac{2}{3}\pi, \quad \alpha \in [0, \pi]$

Nasza p. prob. to teraz:

$$\left([0, \pi], \mathcal{B}or([0,\pi]), \frac{1}{\pi} Leb\right)$$

$$\mathbb{P}\left(|AB| > \frac{2}{3}\pi\right) = \frac{1}{3}$$

Rozw. 2



$|AB|$ jest jedn. wyznaczona przez długość $|SP|$.

$|AB| > a$ iff P leży wewnątrz koła wpisanego w trójkąt.

Nasza przestrzeń:

$$\Big(\underset{\mathbb{R}^2}{\underset{\cap}{B(0,1)}},\ \mathcal{B}or(B(0,1)),\ \tfrac{1}{\pi}\, \mathrm{Leb}_2 \Big)$$

$$\mathbb{P}\big[\,|AB| > a\,\big] = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \pi}{\pi} = \frac{1}{4}$$

Rozw. 3

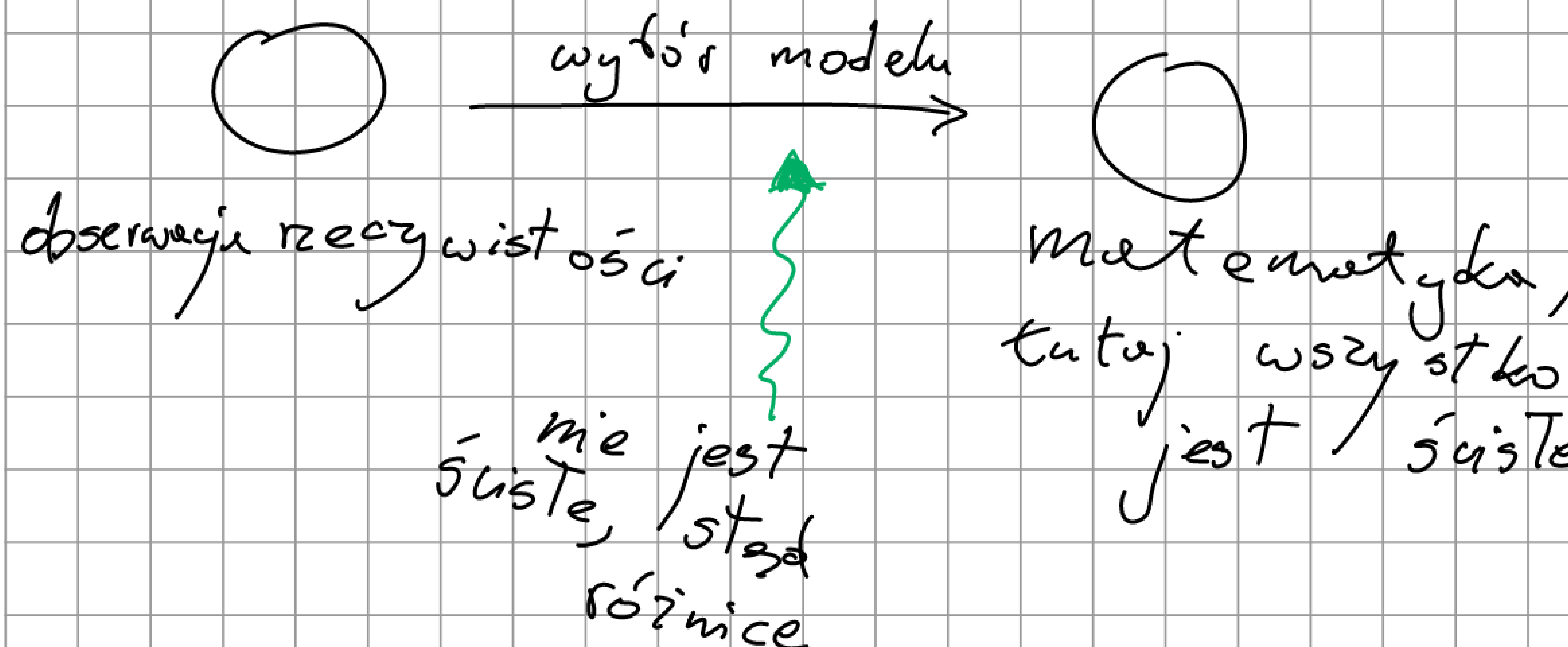
Wybór cięciwy jest niezmiennicza na obroty.

Możemy po prostu wylosować punkt z promienia okręgu, wyznaczy on cięciwę.

P. prob: $([0,1], \mathcal{B}or([0,1]), leb)$

$$\mathbb{P}(|AB| > a) = \frac{1}{2}$$

<u>Morał:</u> wszystko zależy od wyboru p. probabilistycznej:



P-stwo warunkowe.

<u>Motywacja</u> Powiedzmy, że chcemy liczyć średnie składki emerytalne. Mężczyźni żyją średnio 70 lat, jednak że jeśli facet dożyje wieku

emerytalnego, to dożyje średnio 83 roku życia.

<u>Def. 2.1.</u> $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – p. prob. oraz A, B takie zdarzenia, że $\mathbb{P}[B] > 0$. **P-stwo warunkowe** zdarzenia A pod warunkiem B nazywamy liczbę

$$\mathbb{P}[A \mid B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$$

Wówczas przy ustalonym zbiorze B, miara $\mathbb{P}[\cdot \mid B]$ jest miarą prob. na $(\Omega, \mathcal{F})$.

<u>Def. 2.2</u> Rodzina $\{B_k\}_{k=1}^{n}$ (dopuszczamy $n = \infty$) jest **rozbiciem** zbioru Ω, gdy $\Omega = \dot{\bigcup}_{k=1}^{n} B_k$ ← suma rozłączna.

(wystarczyłoby $\mathbb{P}[\Omega - \bigcup B_k] = 0$)

TW. 2.3 Wzór na p-stwo całkowite

$\{B_k\}_k^n$ – rozbicie Ω takim, że $\mathbb{P}[B_k] > 0$, to dla $A \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}[A] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}[A \mid B_k] \cdot \mathbb{P}[B_k]$$

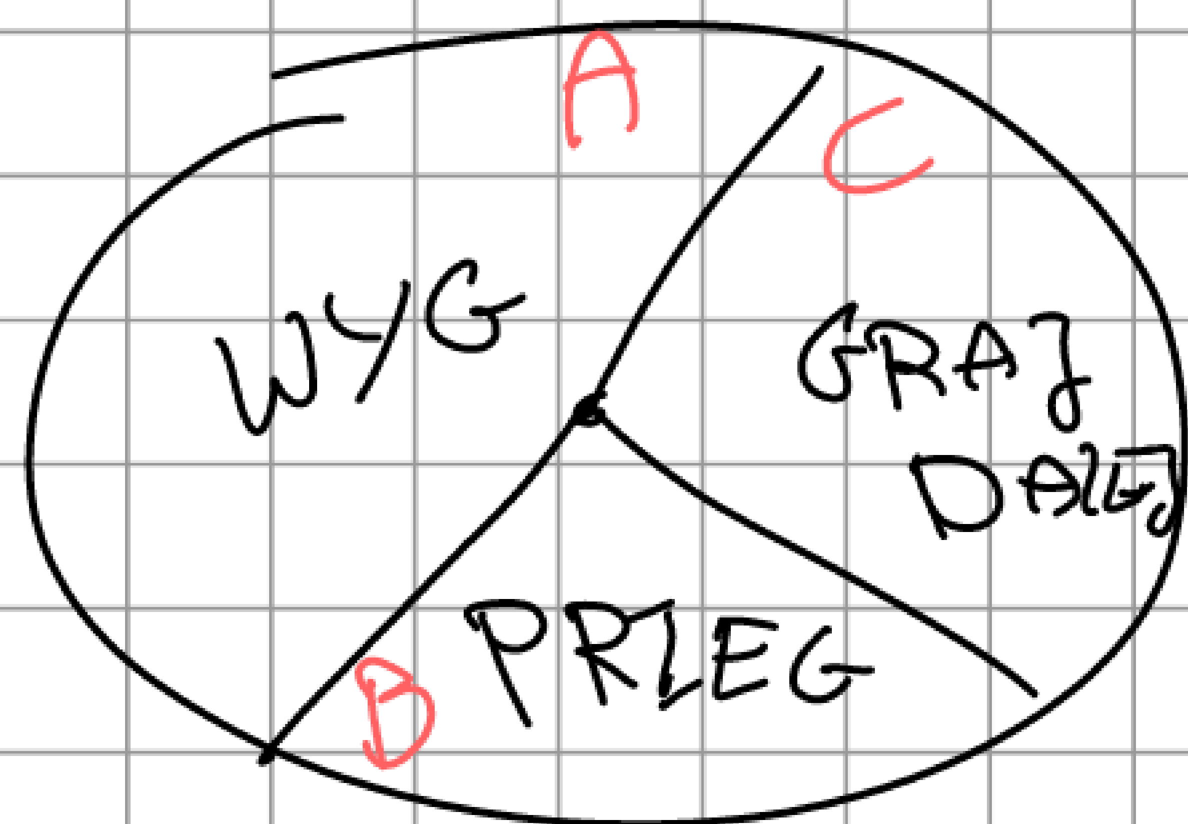
D-d.

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A \cap \underbrace{\bigcup_k^n B_k}_{=\Omega}] = \mathbb{P}[\bigcup_k^n \underbrace{A \cap B_k}_{\text{rozł.}}] =$$

$$= \sum_k^n \mathbb{P}[A \cap B_k] = \sum_k^n \mathbb{P}[A \mid B_k]\, \mathbb{P}[B_k]$$

■

Przykład Gramy na loterii. Wyciągamy los. Z p-stwem p wygrywamy, z p-stwem q przegrywamy, z p-stwem r ciągniemy jeszcze raz (los „graj dalej”). Jakie jest pstwo wygranej?



$$\mathbb{P}[W] = \overset{1}{\mathbb{P}[W|A]} \cdot \overset{p}{\mathbb{P}[A]} + \overset{0}{\mathbb{P}[W|B]} \cdot \overset{q}{\mathbb{P}[B]} + \underset{\mathbb{P}[W]}{\mathbb{P}[W|C]} \cdot \underset{r}{\mathbb{P}[C]} =$$

$$= p + \mathbb{P}[W] \cdot r$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{P}[W] = \frac{p}{1-r} = \frac{p}{p+q}$$

<u>Dygresja:</u> z punktu widzenia probabilistyki zbiory miary 0 są „niewidoczne", nie zmieniają ani nie wpływają na przebieg doświadczenia.

TW. 2.4 Wzór Bayesa

Przy założeniach jak wyżej, jeśli $\mathbb{P}[A] > 0$, to dla każdego k

$$\mathbb{P}[B_k | A] = \frac{\mathbb{P}[A | B_k] \cdot \mathbb{P}[B_k]}{\sum_i^n \mathbb{P}[A | B_i] \mathbb{P}[B_i]}$$

D-d.

$$\mathbb{P}[B_k | A] = \frac{\mathbb{P}[B_k \cap A]}{\mathbb{P}[A]} = \frac{\mathbb{P}[B_k | A] \cdot \mathbb{P}[A]}{\sum_i \mathbb{P}[A | B_i] \mathbb{P}[B_i]}$$

popr. tw.

def. prawd. warunk.

Przykład Mamy 100 monet, jedna jest fałszywa i ma orła po obu (ma orła po dwóch stronach) stronach. Wybieramy losową monetę i rzucamy nią 10 razy. Otrzymaliśmy 10 orłów. Jakie jest p-stwo, że wylosowaliśmy fałszywą monetę?

Krok 1. Wybór monety

Krok 2. 10 raz rzucamy

Wynik: 10 orłów

używamy wyniku do analizy poprzednich kroków

B_1 – dobra moneta

B_2 – fałszywa moneta

A – 10 orłów

$\Omega = B_1 \,\dot\cup\, B_2$

$$\mathbb{P}[B_2 \mid A] = \frac{\mathbb{P}[A \mid B_2]\,\mathbb{P}[B_2]}{\mathbb{P}[A \mid B_1]\,\mathbb{P}[B_1] + \mathbb{P}[A \mid B_2]\,\mathbb{P}[B_2]} =$$

$$= \frac{1 \cdot \frac{1}{100}}{\frac{1}{2^{10}} \cdot \frac{99}{100} + 1 \cdot \frac{1}{100}} \approx 0.91$$

Przykład Pewna choroba zaraża jedną na 1000 osób. Test na tę chorobę wykrywa ją z p-stwem 99%, a u osób zdrowych działa poprawnie z p-stwem 95%. Załóżmy, że u losowej osoby test wyszedł pozytywny. Jakie jest p-stwo, że naprawdę jest chora?

Zdarzenia:

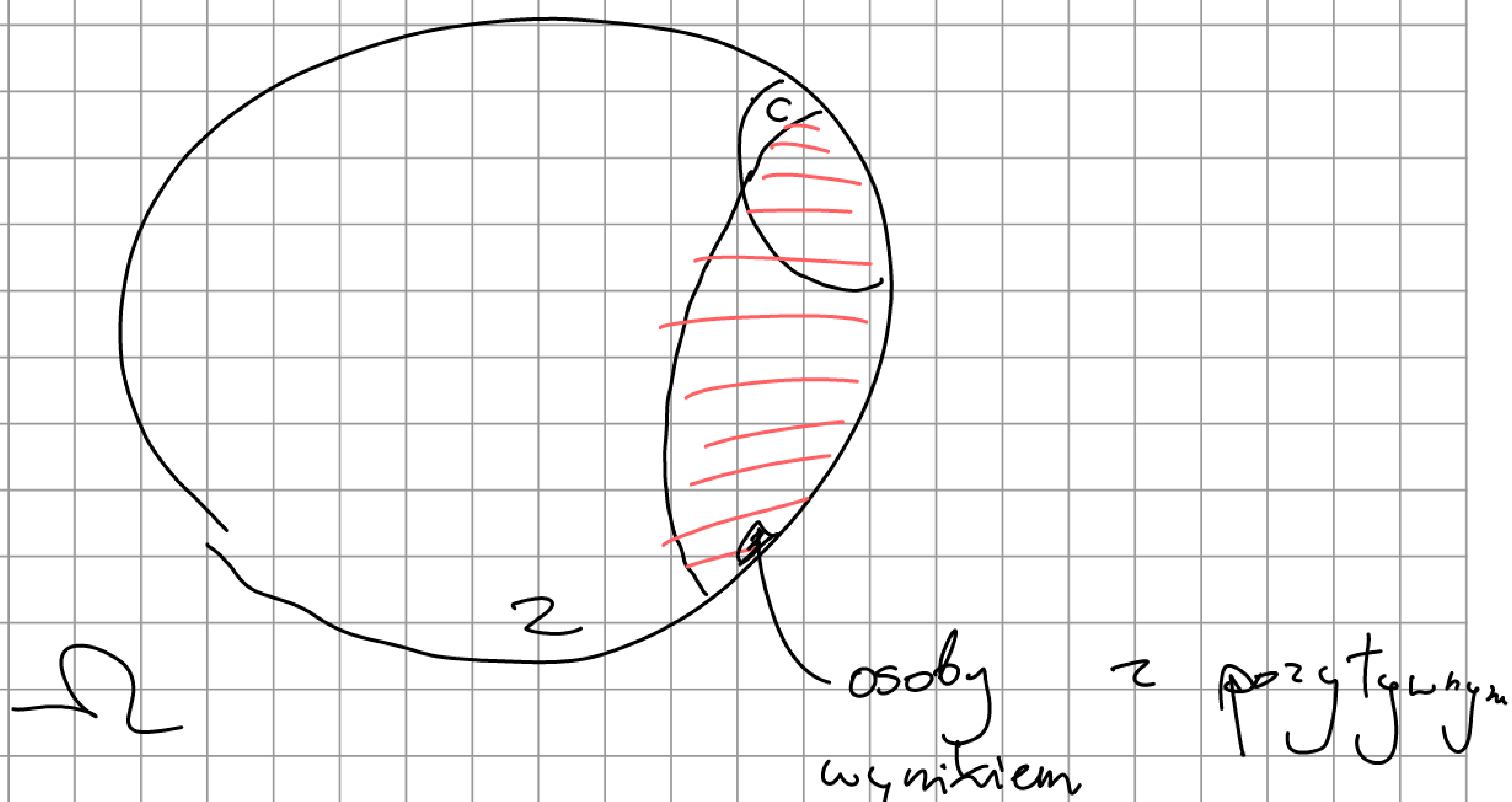
C – chora, Z – zdrowa. $\Omega = C \cup Z$

T – pozytywny test

$$\mathbb{P}[C \mid T] = \frac{\mathbb{P}[T \mid C] \cdot \mathbb{P}[C]}{\mathbb{P}[T \mid C] \cdot \mathbb{P}[C] + \mathbb{P}[T \mid Z] \cdot \mathbb{P}[Z]} =$$

$$= \frac{0.99 \cdot \frac{1}{1000}}{\frac{99}{100} \cdot \frac{1}{1000} + \frac{5}{100} \cdot \frac{999}{1000}} = 0.194\ldots$$

SZOK!



Lekarz do pacjenta:

„Niech będzie pan spokojny. Ze wzoru Bayesa wynika że jest tylko 19,4% szans, że jest pan chory!"

NIEZALEŻNOŚĆ ZDARZEŃ

<u>Motywacja:</u> jeżeli zdarzenie A nie zależy od zdarzenie B,

to chcielibyśmy mieć równość $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A \mid B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$

Stąd definiujemy:

Def. 2.5. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – p. prob.

Wtedy zdarzenia $A, B \in \mathcal{F}$ są **niezależne**, gdy

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]$$

Przykład Wybieramy losową dziewczynę posiadającą n dzieci. Niech A będzie zdarzeniem, że w wybranej rodzinie jest co najwyżej jedna dziewczynka, a B zdarzeniem, że są dziewczyny i chłopcy.

Czy A jest niezależne z B?

$\Omega = \{d, c\}^n$ – płeć dzieci wg wieku

$|A| = n+1$, $|B| = 2^n - 2$.

$|A \cap B| = n$

$$\mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B] = \frac{n+1}{2^n} \cdot \frac{2^n-2}{2^n}$$

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \frac{n}{2^n}$$

$$\frac{n}{2^n} = \frac{n+1}{2^n} \cdot \frac{2^n-2}{2^n}$$

$$\Downarrow$$

$$2^n = 2n+2$$

$$n = 3$$

Morał: niezależność jest czysto algebraicznym pojęciem.

Trzeba o tym myśleć w kategoriach definicji, a nie intuicji.

Def. 2.6. Zdarzenia $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ nazywamy **niezależnymi**, gdy

$$\mathbb{P}[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}] = \mathbb{P}[A_{i_1}] \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}[A_{i_k}]$$

dla każdego ciągu $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$, $k = 2, 3, \dots, n$.

Def. 2.7 Zdarzenia $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ nazywamy **niezależnymi parami**, gdy dla dowolnej pary $i \neq j$ A_i jest niezależne z A_j

Przykład Rzucamy 2 razy kostką

- A – za pierwszym razem wypadła parzysta l. oczek
- B – za drugim razem wypadła parzysta liczba oczek
- C – suma l. oczek jest parzysta

Wówczas A, B, C są parami niezależne, ale NIE są niezależne.

<u>Def. 2.8</u> Załóżmy, że $\{A_i\}_{i \in I}$ jest pewną rodziną zdarzeń. Mówimy, że zdarzenia są **niezależne**, jeżeli wszystkie skończone podzbiory $\{A_i\}$ są niezależne.

<u>Def. 2.9</u> $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – p. prob., $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ będą σ-ciałami zawartymi w $\mathcal{F}$. Mówimy, że te σ-ciała są **niezależne**, gdy dla dowolnych $A_1 \in \mathcal{F}_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}_n$ zachodzi

$$\mathbb{P}[A_1 \cap \dots \cap A_n] = \mathbb{P}[A_1] \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}[A_n].$$

Dowolna rodzina $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ jest niezależna, gdy każdy jej skończony

Podzbiór jest niezależny.

Tw. 2.10 σ-ciała $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ są niez. $\Longleftrightarrow$ dowolne zdarzenia $A_1, \dots, A_n$ są niezależne.

Przykład Rzucamy 2 razy kostką. Niech $\Omega = \{(i,j) : i,j \in \{1 \dots 6\}\}$, $\mathcal{F}$ składa się ze wszystkich podzbiorów Ω, a $\mathbb{P}$ jest miarą prob. Rozważmy dwa σ-ciała

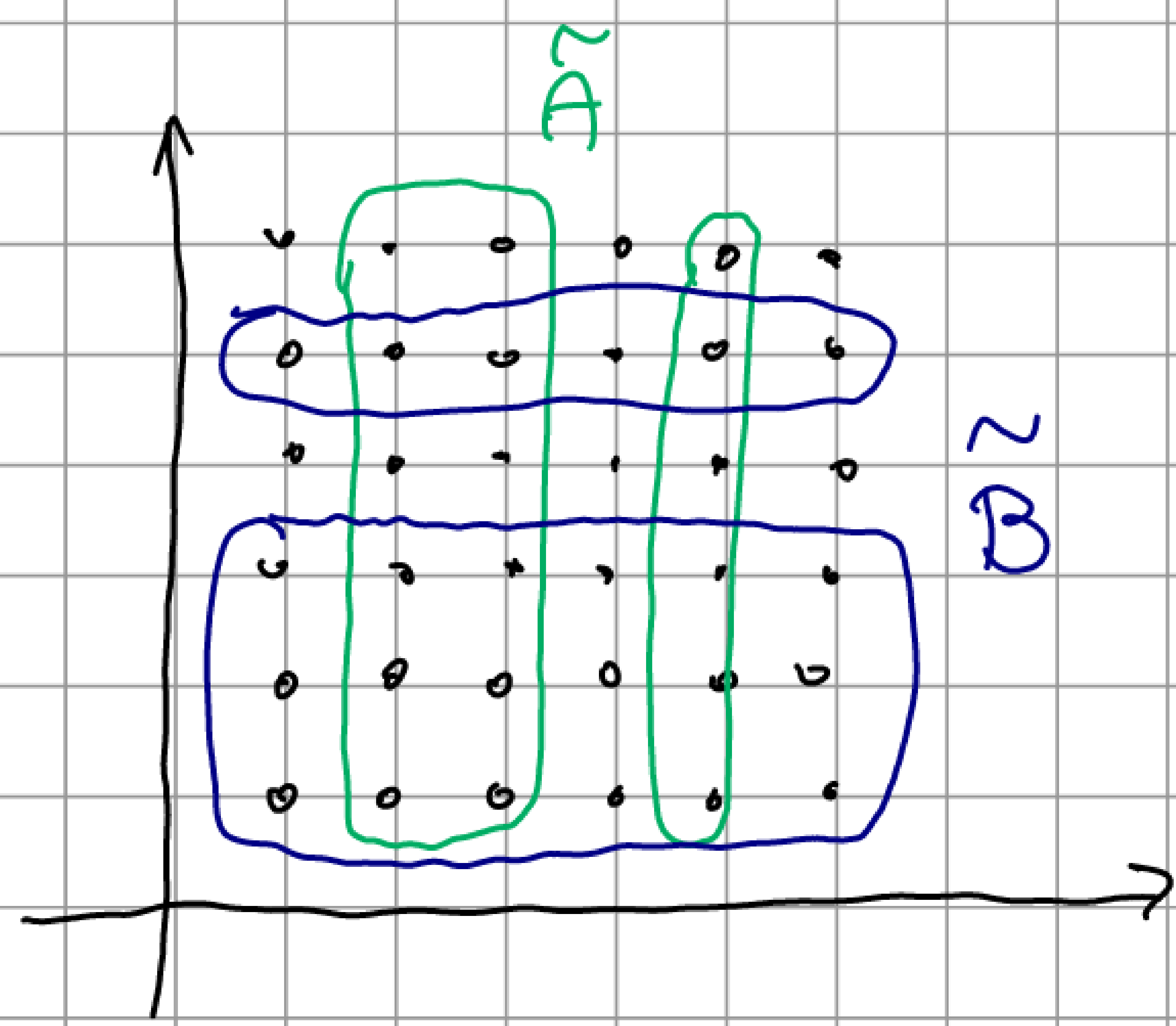
$$\mathcal{F}_1 = \{A \times \{1, \dots, 6\} : A \subset \{1, \dots, 6\}\}$$

$$\mathcal{F}_2 = \{\{1, \dots, 6\} \times B : B \subset \{1, \dots, 6\}\}$$

Pokazać, że $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ są niezależne.

Rozw. $\underbrace{A \times \{1, \dots, 6\}}_{= \tilde{A}} \in \mathcal{F}_1$, $\underbrace{\{1, \dots, 6\} \times B}_{= \tilde{B}} \in \mathcal{F}_2$.

$$\mathbb{P}[\tilde{A}\cap\tilde{B}] = \mathbb{P}[A\times B] = \frac{|A|\cdot|B|}{36} = \mathbb{P}[\tilde{A}]\,\mathbb{P}[\tilde{B}].$$



$A = \{2,3,5\}$

$B = \{1,2,3,5\}$

$\tilde{A}$, $\tilde{B}$ to sumy poziomych / pionowych prostokątów.

$$\mathbb{P}[\tilde{A}] = \frac{6\cdot|A|}{36} = \frac{|A|}{6}$$

$$\mathbb{P}[\tilde{B}] = \frac{6\cdot|B|}{36} = \frac{|B|}{6}$$

Co jest naszym celem?

Chcemy na tyle, na ile się da, przenieść intuicje na formalny język.

RPis polega na tym że wykonujemy doświadczenie $n \to \infty$ razy. Potrzebujemy jakąś przestrzeń, która pozwoli nam np. rzucić nieskończenie wiele razy monetą.

To są na razie pierwsze kroki w uogólnianiu dyskretnej probabilistyki.

10.03.2021

Lemat 2.11 $A_1, \dots, A_n$ - zdarzenia niezależne. Wtedy σ-ciała $\sigma(A_1), \dots, \sigma(A_n)$ $\left(\sigma(A_i) = \{\emptyset, A_i, A_i^c, \Omega\}\right)$ również są niezależne.

Wniosek 2.12 Jeżeli $A_1, \dots, A_n$ są niezależne, to

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] = 1 - \mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^n A_i^c\right] =$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^n \left(1 - \mathbb{P}[A_i]\right)$$

Problem Przeprowadzamy n doświadczeń. Są one niezależne. (tak życiowo, nie algebraicznie) i-te jest opisane przez $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i)$.

(np. $X_1, \dots, X_{10}$ - wyniki 10 rzutów kostką) ale problem, bo one są określone na różnych przestrzeniach. Jak to łączyć?

Cel: Chcielibyśmy zdefiniować jedną dużą przestrzeń i jeszcze jakoś przemycić informację o niezależności naszych doświadczeń.

Kolejny problem: Chcemy przejść z n do nieskończoności, określić jakieś nieskończone ciągi doświadczeń.

Rozwiązanie celu: na razie n-skończone.

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n$$

$$\mathcal{F}_i' = \{ \Omega_1 \times \ldots \times \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-ta wsp.}}}{A} \times \ldots \times \Omega_n : A \in \mathcal{F}_i \}$$

$$\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F}_1', \ldots, \mathcal{F}_n') = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_n$$

Szukamy $\mathbb{P}$: powinna spełniać:

$$\mathbb{P}[A_1 \times \ldots \times A_n] = \mathbb{P}[A_1] \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}[A_n]$$

Wiemy, że miara produktowa spełnia te warunki!

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2 \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_n$$

Miara produktowa w końcu ma sens...

<u>Przykład</u> (Bernoulli) Wykonano n-krotnie to samo doświadczenie, w którym pstwo sukcesu wynosi p. Kolejne próby są niezależne. Wówczas p-stwo sukcesu w $\underbrace{k}_{\text{dokładnie}}$ próbach wynosi $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

<u>D-d.</u> $\Omega_i = \{0,1\}$, $\mathcal{F}_i$, $\mathbb{P}_i[\{1\}] = p$.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Ustalmy $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega$

$$\mathbb{P}_1[\{\omega_1\}] = p^{\omega_1} (1-p)^{1-\omega_1}$$

$$\mathbb{P}[\{\omega\}] = \prod_{i=1}^{n} p^{\omega_i}(1-p)^{1-\omega_i} =$$

$$= p^{\sum \omega_i}(1-p)^{n-\sum \omega_i}$$

A_k — zdarzenie które mówi, że było k sukcesów.

$$A_k = \{\omega : \sum \omega_i = k\}.$$

$$\mathbb{P}[A_k] = \sum_{\omega \in A_k} \mathbb{P}[\{\omega\}] =$$

$$= \sum_{\omega \in A_k} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= |A_k|\, p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

<u>Pytanie</u>: co gdy $n = \infty$? Chcemy zdefiniować p. prob. opisującą nieskończone ciągi niezależnych doświadczeń!

TW. 2.13 (Kołmogorowa)

Załóżmy, że dany jest ciąg miar $\mathbb{P}_n$ na $(\mathbb{R}^n, Bor(\mathbb{R}^n))$ spełniający warunek zgodności

$$\mathbb{P}_{n+1}[A_1 \times \ldots \times A_n \times \mathbb{R}] = \mathbb{P}_n[A_1 \times \ldots \times A_n].$$

Wówczas istnieje jedyna miara probabilistyczna $\mathbb{P}$ na $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, Bor(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}))$ ($Bor(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ jest generowane przez „skończenie" wymiarowych kostkach) taka, że

$$\mathbb{P}[A_1 \times \ldots \times A_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots] = \mathbb{P}_n[A_1 \times \ldots \times A_n]$$

Przykład Zamierzamy skonstruować przestrzeń prob. na której można zdefiniować ciąg niezależnych zdarzeń $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ takich, że $\mathbb{P}[A_n] = 1/2$

Szukamy p. prob. na której zdef. ∞ ciąg niezależnych rzutów monetą.

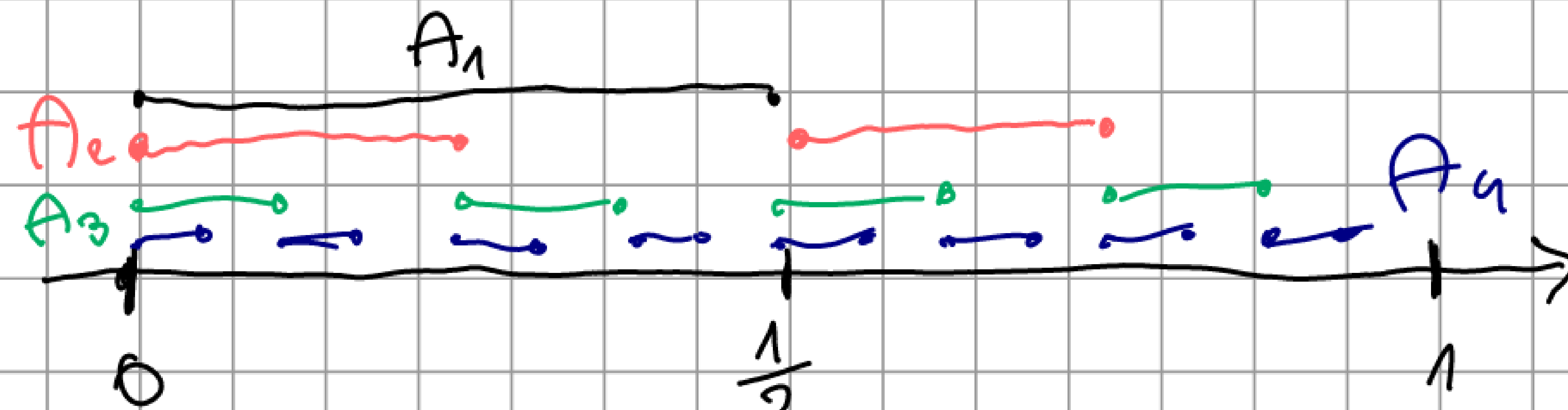
$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}or([0,1]), \underset{\lambda}{\overset{\shortparallel}{Leb}})$$

$$\omega \in [0,1], \quad \omega = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\omega_n}{2^i} = 0,\omega_1\omega_2\ldots$$

(nie jest jedn.: $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$)

(Ale takich liczb jest przeliczalnie wiele więc mamy to gdzieś)

$$A_n = \{\omega \in [0,1] : \omega_n = 0\}$$



$\lambda(A_n) = \frac{1}{2}$. Zadanie: $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ są niezależne

Def. 3.1 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – p. prob., $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$: ciąg zdarzeń. **Granicą górną** ciągu $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazywamy zdarzenie

$$\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$$

Kiedy $\omega \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n$? gdy $\forall m$ $\omega \in \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$, czyli ω należy do nieskończonej liczbie zdarzeń.

Lemat 3.2. (Borela – Cantelliego)

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – p. prob., $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$.

1. Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} A_n < \infty$, to
$$\mathbb{P}[\limsup_n A_n] = 0$$
tzn. z pstwem 1 zachodzi tylko skończenie wiele z A_n.

2. Jeżeli $A_1, \ldots$ są niezależne oraz $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \infty$, to $\mathbb{P}[\limsup_n A_n] = 1$.

tzn. z pstwem 1 zachodzi ∞ wiele zdarzeń A_n.

D-d

1. $\mathbb{P}\left[\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right] \leq \mathbb{P}\left[\bigcup_{n=M}^{\infty} A_n\right] \leq$

$\leq \sum_{n=M}^{\infty} \mathbb{P}[A_n] \xrightarrow{M \to \infty} 0$

(z def. zbieżności szeregu)

2. Wystarczy, że

$0 = \mathbb{P}[(\limsup A_n)^c] =$

$= \mathbb{P}\left[\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right)^c\right] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c\right]$

Wystarczy pokazać, że

$\forall m \quad \mathbb{P}\left[\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c\right] = 0$

Korzystamy kolejno z tw. o ciągłości, niezależności zbiorów A_n oraz nierówności

$1 - x \leq e^{-x}$:

$$\mathbb{P}\left[\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c\right] = \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\left[\bigcap_{n=m}^{k} A_n^c\right] =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \prod_{n=m}^{k} \mathbb{P}[A_n^c] = \lim_{k\to\infty} \prod_{n=m}^{k} (1-\mathbb{P}[A_n])$$

$$\leq \lim_{k\to\infty} e^{-\sum_{n=m}^{k} \mathbb{P}[A_n]} = e^{-\sum_{n=m}^{\infty} \mathbb{P}[A_n]} = 0$$

$\blacksquare$

<u>Przykład</u> Ω, A_i - w i-tym rzucie 6.

$$\mathbb{P}[A_i] = \frac{1}{6}. \quad \sum \mathbb{P}[A_i] = \infty.$$

Z Lematu B-C

$$\mathbb{P}[A_n \underbrace{\text{i.o.}}_{\text{infinitly often}}] = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\mathbb{P}[\limsup_n A_n] = 1\right)$$

(czyli w ciągu zdarzeń z pstwem 1 zachodzi nieskończenie wiele z nich)

<u>Przykład</u> Uzasadnić, że jeżeli będziemy rzucać odpowiednio długo kostką, to z pstwem 1 wyrzucimy w kolejnych

punktach ciąg złożony z kolejnych 10 jedynek i kolejnych 10 szóstek.

$$\Omega = \{1, \dots, 6\}^{\mathbb{N}}, \quad \mathcal{F} = 2^{\Omega}, \quad \mathbb{P}$$

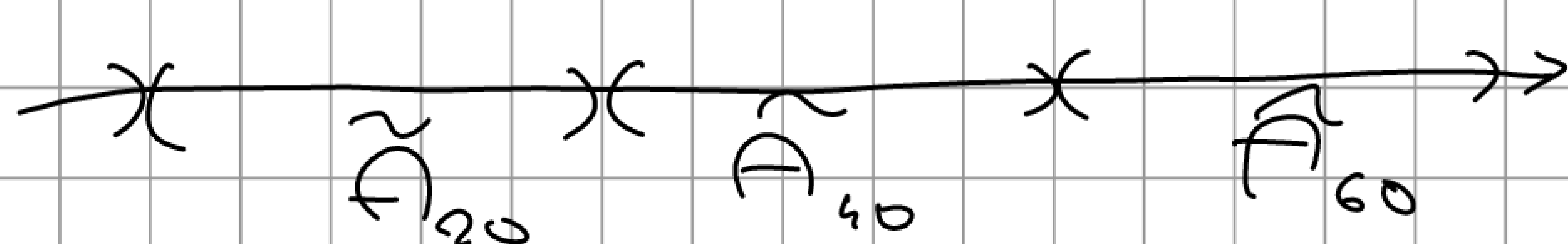
$$A_n = \{\omega : \omega_n = \dots = \omega_{n+9} = 1, \ \omega_{n+10} = \dots = \omega_{n+19} = 6\}$$

$$\mathbb{P}[A_n] = \frac{1}{6^{20}}. \quad \sum \mathbb{P}[A_n] = \infty.$$

Problem: A_n są zależne!

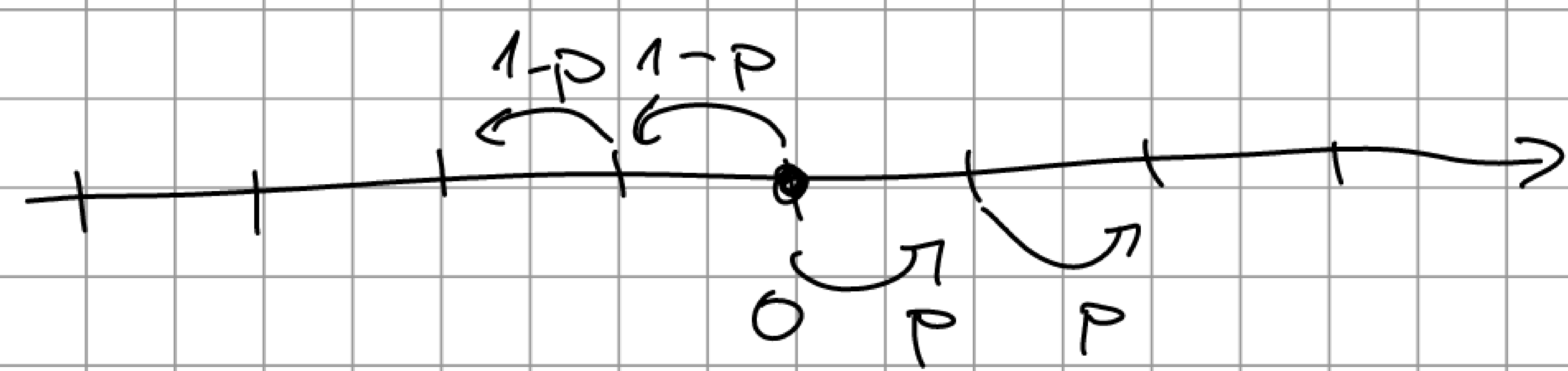
$\tilde{A}_n = A_{20n}$. Zdarzenia $\{\tilde{A}_n\}$ są niezależne. $\mathbb{P}[\tilde{A}_n] = \frac{1}{6^{20}}$.

Z lem. B-C $\mathbb{P}[\tilde{A}_n \text{ i.o.}] = 1$



$\rightsquigarrow \mathbb{P}[A_1 \cap A_2] = 0, \quad \mathbb{P}[A_1]\mathbb{P}[A_2] = \left(\frac{1}{6^{20}}\right)^2$

Przykład Rzucamy ∞ wiele razy niesymetryczną monetą. Niech A_n oznacza zdarzenie, że w pierwszych n rzutach wypadło tyle samo orłów co reszek. Pokaż że z p-stwem 1 zachodzi jedynie skończenie wiele zdarzeń A_n.



Spacer losowy — z p-stwem p idziemy w prawo, $1-p$ w lewo. Przykład mówi o tym, że 0 odwiedzimy skończenie wiele razy.

Obs. 1: $\mathbb{P}[A_{2n+1}] = 0$ (oczywiste)

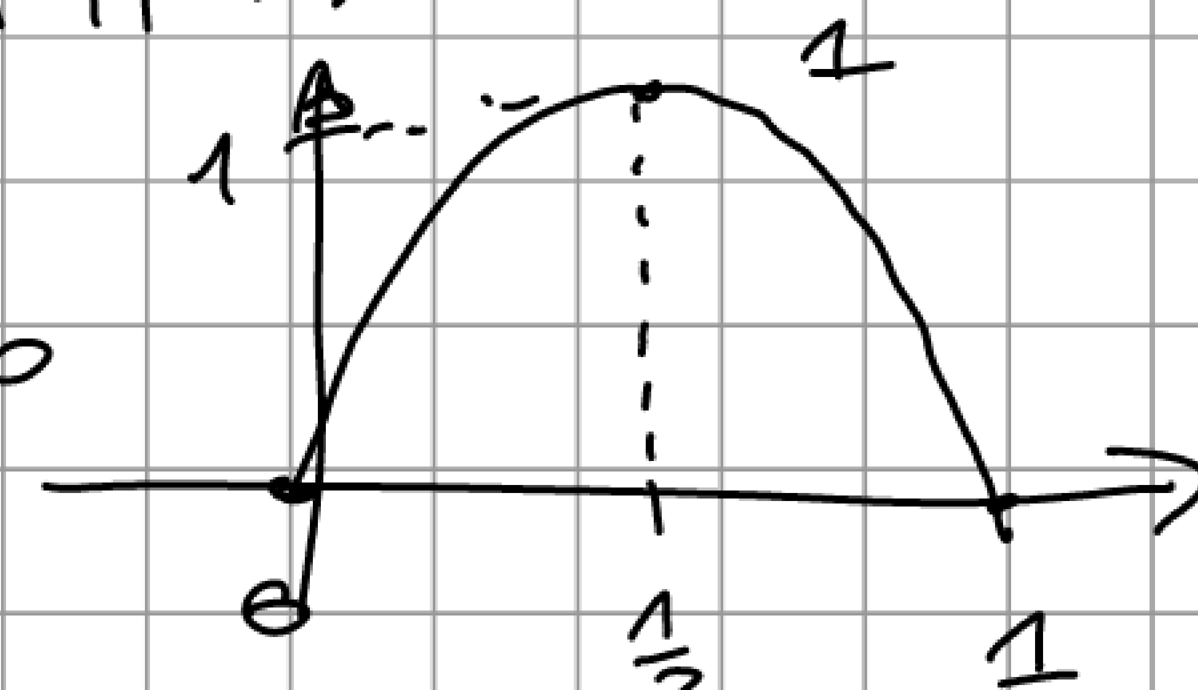
Obs. 2: $\mathbb{P}[A_{2n}] = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$

(Wzór Stirlinga: $n! \sim \sqrt{2\pi}\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$)

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{2n}}{n} \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

$$\mathbb{P}[A_{2n}] \sim \frac{[4p(1-p)]^n}{\sqrt{\pi n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}} < \infty$$



Z lem. B-C

dla $p \neq \frac{1}{2}$ $p(1-p) < 1$

$$\mathbb{P}[A_n \text{ i.o.}] = 0$$

$\Updownarrow$

A_n musi zajść skończenie wiele razy.

Def. 3.3 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – p. prob.

Zmienną losową nazywamy dowolną mierzalną funkcję $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
(Czyli dla dowolnego $B \in Bor(\mathbb{R})$ mamy $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$)

Przykład

- Rzucamy 5 razy kostką i chcemy obliczyć sumę wyników (nie interesują nas konkretne wyniki, tylko suma). Wówczas $\Omega = \{(i_1, \dots, i_5), i_j \in \{1, \dots, 6\}\}$, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_5)$ oraz $X(\omega) = \omega_1 + \dots + \omega_5$ jest zmienną losową.
- X – wartość wygranej w totku
- X – cena ...

Uwagi:

- Ω: skończony, to dla $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ każde odwzorowanie $X: \Omega \to \mathbb{R}$ jest mierzalne
- X jest zmienną losową jeżeli dla każdego t $X^{-1}((-\infty, t]) \in \mathcal{F}$

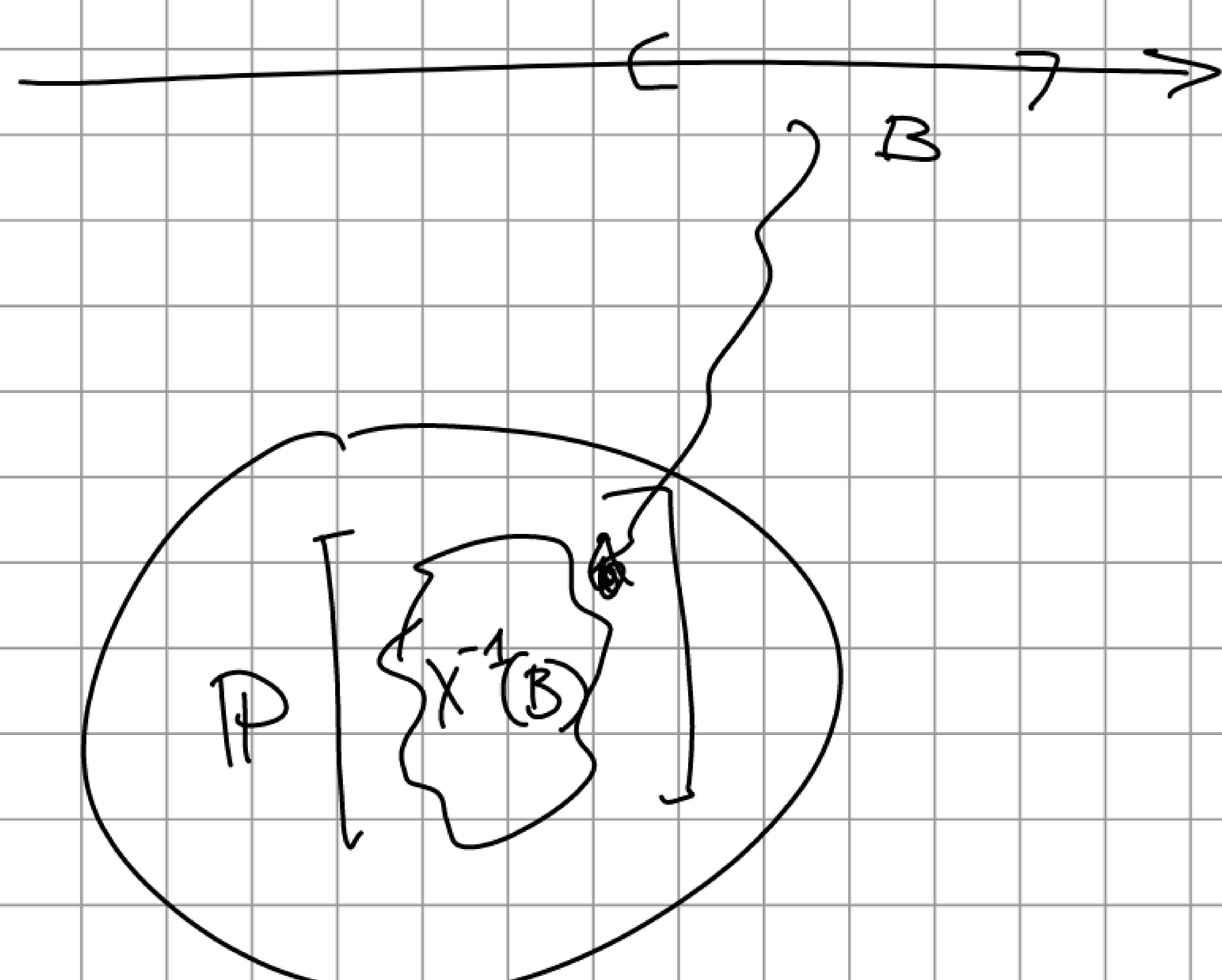
TW. 3.4 Jeżeli $X_1, X_2, \ldots$ są zmiennymi losowymi

1. $X_1 + X_2$, $X_1 - X_2$, $X_1 \cdot X_2$, $X_1 \setminus X_2$ $(X_2 \neq 0)$ są zmiennymi losowymi
2. Jeżeli $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest mierzalne (czyli borelowskie tutaj), to $f(X_1, \ldots, X_n)$ jest zmienną losową.
3. $\inf_n X_n$, $\sup_n X_n$, $\limsup_n X_n$, $\liminf_n X_n$ są zmiennymi losowymi.

Def. 3.5 Miarę μ na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R}))$ zdefiniowaną wzorem

$$\mu(B) := \mathbb{P}[X \in B] =$$
$$= \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}] = \mathbb{P}[X^{-1}(B)]$$

dla każdego $B \in \mathcal{B}or(\mathbb{R})$, nazywamy **rozkładem** zmiennej losowej X.



$$(\overset{\Omega}{\Omega}, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \xrightarrow{X} \overbrace{(\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R}), \mu)}^{\text{p. prob.}}$$

17.03.2021

Co było do tej pory?

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – p. prob, niezależność,

$X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightsquigarrow (\mathbb{R}, Bor(\mathbb{R}), \mu)$

μ – rozkład X

$$\mu(B) = \mathbb{P}[X \in B] = \mathbb{P}[\{\omega : X(\omega) \in B\}]$$

Definicja 3.6 Dystrybuantą zmiennej losowej X nazywamy funkcję $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ zadaną wzorem

$$F(t) = \mathbb{P}[X \leq t] = \mu((-\infty, t])$$

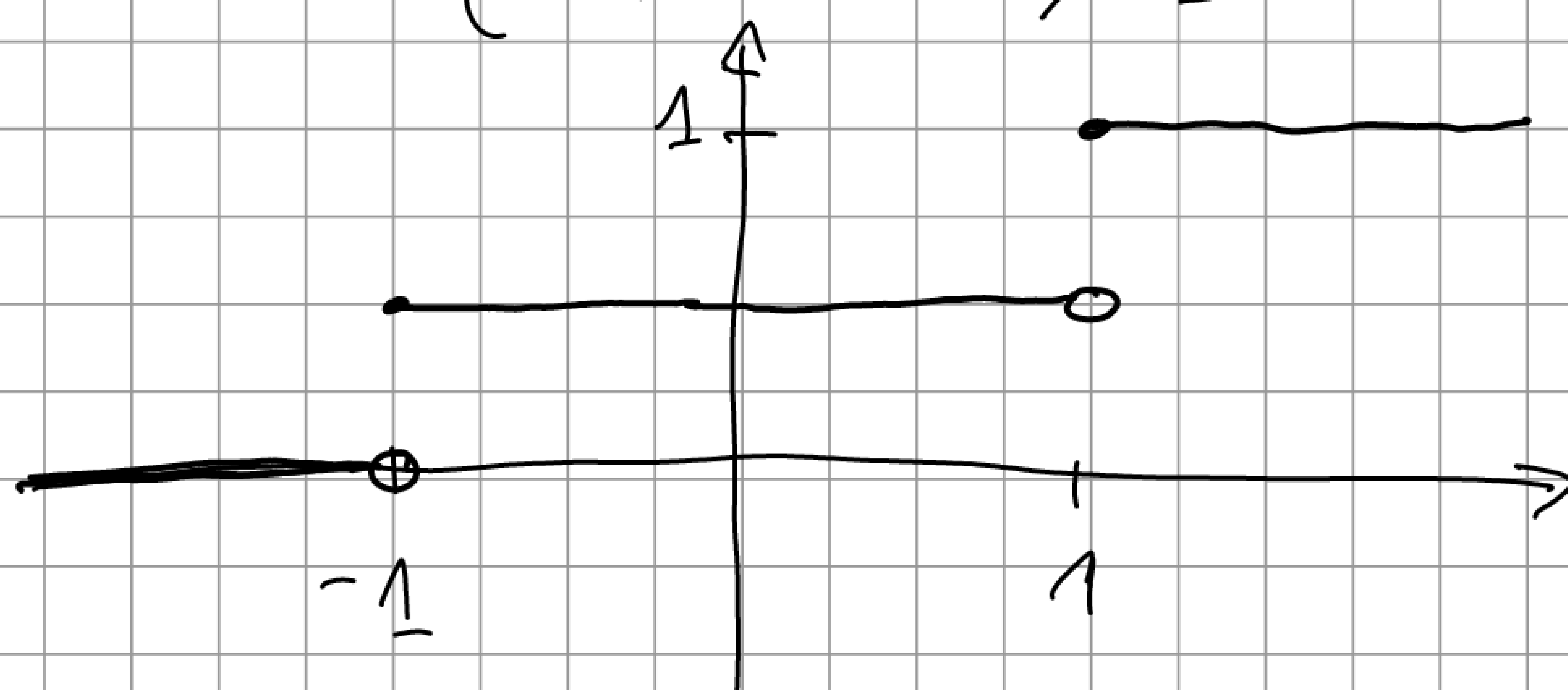
Przykład

1) $(\Omega = \{O, R\}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

$X(O) = 1, \quad X(R) = -1$

Jak wygląda dystrybuanta?

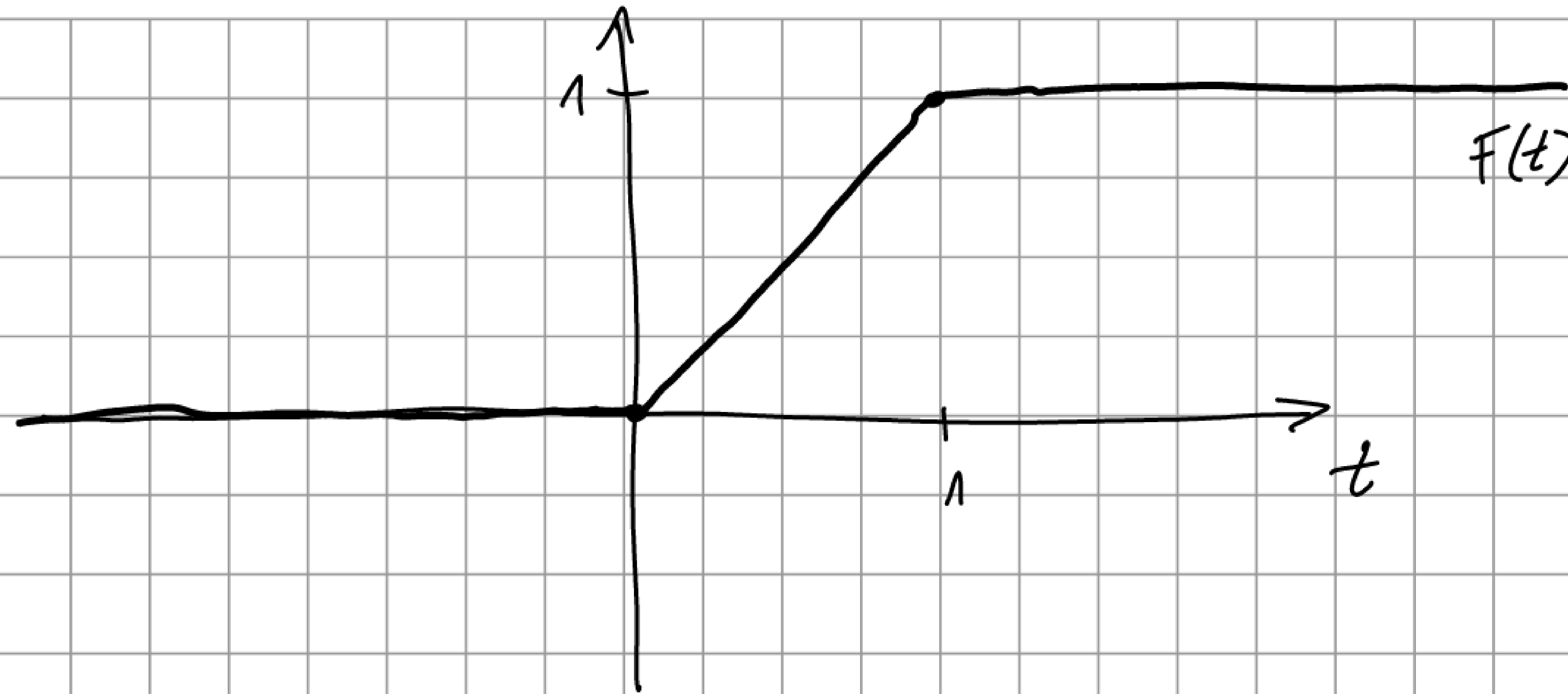
$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < -1 \\ \frac{1}{2} & t \in [-1, 1) \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$$



2) Losujemy jednostajnie liczbę z przedziału $[0,1]$. $([0,1], Bor[0,1], \lambda)$, $X(\omega) = \omega$.

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \leq 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$$

$$\mathbb{P}[X \leq t] = \lambda([0,t]) = t$$



<u>Tw. 3.7</u> : Własności dystrybuanty

1. F jest niemalejąca
2. $\lim\limits_{t\to-\infty} F(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} F(t) = 1$
3. F jest prawostronnie ciągła
4. Dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ istnieje lewostronna granica

$$F(t-) = \lim_{s\to t^-} F(s) = \mathbb{P}[X<t]$$

5. F jest nieciągła w punkcie t_0 iff $\mathbb{P}[X=t_0] > 0$. Wówczas $\mathbb{P}[X=t_0] = F(t_0) - F(t_0-)$.

Punkt t_0 nazywamy **atomem** rozkładu.

D-d.

2. Niech $t_n \nearrow \infty$. Wtedy $\{(-\infty, t]\}$ jest wstępującą rodziną zbiorów.

$\bigcup_n (-\infty, t_n] = \mathbb{R}$. Z lematu o ciągłości miary $\lim_{n\to\infty} F(t_n) = \lim_{n\to\infty} \mu((-\infty, t_n]) =$

$$= \mu(\mathbb{R}) = 1.$$

3. Ustalmy $t \in \mathbb{R}$, $t_n \searrow t$. Wtedy $(t, t_n]$ jest zstępującą rodziną zbiorów.

$$\lim_{n\to\infty} \mu((t, t_n]) = \mu(\emptyset) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \mu((t, t_n]) = \lim_{n\to\infty} F(t_n) - F(t) \Rightarrow F(t) = \lim_{t_n \searrow t} F(t_n).$$

$$F(t_n) - F(t) = \mu((-\infty, t_n]) - \mu((-\infty, t]) = \mu((t, t_n])$$

5. $F(t_0) - F(t-) = \mu((-\infty, t_0]) -$

$- \lim_{t_n \to t^-} \mu((-\infty, t_n]) =$

$= \lim_{t_n \to t^-} \mu((-\infty, t_0]) - \mu((-\infty, t_n]) =$

$= \lim_{t_n \to t^-} \mu((t_n, t_0]) =$

$= \lim_{t_n \to t^-} \underbrace{\mu((t_n, t_0))}_{\to 0} + \mu(\{t_0\}) = \mu(\{t_0\}) =$

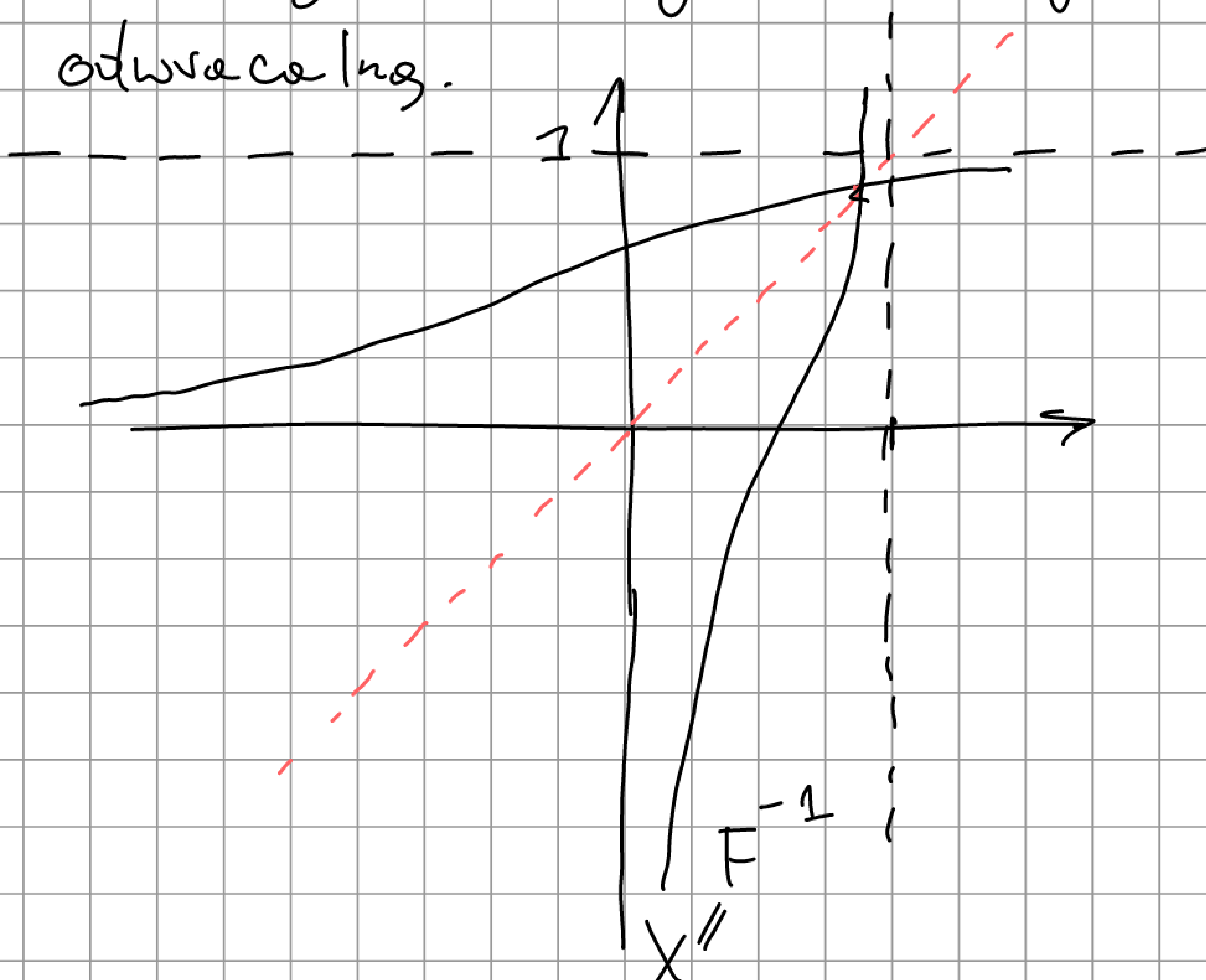
$= \mathbb{P}[X = t_0]$.

<u>TW. 3.8</u> Jeżeli F jest funkcją na $\mathbb{R}$ spełniającą warunki 1, 2 i 3 z poprzedniego twierdzenia, to F jest dystrybuantą pewnego rozkładu.

<u>D-d.</u> Chcemy znaleźć p. prob. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ oraz $X: \Omega \to \mathbb{R}$ t. że $F = F_X$ (dystrybuanta X).

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) := ([0,1], \mathrm{Bor}([0,1]), \lambda)$$

I Załóżmy, że F jest funkcją odwracalną.



$$X(\omega) := F^{-1}(\omega)$$

Sprawdźmy: $F_X(t) = \mathbb{P}[X \leq t] =$

$= \mathbb{P}[\{\omega : X(\omega) \leq t\}] \overset{*}{=} \mathbb{P}[\{\omega : F(X(\omega)) \leq F(t)\}]$

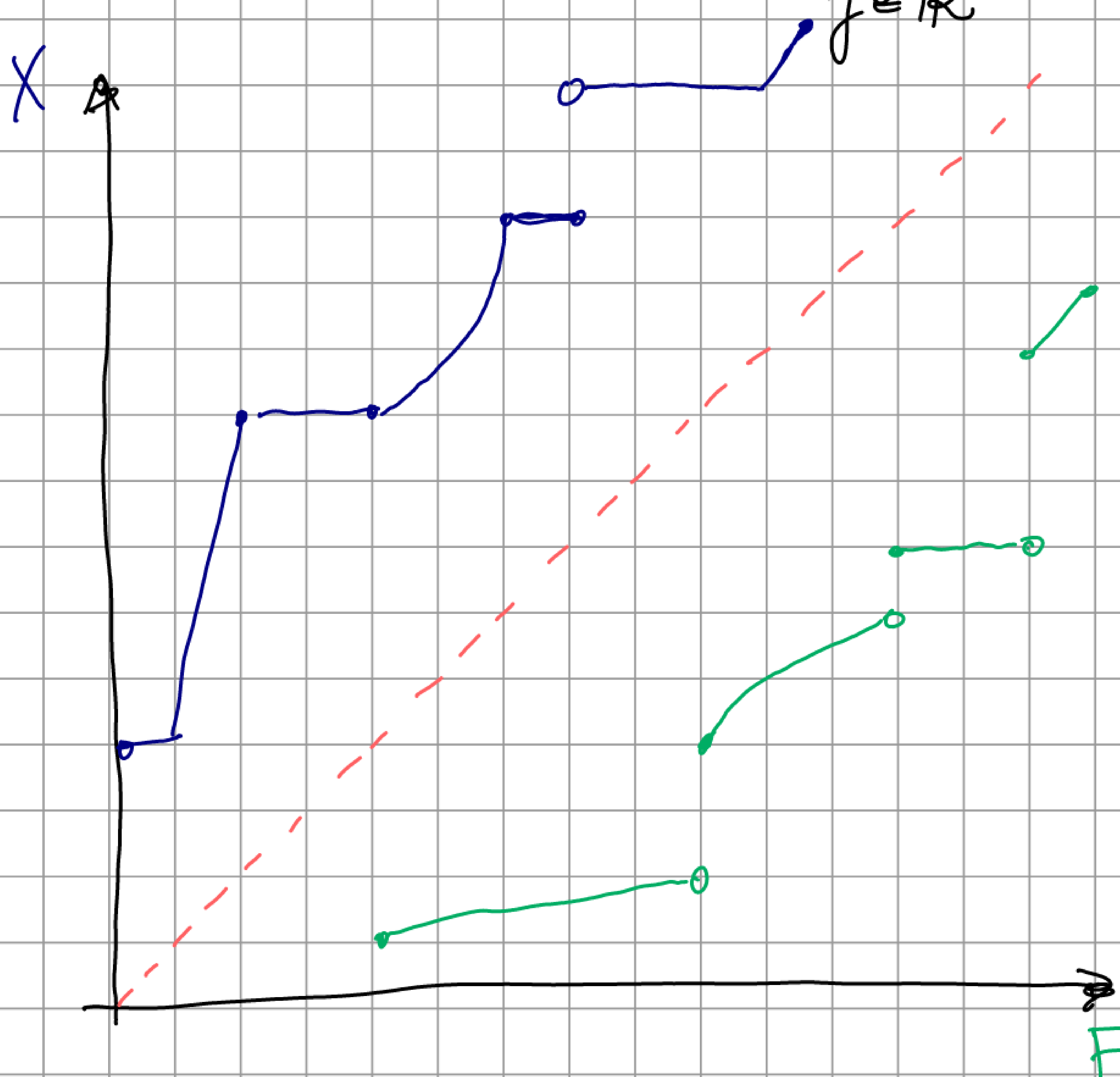
* bo F niemalejąca

$= \mathbb{P}[\{\omega : \omega \leq F(t)\}] = \lambda([0, F(t)]) = F(t)$

Problem: F nie musi być odwracalna.

II Przypadek ogólny. Dla funkcji prawociągłej, niemalejącej można zdefiniować uogólnioną funkcję odwrotną.

$$X(\omega) = F^{-1}(\omega) := \inf_{y \in \mathbb{R}} \{ F(y) \geq \omega \}$$



Potrzebujemy $\underbrace{\{\omega : X(\omega) \le t\}}_{L} = \underbrace{\{\omega : \omega \le F(t)\}}_{P}$.

1. $P \subseteq L$. Weźmy $\omega \in P$. Wtedy

   $\omega \le F(t)$, czyli $t \in \{y \in \mathbb{R} : F(y) \ge \omega\}$.

   Zatem $X(\omega) \le t$ (z def. X).

   $\Rightarrow \omega \in L$

2. $L \subseteq P$. Weźmy $\omega \in L$. Wtedy

   $X(\omega) \le t$, czyli $\inf_y \{\omega \le F(y)\} \le t$,

   a zatem $\omega \le F(y) \le F(t)$ (bo F niemalejąca i prawostronnie ciągła)

   $\Rightarrow \omega \in P$.

__Pytanie__ Czy dystrybuanta jednoznacznie wyznacza rozkład zmiennej losowej?
(zobaczmy, że zmienna losowa zależy od p. prob. i to jest bardzo elastyczne, rozkład jest już konkretny).

Tw. 3.9 (o jednoznaczności)

Dystrybuanta zmiennej losowej X wyznacza jednoznacznie jej rozkład.

Alt.: Dane są dystrybuanty $F_X = F_Y$.

Chcemy pokazać, że to implikuje $\mu_X = \mu_Y$.

(Z teorii miary wiemy, że
$\mu_X((-\infty, t]) = \mu_Y((-\infty, t]) \Rightarrow \mu_X = \mu_Y$)

Definicja 3.10 Niepustą rodzinę $\mathcal{K}$ podzbiorów Ω nazywamy **π-układem**, jeżeli jest zamknięta na operację przekroju, tzn. $A \cap B \in \mathcal{K}$ dla wszystkich $A, B \in \mathcal{K}$.

Np. $\mathcal{K} = \{(-\infty, t] : t \in \mathbb{R}\}$

Definicja 3.11

Niepustą rodzinę $\mathcal{L}$ podzbiorów Ω nazywamy **λ-układem**, jeżeli:

- $\Omega \in \mathcal{L}$
- $A, B \in \mathcal{L} \wedge A \subset B \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{L}$
- $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ wstępujący, to $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}$

Lemat 3.12 (o π-λ układach Tw. Dynkina)

Jeżeli $\mathcal{L}$ jest λ-układem zawierającym π-układ $\mathcal{K}$, to $\mathcal{L}$ zawiera także $\sigma(\mathcal{K})$.

Throwback do MiC – tam było tw. że jeśli pierścień $R \subset \mathcal{M}$, to $\sigma(R) \subset \mathcal{M}$.

klasa monotoniczna

D-d. tw. 3.9

Chcemy pokazać, że

$F_X = F_Y \Rightarrow \mu_X = \mu_Y$, tzn. $\forall B \in Bor \mathbb{R}$

$$\mu_X(B) = \mu_Y(B). \quad (*)$$

$\Downarrow$

wynika, że $*$ jest spełnione przez zbiory postaci $B = (-\infty, t]$. Rodzina $\mathcal{K} = \{(-\infty, t]\}_{t \in \mathbb{R}}$ tworzy π-układ.

Zdefiniujmy $\mathcal{L} = \{B \in Bor(\mathbb{R}) : \mu_X(B) = \mu_Y(B)\}$.

$\mathcal{L}$ jest λ-układem (zadanie).

Ponadto $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$, gdyż

$$\begin{array}{ccc} F_X(t) & = & F_Y(t) \\ \| & & \| \\ \mu_X((-\infty,t]) & & \mu_Y((-\infty,t]) \end{array}$$

Z lematu 3.12 $\underbrace{\sigma(\mathcal{K})}_{= Bor(\mathbb{R})} \subseteq \mathcal{L} \subseteq Bor(\mathbb{R})$

zatem $\mathcal{L} = Bor(\mathbb{R})$, więc $\mu_X = \mu_Y$.

Definicja 3.13 Zmienna losowa X o rozkładzie μ ma **rozkład dyskretny**, jeśli istnieje przeliczalny zbiór S taki, że $\mu(S) = 1$. Wtedy
$$S = \{x : \mathbb{P}[X = x] > 0\}$$
jest **zbiorem atomów**.

Przykład Rozkład skupiony w punkcie $a \in \mathbb{R}$: $\mathbb{P}[X = a] = 1$,
$$\mu = \delta_a, \quad S = \{a\}.$$

Przykład Rozkład dwumianowy (Bernoulliego) z parametrami n, p ($n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$). X ma rozkład $\mathrm{Bin}(n,p)$, jeśli
$$\mathbb{P}[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Przykład Rozkład Poissona z parametrem $\lambda > 0$. X ma rozkład $Pois(\lambda)$, jeżeli

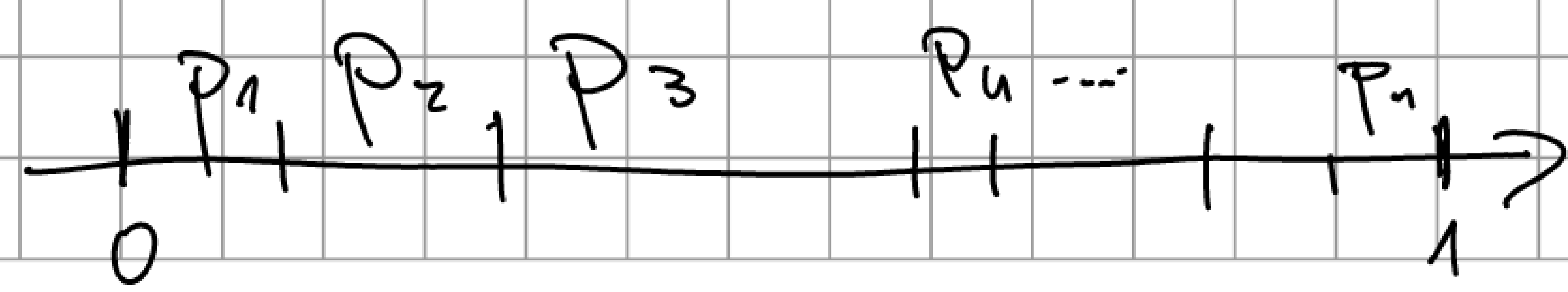
$$\mathbb{P}[X=k] = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

Ten rozkład ma duży związek z rozkładem dwumianowym. Przy odpowiednim doborze parametrów dobrze przybliża Bin, a łatwiej go używać.

Przykład Ogólnie: jeżeli $S = \{s_1, s_2, \dots\}$ oraz $p_k > 0$ t. że $\sum_k p_k = 1$, to istnieje zmienna losowa spełniająca

$$\mathbb{P}[X = s_k] = p_k$$

$([0,1], Bor([0,1]), \lambda)$, $X(\omega) = s_i$, gdy $p_1 + \dots + p_{i-1} < \omega \leq p_1 + \dots + p_i$.



<u>Definicja 3.14</u> Zmienna losowa X o rozkładzie μ ma rozkład **absolutnie ciągły** (względem miary Lebesgue'a), jeżeli istnieje funkcja borelowska $f: \mathbb{R} \to [0, \infty)$ taka, że dla $B \in Bor(\mathbb{R})$

$$\mathbb{P}[X \in B] = \mu(B) = \int_B f \, d\lambda$$

Funkcję f nazywamy **gęstością** rozkładu X.

(Funkcja f nie jest dowolna: należy założyć, że $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, $f \geq 0$. Wtedy $\mu([a,b]) = \int_a^b f(x)dx$ jest miarą prob. na $\mathbb{R}$)

Istnieje związek między dystrybuantą, a gęstością:

$$F(t) = \mu((-\infty, t]) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx.$$

Jeżeli f jest ciągła, to
$$F'(t) = f(t).$$

Przykład Rozkład jednostajny na $[0,1]$: $X \sim U([0,1])$.

$$f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$

$$\underbrace{X \text{ ma rozkład}}_{\sim} \; \underbrace{\text{jednostajny na odcinku } [0,1]}_{U([0,1])}$$

Przykład Ogólniej, dla dowolnego $D \in Bor(\mathbb{R})$ o niezerowej mierze możemy zdefiniować gęstość

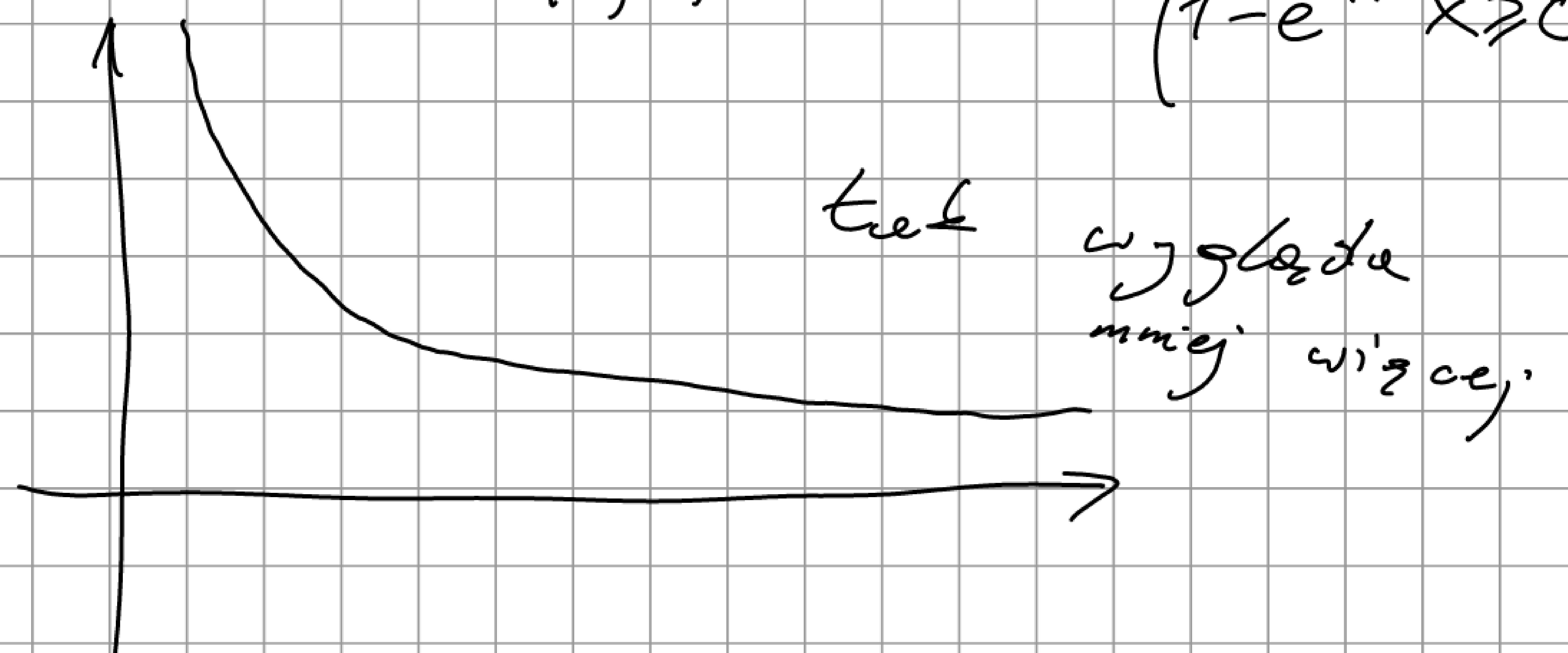
$$f(x) = \frac{\mathbb{1}_D(x)}{\lambda(D)}$$

Wtedy, dla $B \in Bor(\mathbb{R})$

$$\mathbb{P}[X \in B] = \int_B f(x)\,dx = \frac{\lambda(B \cap D)}{\lambda(D)}$$

<u>Przykład</u> Rozkład wykładniczy z parametrem λ $(\lambda > 0)$: $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$

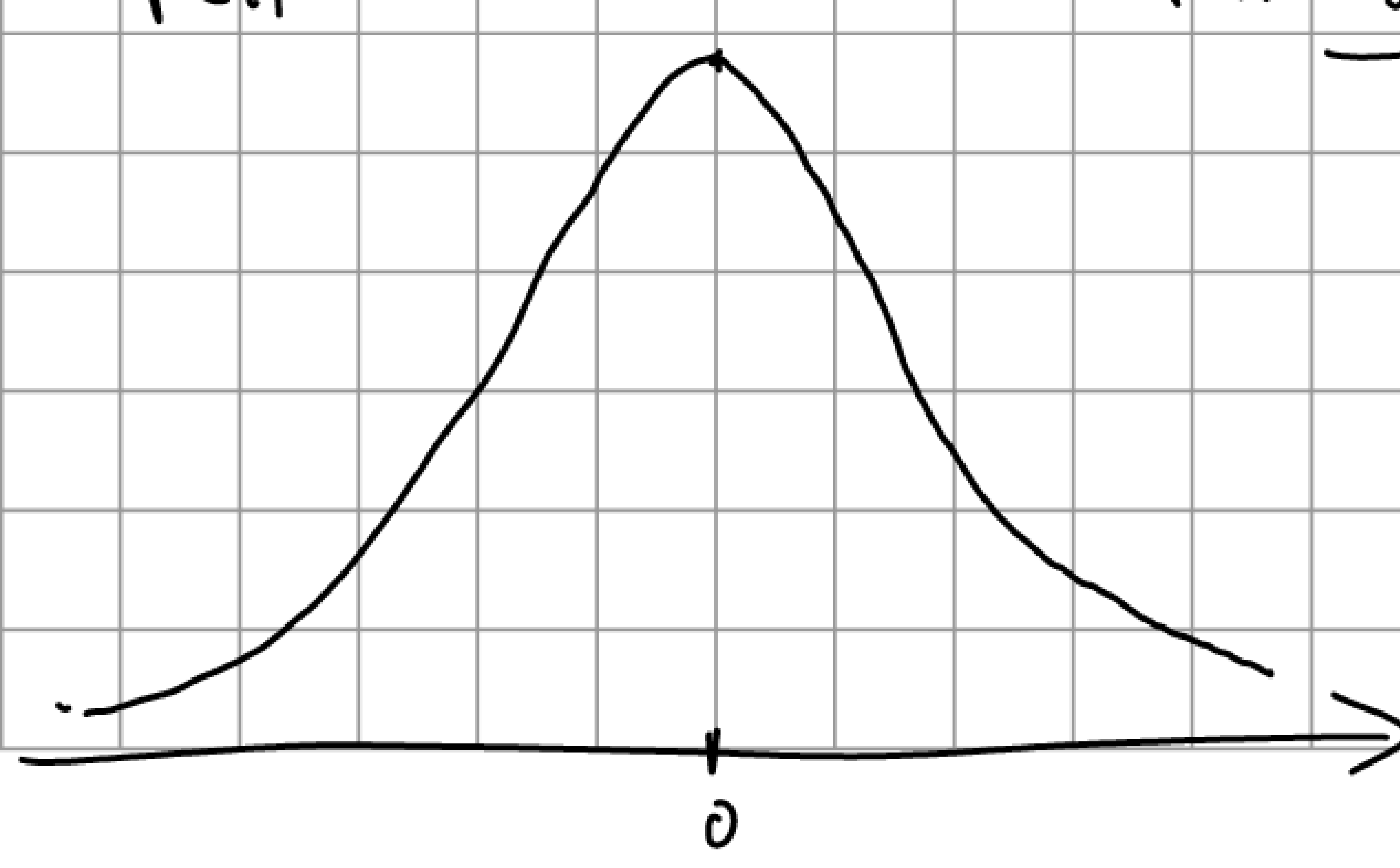
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x), \quad F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$



<u>Przykład</u> Rozkład Gaussa (normalny):

$$X \sim N(0,1)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$



Rozkłady dyskretne i ciągłe nie wyczerpują wszystkich możliwości. Wiemy, że każdą miarę μ można jednoznacznie zapisać w postaci

$$\mu = \mu_{abs} + \mu_{sing}$$

gdzie $\mu_{abs} \ll \lambda$ oraz $\mu_{sing} \perp \lambda$.

27.03.2021

<u>Def. 4.1</u> $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ - p.prob. **Zmienną losową o wartościach w $\mathbb{R}^d$** nazywamy dowolną funkcję mierzalną $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$.

Jeżeli $d=1$, to powyższa definicja opisuje zmienną losową z poprzedniego wykładu.

<u>Przykład</u> Wylosowano 13 kart z 32.
Niech X_1 oznacza liczbę pików, a X_2 liczbę kierów. Wówczas $X = (X_1, X_2)$.

Podstawowe własności wielowymiarowych zmiennych losowych są analogiczne do zwykłych zmiennych losowych. Np.:

- jeżeli X_1, X_2 są d-wymiarowymi zmiennymi losowymi, to $X_1 + X_2$, $X_1 - X_2$ też
- jeżeli $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ mierzalne, to $\phi(X)$ jest k-wymiarową zm. los.

Definicja 4.2 **Rozkładem** d-wymiarowej zmiennej losowej X nazywamy miarę prob.

$$\mu(B) = \mathbb{P}[X \in B] = \mathbb{P}[\{\omega : X(\omega) \in B\}].$$

Wówczas $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu)$ jest p. prob.

Definicja 4.3 **Dystrybuantą** d-wymiarowej zmiennej losowej X nazywamy funkcję $F : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ zadaną wzorem

$$F(t_1, \dots, t_d) = \mu\big((-\infty, t_1] \times (-\infty, t_2] \times \dots \times (-\infty, t_d]\big)$$
$$= \mathbb{P}[X_1 \leq t_1, \dots, X_d \leq t_d]$$

TW. 4.4 F - dystrybuanta X. Wtedy

1. jeżeli $x_i \to -\infty$ dla pewnego i, to
$$F(x_1, \dots, x_d) \to 0$$
2. jeżeli $x_i \to \infty$ dla pewnego i, to
$$F(x_1, \dots, x_d) \to 1$$

3. dystrybuanta X jedn. wyznacza rozkład.

Definicja 4.5 d-wym. zm. los. X ma **rozkład dyskretny**, jeżeli istnieje przeliczalny zbiór S taki, że $\mu(S) = 1$. Wtedy istnieją ciągi $p_1, p_2, \ldots \in (0,1]$, $s_1, \ldots \in \mathbb{R}^d$ t. że

$$\sum p_i = 1, \quad \mathbb{P}[X = s_i] = p_i$$

Definicja 4.6 d-wymiarowa zm. los. X ma **rozkład absolutnie ciągły**, jeżeli istnieje funkcja borelowska $f: \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ t. że

$$\mathbb{P}[X \in B] = \mu(B) = \int_B f(x)\, dx, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Wówczas

$$F(t_1, \ldots, t_d) = \int_{-\infty}^{t_1} \ldots \int_{-\infty}^{t_d} f(x_1, \ldots, x_d)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_d$$

Ponadto, jeżeli $F \in C^d(\mathbb{R}^d)$, to

$$f(x_1, \ldots, x_d) = \frac{\partial^d F}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_d}(x_1, \ldots, x_d)$$

Przykład. W urnie są 2 kule czerwone, 5 białych i 3 zielone. Wybieramy losowo 3 kule (jedn.). X_1 oznacza # białych kul, X_2 # kul czerwonych. Wówczas (X_1, X_2) jest 2-wymiarową zmienną losową i rozkład dyskretny:

$X_1 \setminus X_2$	0	1	2	$\mathbb{P}[X_1 = x]$
0	$\frac{1}{120}$	$\frac{6}{120}$	$\frac{3}{120}$	$\frac{10}{120}$
1	$\frac{15}{120}$	$\frac{30}{120}$	$\frac{5}{120}$	$\frac{50}{120}$
2	$\frac{30}{120}$	$\frac{20}{120}$	0	$\frac{50}{120}$
3	$\frac{10}{120}$	0	0	$\frac{10}{120}$
$\mathbb{P}[X_2 = y]$	$\frac{56}{120}$	$\frac{56}{120}$	$\frac{8}{120}$	1

$$\mathbb{P}[X_1 \leq X_2] = \frac{45}{120} = \frac{3}{8}$$

$$\mathbb{P}[X_1 = 1 \mid X_1 \leq X_2] = \frac{\mathbb{P}[X_1 = 1 \text{ i } X_1 \leq X_2]}{\mathbb{P}[X_1 \leq X_2]} = \frac{7}{9}$$

Wniosek: znajomość rozkładu X_1, X_2 nie daje nam jeszcze rozkładu (X_1, X_2).

Przykład.

$$\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \frac{1}{\lambda(S)}\lambda|_S\right)$$

p. prob.

$$\mathbb{P}[(x_1, x_2) \in A] = \frac{\lambda(A \cap S)}{\lambda(S)}$$

zm. losowe

$X(\omega) = \omega$ Rozkład identyczności to po prostu miara przestrzeni.

Przykład. Rozkład Gaussa (normalny) na $\mathbb{R}^d$,

$\mathcal{N}(m, A^{-1})$: m – ustalony wektor w $\mathbb{R}^d$,

A – macierz $d \times d$, symetryczna, dodatnio określona

(forma kw. określona przez A jest ilocz. skalarnym) gęstość: $f(x) = \frac{\sqrt{\det A}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\underbrace{\langle (x-m), (x-m) \rangle}_{\text{iloczyn skalarny zadany przez } A}}$

Widać, że $f(x) \geq 0$.

Trzeba sprawdzić, że $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx = 1$

Macierz $A = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{diagonalna}}}{B D B^{-1}}$ ← izometria

$$D = \begin{bmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_d \end{bmatrix}, \quad a_i > 0$$

Podstawiając $x - m = By$ otrzymujemy

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx = \underbrace{\frac{\sqrt{\det A}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}}_{C} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{1}{2}\langle By, By \rangle} |\det B|\,dy =$$

$$= C \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{1}{2} y^t D y}\,dy = C \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} a_i y_i^2}\,dy =$$

$$= C \prod_{i=1}^{d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{1}{2} a_i y_i^2}\,dy_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^{d}} \prod_{i=1}^{d} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz = 1$$

__Definicja 4.7__ $X=(X_1,\dots,X_d)$. Wówczas dla $k\le d$ rozkład X_k nazywamy **rozkładem brzegowym** X.

UWAGA: jeśli znamy wyłącznie rozkłady brzegowe, to cały rozkład nie wynika z nich jednoznacznie.

__Definicja 4.8__ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – p. prob., $\{X_i\}_{i\in I}$ rodzina zmiennych losowych. Zmienne te są **niezależne**, jeżeli $\sigma(X_i)$ (σ-ciało generowane przez X_i) są niezależne.

$$\left[\ \sigma(X) = \sigma\left(\{X^{-1}[B]\}_{B\in \mathcal{B}or(\mathbb{R})}\right) \subseteq \mathcal{F}\ \right]$$

Innymi słowy, $\{X_i\}_{i\in I}$ są niezależne, gdy dla dowolnych, parami różnych $i_1, i_2, \dots, i_n \in I$ oraz dowolnych $B_1,\dots,B_n\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ zachodzi

$$\mathbb{P}[X_{i_1}\in B_1,\dots,X_{i_n}\in B_n] = \mathbb{P}[X_{i_1}\in B_1]\cdot\ldots\cdot\mathbb{P}[X_{i_n}\in B_n]$$

Disclaimer: $\sigma(X)$ to najmniejsze σ-ciało zawarte w $\mathcal{F}$, w którym X jest mierzalne: $X: (\Omega, \sigma(X)) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R}))$

<u>Przykład.</u> Rozważmy schemat Bernoulliego i zdefiniujmy

$$X_i(\omega) = X_i(\omega_1, \dots, \omega_n) = \begin{cases} 1 & \text{gdy sukces w } i\text{-tej} \\ 0 & \neg \end{cases}$$

Wówczas $X_1, \dots, X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi.

$$\mathbb{P}[X_1 = 1, X_2 = 0] = \mathbb{P}[\{(\omega_1, \omega_2) : X_1(\omega) = 1, X_2(\omega) = 0\}]$$

$$= \mathbb{P}[X_1(\omega) = 1] \cdot \mathbb{P}[X_2(\omega) = 0]$$

wynika z tego, że X_1, X_2 są f. char. niezależnych zdarzeń.

Tw. 4.9 Niech $X_1, \dots, X_n$ będą zmiennymi losowymi, $X = (X_1, \dots, X_n)$. NWSR:

1. $X_1, \dots, X_n$ są niezależne.
2. dla dowolnych $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}or(\mathbb{R})$ zdarzenia $\{X_1 \in B_1\}, \dots, \{X_n \in B_n\}$ są niezależne.
3. $\mu_X = \mu_{X_1} \otimes \mu_{X_2} \otimes \dots \otimes \mu_{X_n}$
4. $F_X(t_1, \dots, t_n) = F_{X_1}(t_1) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(t_n)$

D-d.

- $1 \iff 2$ z def.
- $2 \Rightarrow 4$ $B_i = (-\infty, t_i]$

$$F_X(t_1, \dots, t_n) = \mathbb{P}[X_1 \le t_1, \dots, X_n \le t_n] =$$
$$= \mathbb{P}[\{X_1 \in B_1\} \cap \dots \cap \{X_n \in B_n\}] \overset{(2)}{=} \mathbb{P}[X_1 \in B_1] \cdot \dots \cdot \mathbb{P}[X_n \in B_n].$$

- $4 \Rightarrow 3$ Niech X' – zm. los. o rozkładzie $\mu_{X_1} \otimes \dots \otimes \mu_{X_n}$. Pokażemy $F_X = F_{X'}$.
  $(\Rightarrow \mu_X = \mu_{X'})$

$$F_{X'}(t_1, \dots, t_n) = \mu_{X_1} \otimes \dots \otimes \mu_{X_n}((-\infty, t_1] \times \dots \times (-\infty, t_n]) =$$

$$= \mu_{X_1}((-\infty, t_1]) \cdot \dots \cdot \mu_{X_n}((-\infty, t_n]) =$$

$$= F_{X_1}(t_1) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(t_n) \overset{4}{=} F_X(t_1, \dots, t_n)$$

- $3 \Rightarrow 2$

$$\mathbb{P}[X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n] = \mu_X(B_1 \times \dots \times B_n) \overset{(3)}{=}$$

$$= \mu_{X_1}(B_1) \cdot \dots \cdot \mu_{X_n}(B_n) =$$

$$= \mathbb{P}[X_1 \in B_1] \cdot \dots \cdot \mathbb{P}[X_n \in B_n]$$

$\blacksquare$

<u>Wniosek 4.10</u> Zmienne losowe $X_1, \dots, X_n$ mające rozkłady dyskretne są niezależne iff dla dowolnych $s_1 \in S_{X_1}, \dots, s_n \in S_{X_n}$ zachodzi

$$(*) \quad \mathbb{P}[X_1 = s_1, \dots, X_n = s_n] = \mathbb{P}[X_1 = s_1] \cdot \dots \cdot \mathbb{P}[X_n = s_n]$$

<u>Dowód.</u> Jeżeli zmienne losowe $X_1, \dots, X_n$ są niezależne to $(*)$ jest prawdziwa.

Implikacja odwrotna (dla uproszczenia $n=2$):

Korzystając z (*) otrzymujemy dla dowolnych zbiorów borelowskich B_1, B_2:

$$\mathbb{P}[X_1 \in B_1, X_2 \in B_2] = \mathbb{P}[X_1 \in B_1 \cap S_{X_1}, X_2 \in S_2 \cap S_{X_2}]$$

$$= \sum_{\substack{x_1 \in B_1 \cap S_{X_1} \\ x_2 \in B_2 \cap S_{X_2}}} \mathbb{P}[X_1 = x_1, X_2 = x_2] =$$

$$= \sum_{x_1 \in B_1 \cap S_{X_1}} \sum_{x_2 \in B_2 \cap S_{X_2}} \mathbb{P}[X_1 = x_1]\,\mathbb{P}[X_2 = x_2] =$$

$$= \mathbb{P}[X_1 \in B_1] \cdot \mathbb{P}[X_2 \in B_2]$$

<u>Wniosek 4.11</u> Zmienne losowe $X_1, \dots, X_n$ o gęstościach $f_1, \dots, f_n$ są nzl. iff zmienna losowa $X = (X_1, \dots, X_n)$ ma gęstość

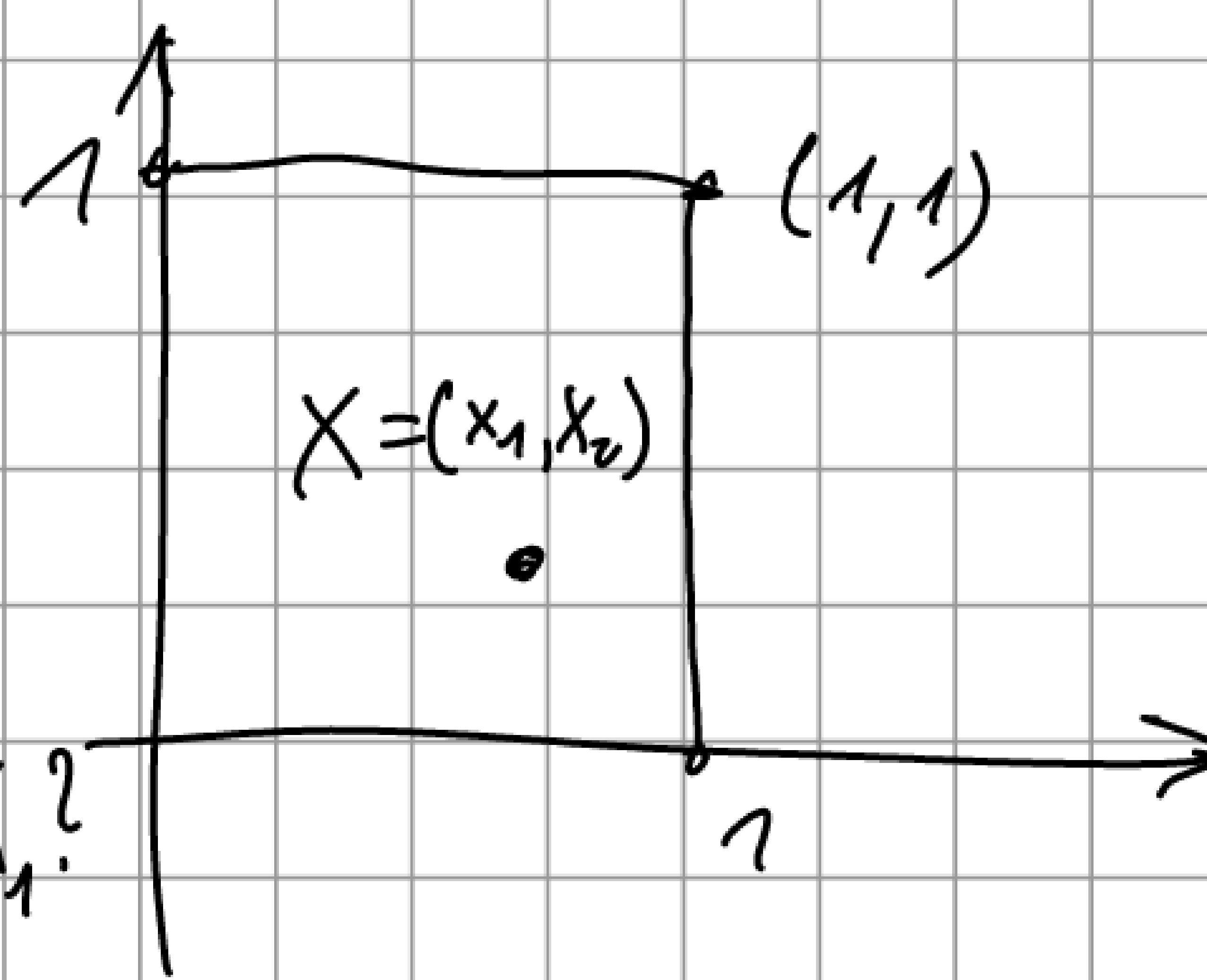
$$f_X(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdot \ldots \cdot f_n(x_n)$$

<u>Przykład.</u> Niech $X = (X_1, X_2)$ będzie losowym punktem z kwadratu $[0,1] \times [0,1]$. Czy zmienne X_1, X_2 są niezależne?

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \left([0,1]^2, \mathcal{B}or([0,1]^2), \lambda\right)$$

$f_X(x_1, x_2) =$

$= 1 \cdot \mathbb{1}_{[0,1]\times[0,1]}(x_1, x_2)$



Jak wygląda gęstość X_1?

$A \in \mathcal{B}([0,1])$

$$\mathbb{P}[X_1 \in A] = \lambda\left[(X_1, X_2) \in A \times [0,1]\right] =$$

$$= \lambda[A] = \int_A 1\, dx \Rightarrow f_{X_1}(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$

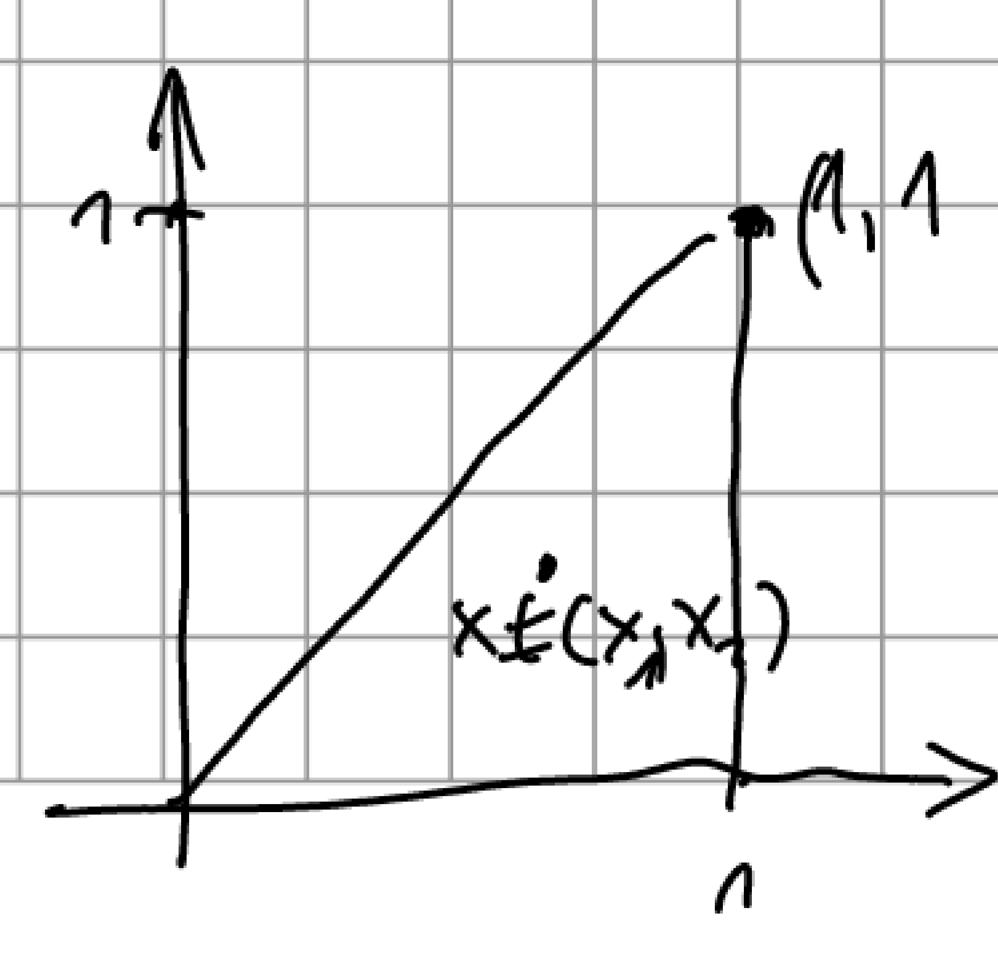
Analogicznie $\quad f_{X_2}(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$

Mamy $f_X = f_{X_1} f_{X_2} \Longrightarrow X_1, X_2$ niezależne

<u>Przykład.</u> Niech $X = (X_1, X_2)$ będzie losowym punktem w trójkącie $\{(x_1, x_2) : 0 \le x_2 \le x_1 \le 1\}$.

Czy X_1, X_2 niezależne?

$$f_X((x_1,x_2)) = \begin{cases} 2 & 0 \le x_2 \le x_1 \\ 0 & \text{poza} \end{cases}$$



trochę naciągnięte

Dla $A \in [0,1]$ $\quad \mathbb{P}[X_1 \in A] = \mathbb{P}[(X_1,X_2) \in A \times \mathbb{R}] =$

$$= \int_{A\times\mathbb{R}} f_X(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = \int_A \int_{\mathbb{R}} f_X(x_1,x_2)\,dx_2\,dx_1 =$$

Tw. Fubiniego

$$= \int_A \int_0^{x_1} 2\,dx_2\,dx_1 = \int_A \underbrace{2x_1}_{= f_{X_1}(x_1)}\,dx_1$$

Teraz $\mathbb{P}[X_2 \in A] = \int_A \int_{\mathbb{R}} f_X(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 =$

$$= \int_A \int_{x_2}^{1} 2\,dx_1\,dx_2 = \int_A \underbrace{2(1-x_2)}_{= f_{X_2}(x_2)}\,dx_2$$

$$f_X\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) = 2$$

$$f_{X_1}\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1, \quad f_{X_2}\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1$$

$f_X \neq f_{X_1} \cdot f_{X_2} \Rightarrow X_1, X_2$ nie są niezależne.

<u>TW. 4.12</u> Załóżmy, że X_1, X_2 są nzl. zm. los. o rozkładach ciągłych z gęstościami f_1, f_2. Wówczas zmienna losowa $X_1 + X_2$ ma rozkład z gęstością

$$f(x) = f_1 * f_2(x) = \int_{\mathbb{R}} f_1(x-y) f_2(y) dy$$

Funkcję f nazywamy **splotem** f_1, f_2.

$\{a_n\}, \{b_n\}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

To jest splot

31.03.2021

Tw. z poprzedniego wykładu:

TW. 4.12 Załóżmy, że X_1, X_2 są nzl. zm. los. o rozkładach ciągłych z gęstościami f_1, f_2. Wówczas zmienna losowa $X_1 + X_2$ ma rozkład z gęstością

$$f(x) = f_1 * f_2(x) = \int_{\mathbb{R}} f_1(x-y) f_2(y) dy$$

D-d. Dla dowolnego $B \in \mathcal{B}or(\mathbb{R})$:

$$\mathbb{P}[X_1 + X_2 \in B] = \mu_{(X_1, X_2)}(\{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 \in B\})$$

$$= \int_{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 \in B} \mu_{(X_1, X_2)}(dx_1, dx_2)$$

$$\overset{\text{niezależności}}{=} \iint f_1(x_1) f_2(x_2) dx_1 dx_2$$

$$\overset{\text{tw. Fubiniego}}{=} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B(x_1 + x_2) f_1(x_1) f_2(x_2) dx_1 \right) dx_2$$

$$\overset{z = x_1 + x_2}{=} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B(z) f_1(z - x_2) dz \right) f_2(x_2) dx_2$$

$$\overset{\text{tw. Fubiniego}}{=} \int_B \left(\int_{\mathbb{R}} f_1(z - x_2) f_2(x_2)\, dx_2 \right) dz =$$

$$= \int_B f_1 * f_2 \, dz$$

<u>Przykład</u> Niech X_1 i X_2 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na $[0,1]$, czyli $\mathcal{U}([0,1])$. Oblicz gęstość $X_1 + X_2$.

<u>Rozwiązanie</u>

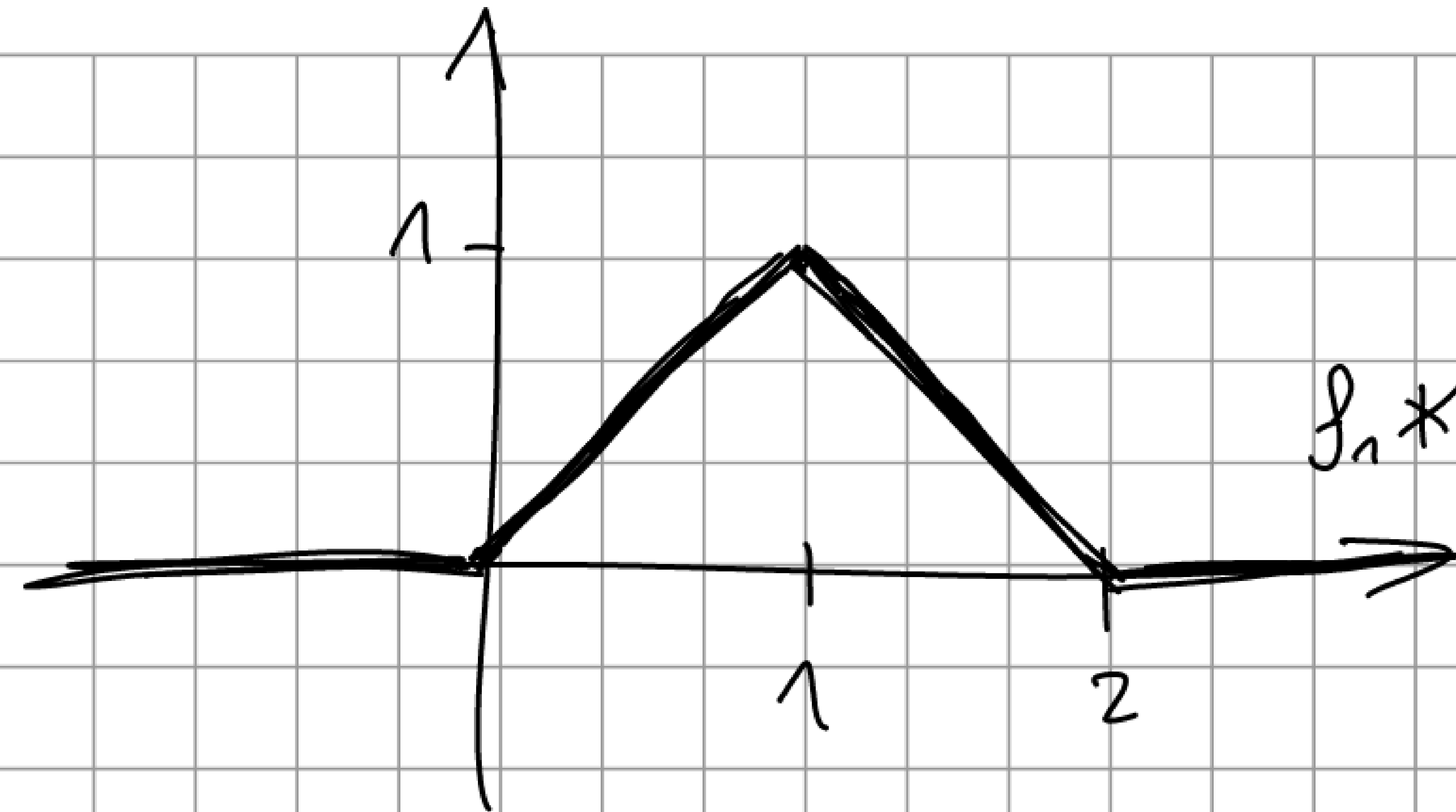
$$f_1(x_1) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x_1), \quad f_2(x_2) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x_2).$$

Zatem $X_1 + X_2$ ma gęstość

$$f_1 * f_2(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,1]}(x-y)\, \mathbb{1}_{[0,1]}(y)\, dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[x-1,x]}(y)\, \mathbb{1}_{[0,1]}(y)\, dy = \left| [x-1, x] \cap [0,1] \right|$$

$$\left\{\begin{array}{l} 0 \leq x-y \leq 1 \\ x-1 \leq y \leq x \\ 0 \leq y \leq 1 \end{array}\right.$$



<u>Przykład</u> Załóżmy, że X_1, X_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $N(m_1, \sigma_1)$, $N(m_2, \sigma_2)$. Wówczas

$m_1 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1 \in [0, \infty)$

$$f_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_i} e^{-\frac{(x-m_i)^2}{2\sigma_i^2}} \qquad i = 1, 2$$

i można obliczyć splot

$$f_1 * f_2(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y-m_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(y-m_2)^2}{2\sigma_2^2}} dy$$

$$\overset{(\text{zadanie})}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} e^{-\frac{(x-m_1-m_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}$$

Zatem $X_1 + X_2$ ma rozkład $N(m_1+m_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

Definicja 5.1 Niech X będzie zmienną losową (o wartościach z $\mathbb{R}$) na p. prob $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Mówimy, że X **ma wartość oczekiwaną** jeżeli

$$\int_\Omega |X| \, d\mathbb{P} = \int_\Omega |X(\omega)| \, d\mathbb{P}(\omega) < \infty$$

Wówczas **wartością oczekiwaną** zmiennej losowej X nazywamy liczbę

$$\mathbb{E} X = \int_\Omega X \, d\mathbb{P}$$

Jeżeli $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, $\mathbb{P}[\{\omega_i\}] = p_i$, wtedy $\mathbb{E} X = \sum_{i=1}^n X(\omega_i) p_i$

Intuicja Rzucamy kostką. Jaki średnio otrzymamy wynik?

Wartość oczekiwana, to tak jakbyśmy wykonali doświadczenie wiele razy i obliczamy średnią wartość wyniku.

Historycznie: wartość losowa opisuje, czy gra losowa w którą gramy jest opłacalna.

<u>Przykład</u> Dwaj gracze A i B grają w grę: rzucają kostką, niech k będzie wynikiem rzutu. Jeżeli k jest nieparzyste, to A wygra k zł. W p.w. B dostaje k zł. Czy gra jest uczciwa?

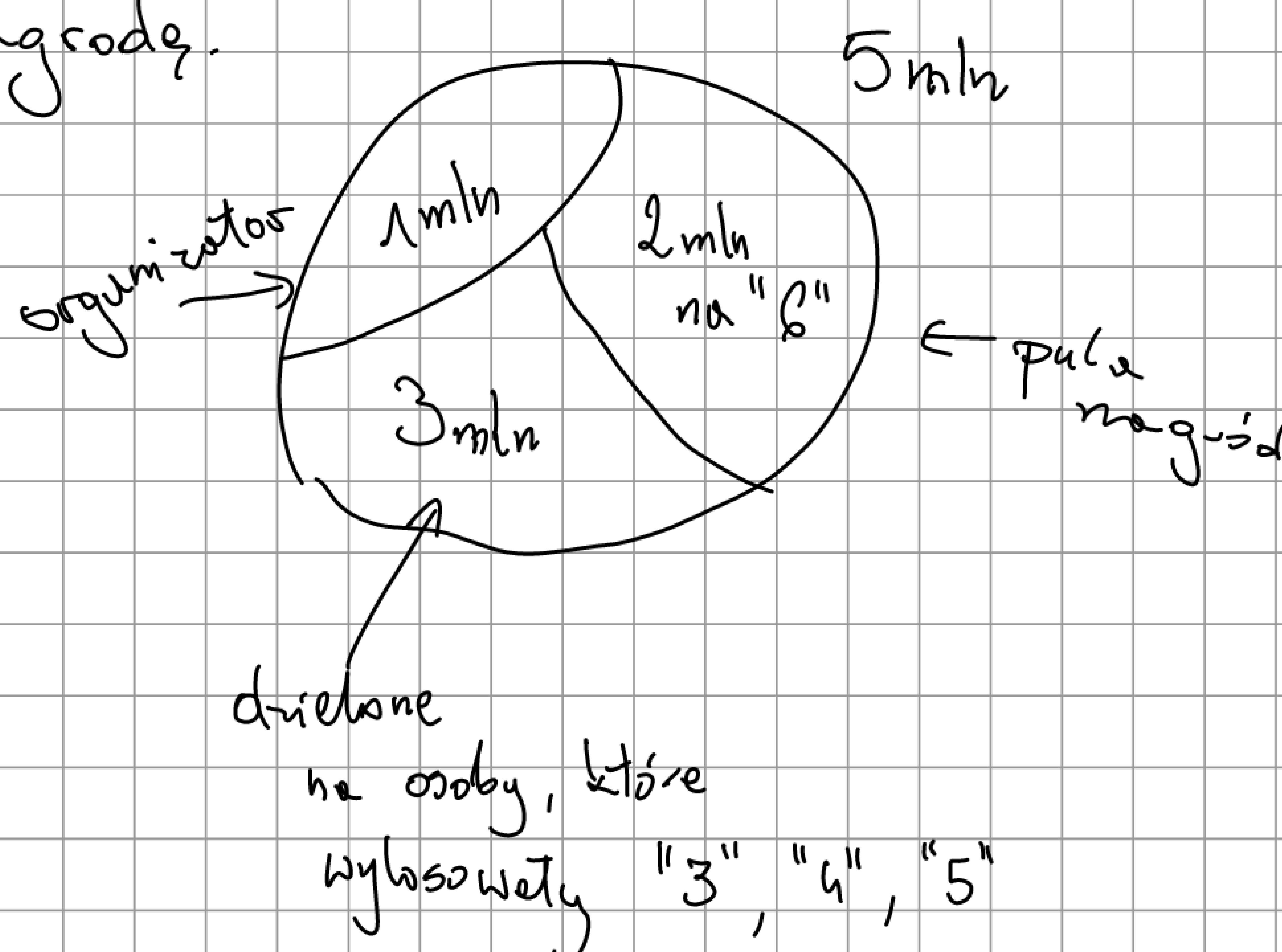
<u>Rozwiązanie</u> Załóżmy, że wykonamy n rzutów. Wówczas oczekujemy że gracz A wygra w przybliżeniu

$$1\cdot\frac{n}{6} + 3\cdot\frac{n}{6} + 5\cdot\frac{n}{6} - 2\frac{n}{6} - 4\frac{n}{6} - 6\frac{n}{6} = -\frac{n}{2}$$

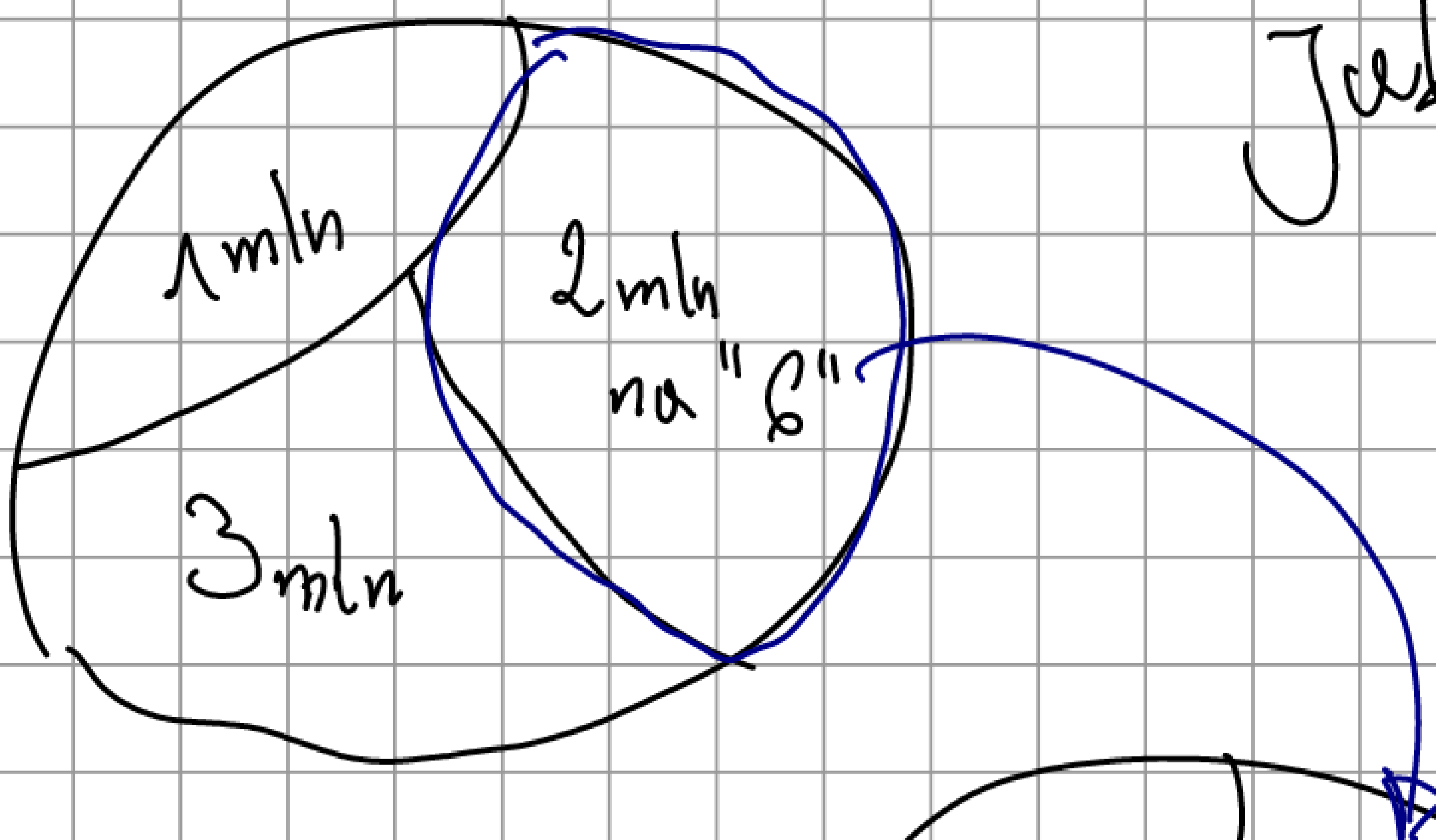
Formalnie: Niech X oznacza wygraną gracza A podczas jednej rundy, wtedy:

$$\mathbb{E}X = 1 \cdot \mathbb{P}[X=1] - 2 \cdot \mathbb{P}[X=2] + \ldots - 6\,\mathbb{P}[X=6] =$$
$$= -\frac{1}{2}.$$

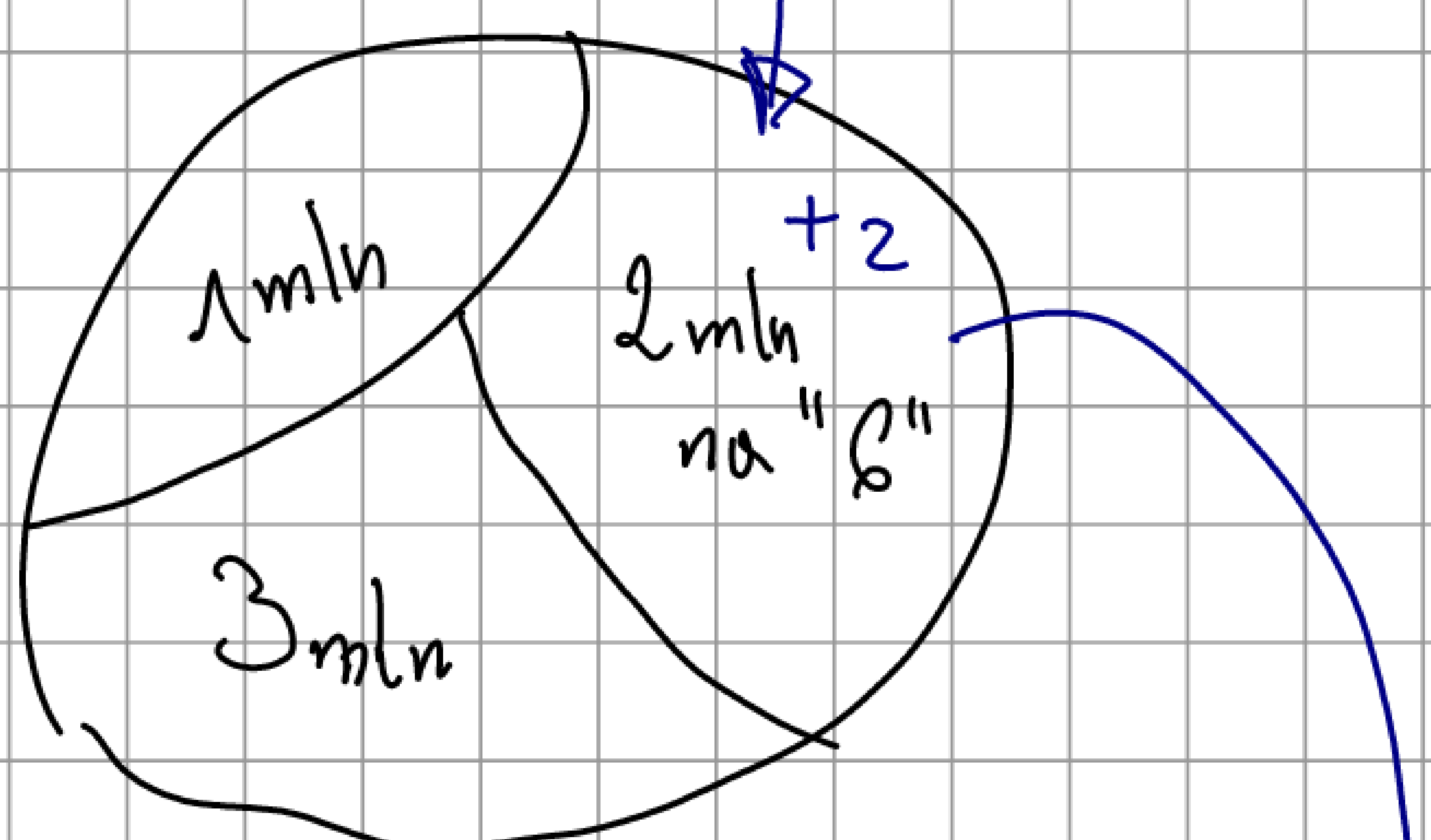
Totolotek Mamy 49 liczb, skreślamy 6. Jeśli skreśliliśmy liczby wylosowane przez maszynę losującą, to dostajemy nagrodę.

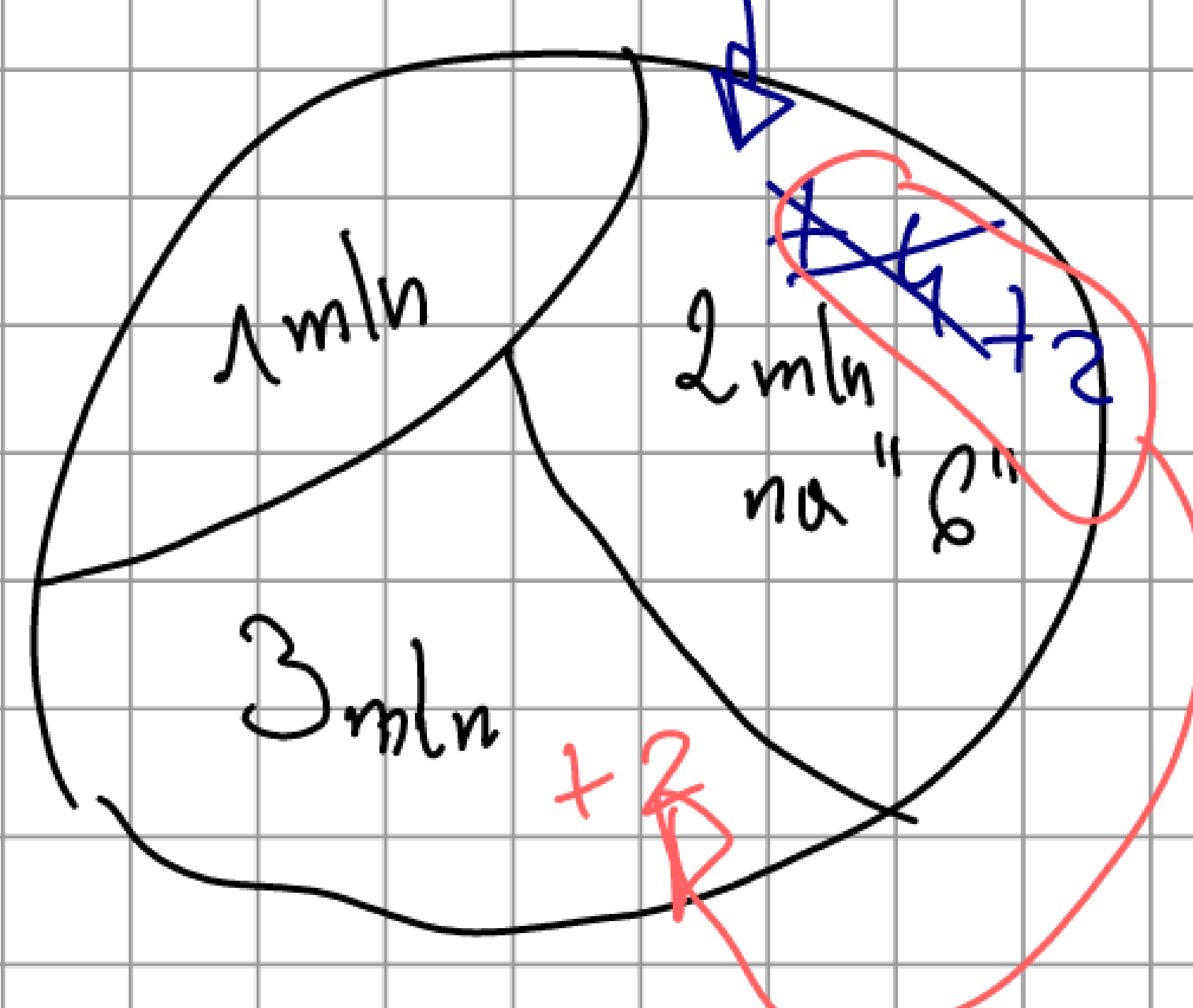


Jeśli nikt nie wylosował "6", to te 2 mln przechodzą na następną turę.



Jak było w Ameryce?





Okazało się, że w tej puli wartość oczekiwana stała się dodatnia.

TW. 5.2 Załóżmy, że X, Y są zmiennymi losowymi i że $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}Y$ istnieją. Wtedy

1. Jeżeli $X \geq 0$, to $\mathbb{E}X \geq 0$
2. $|\mathbb{E}X| \leq \mathbb{E}|X|$
3. Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}X + b\mathbb{E}Y$$

TW. 5.3 Załóżmy, że $\{X_n\}$ jest ciągiem zm. los. t-że $\mathbb{E}X_n$ istnieją. Wtedy

1. (lemat Fatou) Jeżeli $X \geq 0$, to

$$\mathbb{E} \liminf_{n\to\infty} \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n$$

2. (tw. o zbieżności monotonicznej) Jeżeli $X_n \geq 0$ oraz $\{X_n\}$ jest ciągiem monotonicznym (tzn. $X_n \leq X_{n+1}$) to

$$\mathbb{E} \lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n$$

3. (tw. Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej)

Jeżeli $|X_n| \leq Y$ dla pewnej zmiennej losowej Y, t. że $\mathbb{E}|Y| < \infty$ oraz istnieje granica $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ dla $\mathbb{P}$ prawie wszystkich ω, to

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}\lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n$$

<u>Przykład</u> Kupujemy k losów w loterii, w której M losów jest przegrywających, a N wygrywających (zakł. $k \leq M, N$). Niech X będzie liczbą wygrywających wśród tych, które kupiliśmy. Oblicz $\mathbb{E}X$

I

$$X_i = \begin{cases} 1 & i\text{-ty wygrywa} \\ 0 & i\text{-ty przegrywa} \end{cases}$$

$$X = \sum_{i=1}^{k} X_i \ , \quad \mathbb{E}X_i = \mathbb{P}[X_i = 0]\cdot 0 + \mathbb{P}[X_i = 1]\cdot 1 =$$

$$= \mathbb{P}[X_i = 1] = \frac{N}{M+N}$$

???

$$\mathbb{E}X = \sum \mathbb{E}X_i = \frac{kN}{M+N}.$$

II

$$\mathbb{E}X = \sum_{j=0}^{k} j\, \mathbb{P}[X=j] = \sum_{j=0}^{k} \frac{\binom{N}{j}\binom{M}{k-j}}{\binom{N+M}{k}} \cdot j = \ldots$$

Masakra do liczenia...

<u>Przykład</u> Losujemy σ ze zbioru S_n.

Niech X oznacza l. punktów stałych.

Oblicz $\mathbb{E}X$.

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \sigma(i)=i \\ 0 & \text{—} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}X_i = 1,$$

bo $\mathbb{E}X_i = \mathbb{P}[X_i = 1] = \frac{1}{n}$.

Potęga liniowości $\mathbb{E}$ wynika z tego, że nie wymaga niezależności.

Tw. 5.4 Niech $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ będzie f. borelowską a X d-wymiarową zm. los. o rozkładzie μ.

Wówczas:

$$\int_\Omega f(X)\, d\mathbb{P} = \mathbb{E} f(X) = \int_{\mathbb{R}^d} f \, d\mu \qquad (*)$$

o ile jedna z tych stałych istnieje

D-d. Przybliżamy f funkcjami prostymi.
(Zał. $d=1$, dla prostoty dowodu)

Krok 1. $f = \mathbb{1}_A$, dla $A \in Bor(\mathbb{R})$

Wtedy $\mathbb{E} f(X) = \mathbb{P}[f(X) = 1] =$

$$\mathbb{P}[X \in A] = \mu(A) = \int_A 1 \, d\mu =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu$$

Krok 2.

$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$ - f. prosta. Wtedy $(*)$ wynika z kroku 1 i liniowości wartości oczekiwanej.

Krok 3.

Załóżmy, że $f \geq 0$. Wtedy niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem f. prostych t. że $f_n \nearrow f$. Z tw. o zbieżności monotonicznej i kroku 2.

$$\mathbb{E} f(X) = \mathbb{E} \lim_n f_n(X) \overset{MCT}{=} \lim_n \mathbb{E} f_n(X) \overset{K2}{=}$$

$$= \lim_n \int f_n(X)\, d\mu \overset{MCT}{=} \int f(X)\, d\mu$$

Krok 4.

$f = f^+ - f^-$, znowu z liniowości. $\blacksquare$

Wniosek 5.5 Jeżeli zm. los. ma rozkład dyskretny $\mathbb{P}[X=x_i]=p_i$, to $\mathbb{E}\Phi(X)$ istnieje iff $\sum|\Phi(x_i)|p_i<\infty$. Wówczas

$$\mathbb{E}\Phi(X)=\sum\Phi(x_i)p_i$$

Wniosek 5.6

Jeżeli zm. los. ma rozkład absolutnie ciągły o gęstości g (tzn. $\mu(dx)=g(x)dx$) a $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, to

$$\mathbb{E}f(X)=\int_{\mathbb{R}}f(x)g(x)\,dx$$

TW. 5.7 Zał., że X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi oraz obie posiadają wartość oczekiwaną. Wówczas

$$\mathbb{E}[XY]=\mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y$$

D-d. Niech $Z=(X,Y)$. Z niezależności wynika, że $\mu_Z=\mu_X\otimes\mu_Y$.

Korzystając z tw. Fubiniego oraz tw. 5.4 otrzymujemy

$$\mathbb{E}|XY| \overset{\text{TW5.4}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} |xy| \mu_Z(dx, dy) = \int_{\mathbb{R}^2} |xy| \mu_X(dx) \mu_Y(dy)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |xy| \mu_X(dx) \mu_Y(dy) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |x| \mu_X(dx) \cdot \int_{\mathbb{R}} |y| \mu_Y(dy) \overset{\text{Tw.5.4}}{=} \mathbb{E}|X| \cdot \mathbb{E}|Y| .$$

Powyższy rachunek pokazuje, że zmienna losowa XY ma wartość oczekiwaną. Powtarzając rachunki bez modułów otrzymujemy tezę.

14.04.2021

$$\mathbb{E}X \overset{df}{=} \int_{\Omega} X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} x\, d\mu_X(x)$$

<u>Przykład</u> Ile średnio musimy wykonać rzut kostką, aby otrzymać 6?

Ogólniej: sukces z p-stwem p, ile razy musimy wykonać doświadczenie, aby otrzymać sukces?

X – l. prób do pierwszego sukcesu.

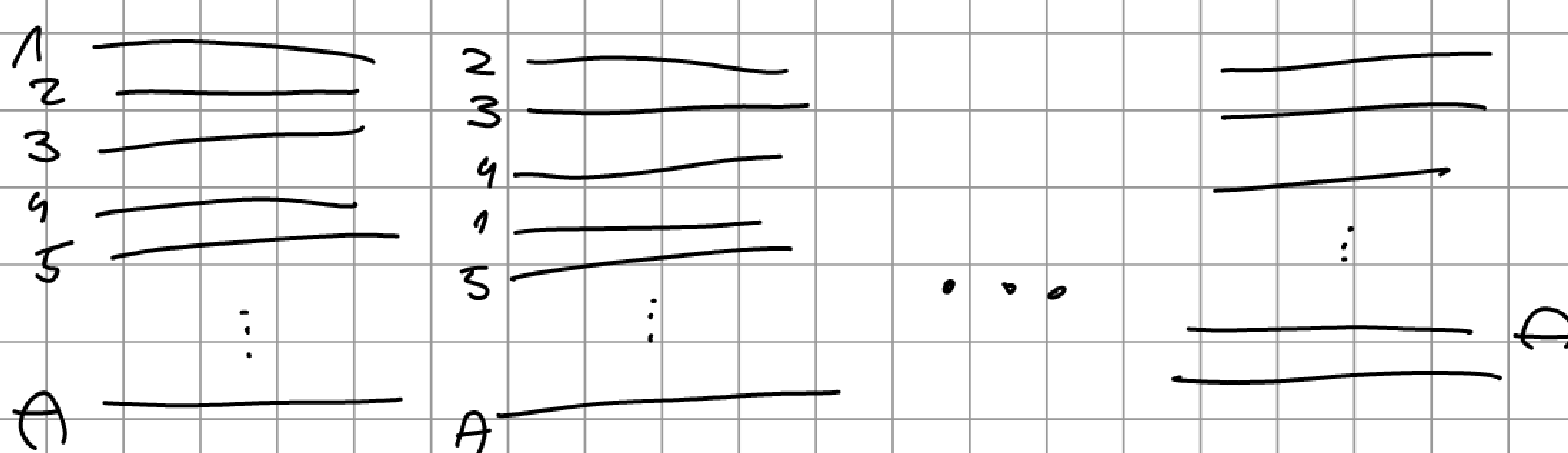
$$\mathbb{P}[X=k] = (1-p)^{k-1} \cdot p \quad , \quad k \geq 1$$

$X \sim \text{Geom}(p)$

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[X=k] = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} p =$$

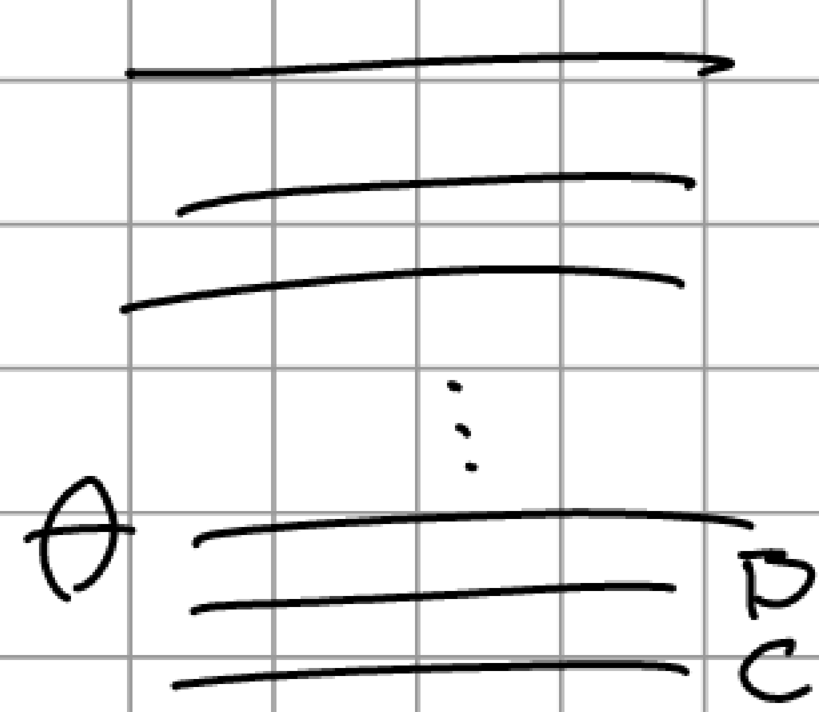
$$= \frac{p}{1-p} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^k$$

Przykład Tasujemy talię 52 kart metodą TOP TO RANDOM, tzn. kartę z góry wkładamy w losowe miejsce w talii, a następnie powtarzamy czynność. Ile należy wykonać tasowań, żeby talię uznać za posortowaną?



Z lematu B–C wynika, że w pewnym momencie karta z góry zostanie włożona pod kartę A.
Z przykładu wiemy, że l. oczekiwanych kroków wynosi 52.

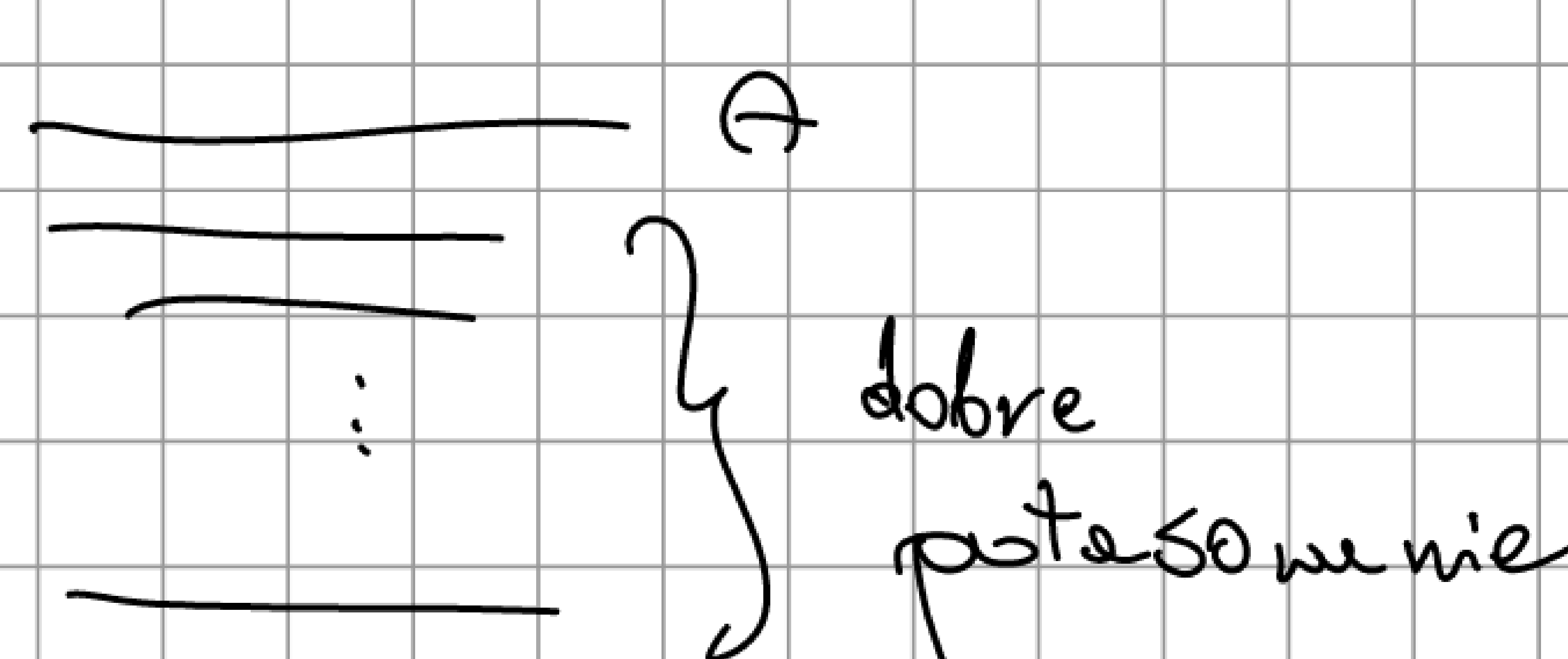
Po pewnej 1. operacji kolejna karta znajdzie się pod A. (teraz pstwo to $\frac{2}{52}$, więc powinno się to stać po 26 krokach)



lub

Pod A mamy $\begin{matrix}B\\C\end{matrix}$ lub $\begin{matrix}C\\B\end{matrix}$.

Obie te możliwości są równie prawdopodobne. Potem trafi pod A następna karta i znowu karty pod nią są dobrze potasowane.



Niech X_i – czas, który kartę A spędza na i-tej pozycji. $\mathbb{E}X_i =$

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}[X_1 + X_2 + \ldots + X_{52}] = \sum_{i=1}^{52} \mathbb{E}X_i = 52 + \frac{52}{2} + \ldots + 1 =$$

$$= 52\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{52}\right) = 52 \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{52} \frac{1}{52}}_{\log 52 + \gamma} \sim 52 \cdot (\log 52 + \gamma)$$

~ 235

γ – stała Eulera

Definicja 5.8 Niech X będzie zmienną losową taką, że $\mathbb{E}X^2 < \infty$. Liczbę

$$\operatorname{Var} X = \mathbb{E}\left([X - \mathbb{E}X]^2\right)$$

nazywamy **wariancją** zmiennej losowej X. Pierwiastek z wariancji nazywamy **odchyleniem standardowym**

$$\sigma = \sqrt{\operatorname{Var} X}.$$

TW. 5.9 X – zm. los. t.że $\mathbb{E}X^2 < \infty$. Wtedy

1. $\operatorname{Var} X < \infty$
2. $\operatorname{Var} X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$
3. $\operatorname{Var} X \geqslant 0$
4. $\operatorname{Var}(aX) = a^2 \operatorname{Var} X$
5. $\operatorname{Var}(X+a) = \operatorname{Var} X$
6. $\operatorname{Var} X = 0 \iff \mathbb{P}[X = c] = 1$ dla pewnego c
7. Jeżeli X, Y nzl., to $\operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var} X + \operatorname{Var} Y$

D-d. 7. $\operatorname{Var}(X+Y) = \mathbb{E}[X+Y - \mathbb{E}(X+Y)]^2 =$

$\overset{(2)}{=} \mathbb{E}(X+Y)^2 - (\mathbb{E}(X+Y))^2 = \mathbb{E}X^2 + 2\mathbb{E}X\cdot Y + \mathbb{E}Y^2$
$- (\mathbb{E}X)^2 - 2\mathbb{E}X\cdot Y - (\mathbb{E}Y)^2 = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 +$
$+ \mathbb{E}Y^2 - (\mathbb{E}Y)^2 = \operatorname{Var} X + \operatorname{Var} Y$ ■

Jeżeli X ma rozkład dyskretny
$\mathbb{P}[X = x_i] = p_i$, $m = \mathbb{E}X = \sum x_i p_i$, to
$$\operatorname{Var} X = \sum p_i (x_i - m)^2 = \left(\sum p_i x_i^2\right) - m^2$$

Jeżeli X ma rozkład abs. ciągły z gęstością g, $m = \mathbb{E}X = \int x g(x)\,dx$, to

$$\operatorname{Var} X = \int_{\mathbb{R}} (x-m)^2 g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} x^2 g(x)\,dx - m^2$$

<u>Przykład</u> X ma rozkład dwumianowy z par. n i p, $X \sim \operatorname{Bin}(n,p)$.

Zdefiniujmy $X_i = \begin{cases} 1 & \text{w } i\text{-tym sukces} \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$

Wtedy $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. X_i są niezależne,

$\mathbb{P}[X_i = 0] = 1-p$, $\mathbb{P}[X_i = 1] = p$.

$\mathbb{E}X_i = p$, $\operatorname{Var} X_i = \mathbb{E}X_i^2 - (\mathbb{E}X_i)^2 =$
$= p - p^2 = p(1-p)$

$\mathbb{E}X = \sum \mathbb{E}X_i = n \cdot p$

$$\operatorname{Var} X \underset{\substack{\uparrow \\ \text{niezależność}}}{=} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var} X_i = np(1-p)$$

Przykład Załóżmy, że zmienna losowa X ma rozkład $X \sim \mathrm{Geom}(p)$, tzn. $\mathbb{P}[X=k] = p(1-p)^{k-1}$ dla $k \in \mathbb{N}$. Przypomnijmy, że X oznacza moment pierwszego sukcesu w nieskończonym schemacie Bernoulliego. Wówczas

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} = \frac{1}{p}$$

$$\mathrm{Var}\, X = \frac{1-p}{p^2}$$

Przykład Jeżeli $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, to

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\mathbb{R}} x e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx \overset{y=(x-m)/\sigma}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (\underline{\sigma y} + m) \underline{e^{-\frac{y^2}{2}}} dy = m$$

f. niep. więc całka $= 0$

$$\mathrm{Var}\, X = \mathbb{E}(X-m)^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\mathbb{R}} (x-m)^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \sigma^2 y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left(-y e^{-\frac{y^2}{2}}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}} =$$

$$= \sigma^2$$

<u>Przykład</u> Zmienna losowa ma rozkład Cauchy'ego, jeżeli jej rozkład jest zadany gęstością $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$

Zauważmy, że wówczas zmienna losowa nie posiada wartości oczekiwanej:

$$\mathbb{E}|X| = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} |x| \cdot \frac{1}{1+|x|^2}\, dx = \infty$$

<u>Definicja 5.10</u> Niech X będzie d-wymiarową zmienną losową. Wówczas wektor

$$\mathbb{E}X = (\mathbb{E}X_1, \mathbb{E}X_2, \dots, \mathbb{E}X_d)$$

nazywamy **wartością oczekiwaną** zmiennej losowej X, o ile $\mathbb{E}X_i$ istnieją.

<u>Tw. 5.11</u>

1. $\mathbb{E}[aX+bY] = a\mathbb{E}X + b\mathbb{E}Y$
2. d-wymiarowa zmienna losowa ma wartości oczekiwanej $\iff \mathbb{E}|X| < \infty$
3. $|\mathbb{E}X| \leq \mathbb{E}|X|$

D-d. 3 Niech v będzie dowolnym wektorem o długości 1. Wtedy

$$\langle \mathbb{E}X, v\rangle = \sum_{j=1}^{d} \mathbb{E}X_j v_j = \mathbb{E}\langle X, v\rangle \leq \mathbb{E}|X|\cdot|v| = \mathbb{E}|X|$$

Przyjmując $v = \frac{\mathbb{E}X}{|\mathbb{E}X|}$ otrzymujemy tezę.

Definicja 5.12 Niech X, Y będą zm. los. takimi, że $\mathbb{E}X^2, \mathbb{E}Y^2 < \infty$. Liczbę

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y)]$$

nazywamy **kowariancją** X i Y. Jeżeli $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$, to X i Y są **nieskorelowane**.

Uwaga. Kowariancja jest skończona.

$$|\mathrm{Cov}(X,Y)| = |\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y)]| \leq$$

$$\leq \underbrace{\sqrt{\mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^2}}_{\sqrt{\mathrm{Var}X}} \cdot \underbrace{\sqrt{\mathbb{E}(Y-\mathbb{E}Y)^2}}_{\sqrt{\mathrm{Var}Y}} < \infty$$

Tw. 5.13 Jeżeli $\mathbb{E}X^2 < \infty$, $\mathbb{E}Y^2 < \infty$, $\mathbb{E}Z^2 < \infty$, to

1. $Cov(X,Y) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$
2. $Cov(X,X) = Var X$
3. $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$
4. $Cov(aX+bY,Z) = a Cov(X,Z) + b Cov(Y,Z)$
5. Jeżeli X,Y niezależne, to $Cov(X,Y)=0$

   ALE implikacja odwrotna nie jest prawdziwa.

Tw. 5.14 Jeżeli $\mathbb{E}X_i^2 < \infty$ dla $i=1,\dots,n$, to

$$Var(X_1+\dots+X_n) = \sum_{i=1}^{n} Var X_k + 2\sum_{k<l} Cov(X_k, X_l)$$

W szczególności, jeżeli X_i są parami nieskorelowane, to $Var(X_1+\dots+X_n) = \sum_{k=1}^{n} Var X_k$

Przykład Niech σ będzie losową permutacją liczb $1,\dots,n$ i niech X oznacza liczbę punktów stałych σ. Oblicz $Var X$.

Niech $X_i = \begin{cases} 1 & i \text{ jest pkt. stałym} \\ 0 & \text{w p.w.} \end{cases}$

Wtedy $X = \sum X_i$. $\mathbb{E}X_i = \frac{1}{n}$, $\mathbb{E}X = 1$

Zmienne X_i są zależne!

$\mathrm{Var}\, X_i = \mathbb{E}X_i^2 - (\mathbb{E}X_i)^2 = \mathbb{E}X_i - (\mathbb{E}X_i)^2 =$

$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} = \frac{n-1}{n^2}$. Dla $i \neq j$:

$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}X_iX_j - \mathbb{E}X_i \cdot \mathbb{E}X_j = (*)$

$\mathbb{E}X_iX_j = 0 \cdot \mathbb{P}[X_iX_j = 0] + 1 \cdot \mathbb{P}[X_iX_j = 1] = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1}$

$\mathrm{Var}\, X = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}\, X_k + 2\sum_{k<l} \mathrm{Cov}(V_k, V_l) =$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n-1}{n^2} + 2\sum_{k<l} \left(\frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} \right) =$

$= \frac{n-1}{n} + \cancel{2} \cdot \frac{\cancel{n}(\cancel{n-1})}{\cancel{2}} \cdot \frac{n-(n-1)}{n^{\cancel{2}}(\cancel{n-1})} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} = \underline{1}$

21.04.2021

W poprzednim odcinku:

$$\mathbb{E}X = \int_{\mathbb{R}} x \, d\mu(x), \quad X \sim \mu$$

$$\operatorname{Var} X = \mathbb{E}[X - \mathbb{E}X]^2 = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$$

Jeżeli X, Y nzl., to $\mathbb{E}X \cdot Y = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$,

$$\operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y)$$

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}X)\right]$$

$$= \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$$

$$\operatorname{Var} X = \operatorname{Cov}(X,X)$$

Definicja 5.15 Niech $X = (X_1, \dots, X_n)$ będzie n-wymiarową zmienną losową taką, że $\mathbb{E}X_i^2 < \infty$. Macierz

$$Q = \begin{bmatrix} \operatorname{Cov}(X_1,X_1) & \operatorname{Cov}(X_1,X_2) & \dots & \operatorname{Cov}(X_1,X_n) \\ \operatorname{Cov}(X_2,X_1) & \dots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \operatorname{Cov}(X_n,X_1) & \dots & & \operatorname{Cov}(X_n,X_n) \end{bmatrix}$$

nazywamy **macierzą kowariancji** zmiennej losowej X. Jest to wielowymiarowe uogólnienie wariancji.

<u>Uwaga</u> Jeżeli X_i są parami nieskorelowane, to Q diagonalne.

<u>TW. 5.16</u> Macierz kowariancji Q zm. los. X jest symetryczna oraz dodatnio określona (tzn. dla każdych $t_1, \dots, t_n$, $\sum t_i t_j q_{ij} \geq 0$).

<u>D-d</u> Ustalmy $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$. Definiujemy
$$Y = \sum_{i=1}^{n} t_i X_i .$$

$$0 \leq \operatorname{Var} Y = \mathbb{E}\left[(Y - \mathbb{E}Y)^2\right] =$$

$$= \mathbb{E}\left[\left(\sum t_j X_j - \sum t_j \mathbb{E}X_j\right)^2\right] =$$

$$= \mathbb{E}\left[\left(\sum t_j (X_j - \mathbb{E}X_j)\right)^2\right] =$$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i,j} t_i(X_i-\mathbb{E}X_i)t_j(X_j-\mathbb{E}X_j)\right] =$$

$$= \sum_{i,j} t_i t_j \,\mathbb{E}\left[(X_i-\mathbb{E}X_i)(X_j-\mathbb{E}X_j)\right] =$$

$$= \sum_{i,j} t_i t_j \,\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{i,j} t_i t_j q_{ij}$$

$\blacksquare$

<u>Zadanie</u> X – wielowym. zm. los. $\sim \mathcal{N}(m, A^{-1})$, gdzie $m \in \mathbb{R}^d$, A jest macierzą sym. i nieujemnie określoną, tzn. gęstość X jest dana wzorem

$$f(x) = \frac{\sqrt{\det A}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\langle x-m, x-m\rangle}$$

- Pokaż, że $\mathbb{E}X = m$, a macierz kow. jest równa A^{-1}
- Pokaż, że jeżeli X ma rozkład normalny, to $X_1, \dots, X_d$ są niezależne iff są nieskorelowane.

Przykład Regresja liniowa. Dane są zm. los. X i Y, są skorelowane.

$$f(x) = y = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}\, X}(x - \mathbb{E}X) + \mathbb{E}Y$$

Zał., że łatwo jest obserwować jedną z tych zm. los., np. X (łatwo jest mierzyć przebieg samochodu, trudno liczyć koszty eksploatacji). Szukamy funkcji f, która dobrze aproksymuje Y, to możemy przyjąć $Y = f(X)$.

Jak wyznaczyć ten wzór na f?

Chcemy zminimalizować $\underbrace{\mathbb{E}\left[\left(Y-(aX+b)\right)^2\right]}_{=g(a,b)}$.

Szukamy a i b.

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial a} = 2a\mathbb{E}X^2 - 2\mathbb{E}XY + 2b\mathbb{E}X = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial b} = 2b - 2\mathbb{E}Y + 2a\mathbb{E}X = 0 \end{cases}$$

Stąd
$$\begin{cases} a = \frac{\mathbb{E}XY - b\mathbb{E}X}{\mathbb{E}X^2} \\ b = \mathbb{E}Y - a\mathbb{E}X \end{cases}$$

$$a\mathbb{E}X^2 - \mathbb{E}XY + \mathbb{E}Y\mathbb{E}X - a(\mathbb{E}X)^2 = 0$$

$$a \operatorname{Var} X - \operatorname{Cov}(X,Y) = 0$$

$$a = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\operatorname{Var} X}$$

TW. 6.1 Jeżeli $\mathbb{E}X^2 < \infty$, $\mathbb{E}Y^2 < \infty$, to

$$\mathbb{E}|XY| \leq (\mathbb{E}X^2)^{\frac{1}{2}} (\mathbb{E}Y^2)^{\frac{1}{2}}$$

TW. 6.2 Nierówność Höldera: Jeżeli $\mathbb{E}|X|^p < \infty$ i $\mathbb{E}|Y|^q < \infty$, dla $p, q > 1$ t. że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, to

$$\mathbb{E}|XY| \leq (\mathbb{E}|X|^p)^{\frac{1}{p}} (\mathbb{E}|Y|^q)^{\frac{1}{q}}$$

TW. 6.3 Nierówność Czebyszewa: Niech X będzie zm. los. i niech $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ będzie niemalejącą funkcją taką, że $f(x) > 0$ dla każdego $x > 0$. Wtedy dla każdego $\lambda > 0$ zachodzi

$$\mathbb{P}[|X| \geq \lambda] \leq \frac{\mathbb{E} f(|X|)}{f(\lambda)}$$

D-d. $\mathbb{P}[|X| \geq \lambda] = \mathbb{E}\, \mathbb{1}_{\{|X| \geq \lambda\}} \leq$

$$\leq \mathbb{E}\left[\frac{f(|X|)}{f(\lambda)} \cdot \mathbb{1}_{\{|X| \geq \lambda\}}\right] \leq \frac{1}{f(\lambda)}\, \mathbb{E}\left[f(|X|)\right]$$

Wniosek 8.4

- Nierówność Markowa $(f(x) = x^p$ dla $p > 0)$:

$$\mathbb{P}[|X| > \lambda] \leq \frac{\mathbb{E}|X|^p}{\lambda^p}, \quad \forall \lambda > 0$$

- Nierówność Czebyszewa $(f(x) = x^2$, zamiast X bierzemy $X - \mathbb{E}X)$:

$$\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}X| \geq \lambda] \leq \frac{\operatorname{Var} X}{\lambda^2}, \quad \forall \lambda > 0$$

- Wykładnicza nierówność Czebyszewa $(f(x) = e^{px})$: Jeżeli $\mathbb{E}e^{pX} < \infty$, $p > 0$, to

$$\mathbb{P}[X \geq \lambda] \leq \frac{\mathbb{E}e^{pX}}{e^{p\lambda}}, \quad \forall \lambda > 0$$

Rodzaje zbieżności zmiennych losowych.

Definicja 6.5 Załóżmy, że X_n jest ciągiem zm. losowych. Mówimy, że

1. X_n zbiega do X **prawie na pewno**, jeżeli $\mathbb{P}(\{\omega : X_n(\omega) \to X(\omega)\}) = 1$.
   Piszemy wówczas $X_n \to X$ (lub $X_n \xrightarrow{p.n.} X$)
2. X_n zbiega do X **według prawdopodobieństwa**, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[|X_n - X| \geq \varepsilon] = 0$$
   Piszemy wówczas $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$
3. X_n zbiega do X w $\mathcal{L}^p$, jeżeli $X_n \in \mathcal{L}^p$ (tzn. $\|X_n\|_p = (\mathbb{E}|X_n|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty$) oraz
$$\lim_{n\to\infty} \|X_n - X\|_p = \lim_{n\to\infty} (\mathbb{E}|X_n - X|^p)^{\frac{1}{p}} = 0$$
   Piszemy wówczas $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X$.

TW. 6.6 Jeżeli $X_n \xrightarrow{p.n.} X$, $\varphi_n \xrightarrow{p.n.} \varphi$, to

1. $aX_n + b\varphi_n \xrightarrow{p.n.} aX + b\varphi$
2. $X_n \varphi_n \xrightarrow{p.n.} X\varphi$

TW. 6.7 Jeżeli $X_n \longrightarrow X$, to $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. Implikacja odwrotna nie jest prawdziwa.

$\Rightarrow$ było na teorii miary

$\Leftarrow$ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}or([0,1]), \lambda)$.

$X_1 = \mathbb{1}_{[0,1]}$, $X_2 = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]}$, $X_3 = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}$,

$X_4 = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{4}]}$, $\dots$, $X_7 = \mathbb{1}_{[\frac{3}{4},1]}$, $\dots$

Wtedy $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, ale nie $X \to 0$.

TW. 6.8 Jeżeli $X_n \xrightarrow{L^p} X$, to $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. Implikacja odwrotna nie jest prawdziwa.

D-d. Z nierówności Czebyszewa

$\Rightarrow$

$$\mathbb{P}[|X_n - X| < \varepsilon] \le \frac{\mathbb{E}|X_n - X|^p}{\varepsilon^p} \longrightarrow 0$$

$\Leftarrow$ $X_n = n^{\frac{1}{p}} \cdot \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}$, $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, $X_n \overset{L^p}{\not\longrightarrow} 0$

TW. 6.9 Jeżeli $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, to istnieje podciąg $\{X_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ taki, że $X_{n_k} \xrightarrow{p.n.} X$.

D-d Ustalmy $\varepsilon = 2^{-k}$.

$$\mathbb{P}[|X_n - X| \geq 2^{-k}] \leq 2^{-k} \quad (\text{dla dużych } n).$$

$$n \geq n_k$$

Możemy założyć, że $\{n_k\}$ jest rosnący.

Mamy $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[|X_{n_k} - X| > 2^{-k}] \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < \infty$

Z lematu Borela - Cantelliego wynika, że $\mathbb{P}[|X_{n_k} - X| \geq 2^{-k} \text{ i.o.}] = 0$.

Stąd wynika, że $|X_{n_k} - X| \geq 2^{-k}$ tylko dla skończenie wielu indeksów. Tzn. że od pewnego miejsca $|X_{n_k} - X| < 2^{-k}$

$\Rightarrow X_{n_k} \to X$.

Słabe Prawo Wielkich Liczb (SPWL)

<u>TW.</u> Dany jest ciąg niezależnych zmiennych losowych $\{X_n\}$ o takiej samej wartości oczekiwanej i wariancji. Wówczas $\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}X_1$.

Naszym celem będzie pokazanie <u>Mocnego</u> PWL, które mówi o zbieżności p.w.

<u>TW. 7.1</u> Jeżeli ciąg $X_1, X_2, \ldots$ spełnia $\mathbb{E}X_i^2 < \infty$, zmienne losowe są nieskorelowane oraz mają wspólnie ograniczoną wariancję, to

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n - \mathbb{E}[X_1 + \ldots + X_n]}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

W szczególności, jeżeli wszystkie zmienne losowe X_i mają tę samą wartość oczekiwaną, to

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}X_1 .$$

D-d. Z nierówności Czebyszewa, dla $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left[\frac{X_1 + \ldots + X_n - \mathbb{E}[X_1 + \ldots + X_n]}{n} \geq \varepsilon \right] \leq$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \mathrm{Var}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \right) =$$

$$\frac{1}{(n\varepsilon)^2} \mathrm{Var}(X_1 + \ldots + X_n) \overset{\text{nieskorelowane}}{=}$$

$$\frac{1}{(n\varepsilon)^2} \left(\mathrm{Var}\, X_1 + \ldots + \mathrm{Var}\, X_n \right) \leq$$

$$\frac{M \cdot n}{(n\varepsilon)^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Przykład. Weźmy $\{X_k\}$ ciąg nzl. zm. los. oraz że $X_k \sim \mathcal{U}([-1, 1])$. Wtedy $X_1^2, X_2^2, \ldots$ są niezależne. Ponadto

$$\mathbb{E}X_1^2 = \int_{-1}^{1} x^2 \frac{dx}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} .$$

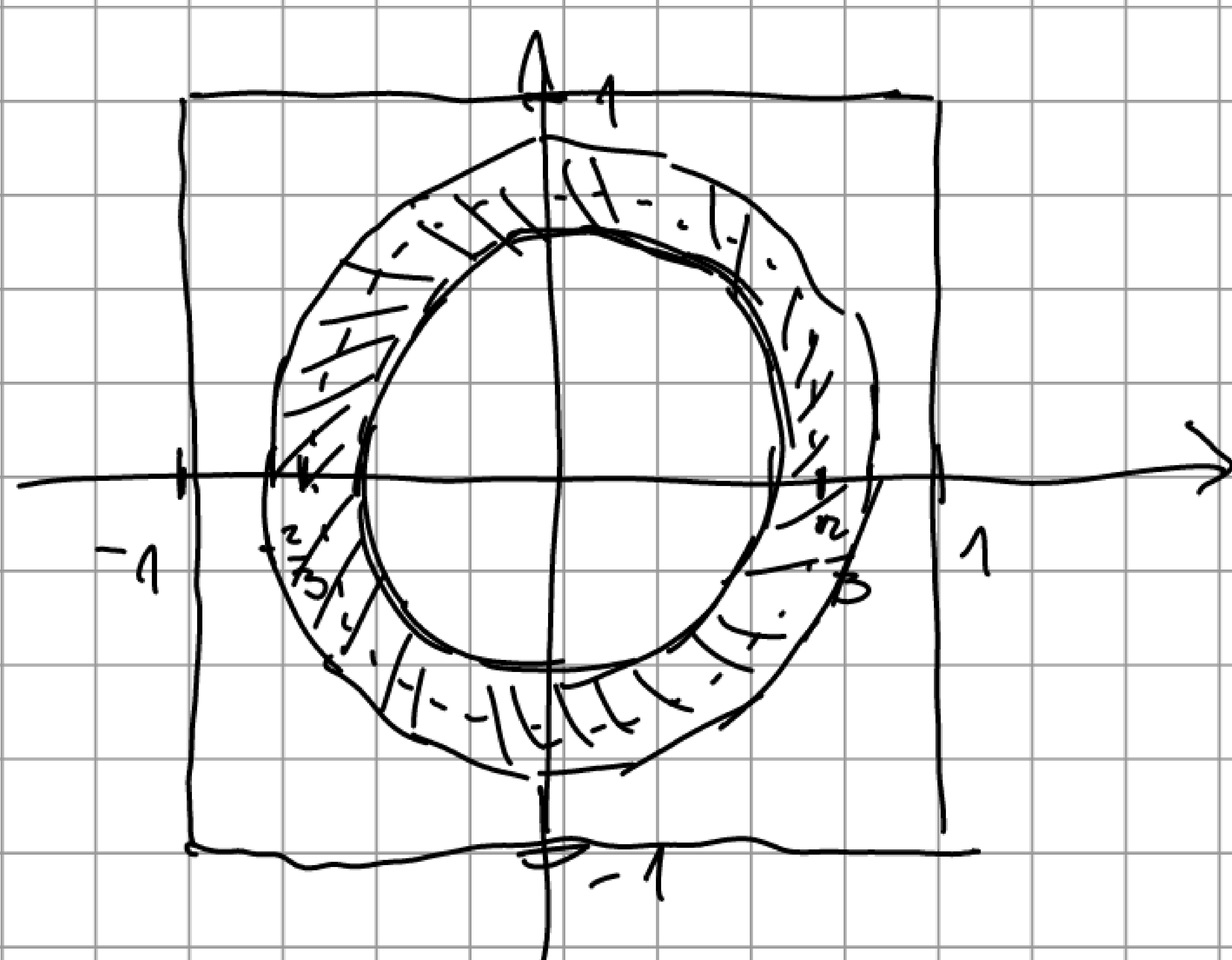
$$\mathrm{Var}\, X_1^2 \leq \mathbb{E}X_1^4 \leq 1 .$$

Ze SPWL mamy

$$\frac{X_1^2 + \dots + X_n^2}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1/3 .$$

Ustalmy $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Zdefiniujmy

$$A_{n,\varepsilon} = \{ x \in \mathbb{R}^n : (1-\varepsilon)\sqrt{\tfrac{n}{3}} \leq \|x\| \leq (1+\varepsilon)\sqrt{\tfrac{n}{3}} \}$$



Dla $n \geq 4$ będzie tak, że ten pierścień będzie trochę wychodził poza kostkę, a trochę jeszcze w nim będzie.

Teraz

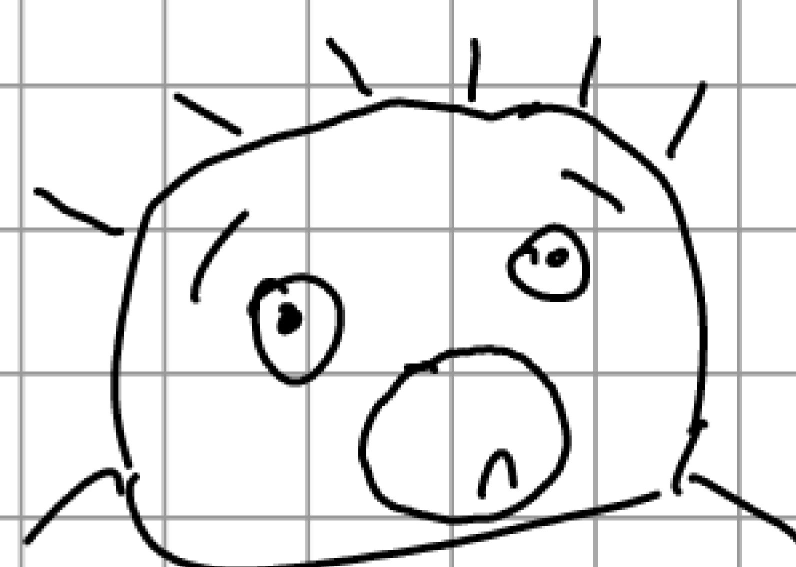
$$\frac{1}{2^n} \cdot \lambda\left(A_{n,\varepsilon} \cap [-1,1]^n\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left[(X_1, \dots, X_n) \in A_{n,\varepsilon}\right] =$$

$$= \mathbb{P}\left[(1-\varepsilon)\sqrt{\frac{n}{3}} \le \sqrt{X_1^2 + \dots + X_n^2} \le (1+\varepsilon)\sqrt{\frac{n}{3}}\right] =$$

$$= \mathbb{P}\left[\frac{1}{3}(1-\varepsilon)^2 \le \frac{X_1^2 + \dots + X_n^2}{n} \le \frac{1}{3}(1+\varepsilon)^2\right] \geq$$

$$\geq \mathbb{P}\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{1}{3}\right| \le \frac{1}{3}(2\varepsilon - \varepsilon^2)\right] \xrightarrow{\text{SPWL}} 1$$



28.04.2021

CPWL. $\{X_i\}$ - ciąg zm. los. o takim samym rozkładzie i $\mathbb{E}X_i^2 < \infty$

Cel: $\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{p.w.} \mathbb{E}X_1$

Chcemy badać sumy: $\frac{X_1 + \ldots + X_n - a_n}{b_n}$

Przykład: Czy $\sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1) \frac{1}{n}$ jest zbieżny?

Np. $\sum \frac{1}{n} = \infty$, $\sum (-1)^n \frac{1}{n} < \infty$

Tw. Riemanna: można tak ustawić ± 1, żeby szereg był zbieżny do dowolnej wartości $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Definicja 7.2 Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie p. prob. i niech $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$ będzie ciągiem σ-ciał zawartych w $\mathcal{F}$. Zdefiniujmy

$$\mathcal{F}_{n,\infty} = \sigma(\mathcal{F}_n, \mathcal{F}_{n+1}, \dots)$$

wtedy $$\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{n,\infty}$$

nazywamy **σ-ciałem ogonowym.**

Intuicja: Mamy ciąg doświadczeń (zm. los. X_n). $\mathcal{F}_n$ - wiedza o n-tym doświadczeniu. $\mathcal{F}_{n,\infty}$ - wiedza o dośw. od chwili n.

$$\mathcal{F}_{n,\infty} \supseteq \mathcal{F}_{n+1,\infty}.$$

$\mathcal{F}_\infty$ - wiedza o „nieskończenie odległej" przyszłości.

<u>Przykład.</u> Rzucamy kostką.

"6 wypadnie ∞ wiele razy"

Dla każdego n to zdarzenie należy do $\mathcal{F}_{n,\infty}$

<u>Przykład</u> Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem zmiennych losowych i niech $\mathcal{F}_n = \sigma(X_n)$. będzie σ-ciałem generowanym przez X_n.

Wtedy:

- jeżeli $A_i \in \sigma(X_i)$, to
$$A = \limsup A_n = \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{i \geq k} A_i \in \mathcal{F}_\infty$$

bo dla każdego n
$$A = \bigcap_{k > n} \bigcup_{i \geq k} A_i \in \mathcal{F}_{n,\infty}$$

$$\left(\begin{array}{l} A_i = \{\text{"w } i\text{-tym rzucie wypadła 6"}\} \\ \bigcup_{i \geq k} A_i = \{\text{"w rzutach } k, k+1, k+2, \ldots \text{ wypadła co najmniej jedna 6"}\} \\ A = \{\text{wypadło } \infty \text{ wiele 6}\} \end{array} \right)$$

- zdarzenie

$$A = \{\omega : \text{ciąg } \{X_n(\omega)\} \text{ jest zbieżny}\}$$

należy do σ-ciała ogonowego, bo

$$\{\omega : \{X_n(\omega)\} \text{ zbieżny}\} = \bigcap_{N=1} \bigcup_{k=n} \bigcap_{j,m \geq k} \{|X_j(\omega) - X_m(\omega)| < 1/N\}$$

$$= \bigcap_{N=n} \bigcup_{k=N}^{\infty} \bigcap_{j,m \geq k} \{|X_j(\omega) - X_m(\omega)| < 1/N\} \in \mathcal{F}_{n,\infty}$$

Pokazaliśmy, że dla każdego n

$$\{\omega : \text{ciąg } \{X_n(\omega)\} \text{ jest zbieżny}\} \in \mathcal{F}_{n,\infty}$$

a to daje nam

$$\{\omega : \text{ciąg } \{X_n(\omega)\} \text{ jest zbieżny}\} \in \mathcal{F}_\infty$$

- zdarzenie

$$\{\sup_n |X_n| < \infty\} \text{ i } \{\sum_{n=1}^{\infty} X_n \text{ jest zbieżny}\}$$

$$\{\omega : \sup_n |X_n(\omega)| < \infty\}$$

należą do σ-ciała ogonowego

- zdarzenie

$$\{\limsup_{n\to\infty}(X_1+\ldots+X_n) > 0\}$$

nie należy do σ-ciała ogonowego, ponieważ pierwsze składniki mają wpływ na granicę.

<u>Tw. 7.3</u> (Prawo 0-1 Kołmogorowa)
Jeżeli σ-ciała $\mathcal{F}_n$ są niezależne, to dla każdego zdarzenia $A \in \mathcal{F}_\infty$ zachodzi

$$\mathbb{P}[A] = 0 \text{ lub } \mathbb{P}[A] = 1.$$

<u>Lemat 7.4</u> Jeżeli rodziny zbiorów $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ są niezależne i każdy z nich tworzy π-układ, to σ-ciała przez nie generowane $\sigma(\mathcal{A}_1), \ldots, \sigma(\mathcal{A}_n)$ są niezależne.

D-d. Ustalmy zbiory $A_2 \in \mathcal{A}_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}_n$ oraz niech

$$\mathcal{L} = \{A \in \mathcal{F} : \mathbb{P}[A \cap A_2 \cap \dots \cap A_n] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[A_2] \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}[A_n]\}$$

Oczywiście $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{L}$. Ponadto $\mathcal{L}$ jest λ-układem

- $\Omega \in \mathcal{L}$
- jeżeli $A, B \in \mathcal{L}$ oraz $A \subset B$, to

$$\mathbb{P}[(B \setminus A) \cap A_2 \cap \dots \cap A_n] =$$

$$\mathbb{P}[B \cap A_2 \cap \dots \cap A_n] - \mathbb{P}[A \cap A_2 \cap \dots \cap A_n] =$$

$$= \mathbb{P}[B] \cdot \mathbb{P}[A_2] \dots \mathbb{P}[A_n] - \mathbb{P}[A] \mathbb{P}[A_2] \dots \mathbb{P}[A_n]$$

$$= \mathbb{P}[B \setminus A] \, \mathbb{P}[A_2] \dots \mathbb{P}[A_n].$$

- $\{B_k\}$ wst. rodz. zb. w $\mathcal{L}$, $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, wtedy $\mathbb{P}[B_n] \to \mathbb{P}[B]$. Podobnie

$$\mathbb{P}[B_k \cap A_2 \cap \dots \cap A_n] \xrightarrow{k \to \infty} \mathbb{P}[B \cap A_2 \cap \dots A_n]$$

Wynika stąd

$$\mathbb{P}[B\cap A_2\cap\ldots\cap A_n]\xleftarrow{k\to\infty}\mathbb{P}[B_k\cap A_2\cap\ldots\cap A_n]=$$

$$=\mathbb{P}[B]\mathbb{P}[A_2]\ldots\mathbb{P}[A_n]\xrightarrow{k\to\infty}\mathbb{P}[B]\mathbb{P}[A_2]\ldots\mathbb{P}[A_n]$$

a więc $B\in\mathcal{L}$.

Zatem $\sigma(\mathcal{A}_1), \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ są niezależne. Teraz ustalamy $A_1\in\sigma(\mathcal{A}_1)$, $A_3\in\mathcal{A}_3, \ldots, A_n\in\mathcal{A}_n$ i definiujemy

$$\mathcal{L}_2=\{A\in\mathcal{F}: \mathbb{P}[A_1\cap A\cap A_3\cap\ldots\cap A_n]=$$
$$=\mathbb{P}[A_1]\mathbb{P}[A]\mathbb{P}[A_3]\ldots\mathbb{P}[A_n]\}.$$

Powtarzamy rozumowanie n razy i dostajemy tezę. ■

<u>Dd. tw. 7.3</u> Pokażemy że A jest niezależny od samego siebie.

Wtedy $\mathbb{P}[A]=\mathbb{P}[A\cap A]=\mathbb{P}[A]\cdot\mathbb{P}[A]=\mathbb{P}[A]^2$

Stąd $\mathbb{P}[A]\in\{0,1\}$.

Aby to uzasadnić opiszemy pewne rodziny zbiorów $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ dla których zachodzi

$$\mathbb{P}[B \cap C] = \mathbb{P}[B]\mathbb{P}[C]$$

dla $B \in \mathcal{G}_1$, $C \in \mathcal{G}_2$.

Krok 1. Weźmy dowolne k oraz

$$B \in \sigma(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k), \quad C \in \sigma(\mathcal{F}_{k+1}, \mathcal{F}_{k+2}, \dots)$$

Zauważmy, że $\sigma(\mathcal{F}_{k+1}, \mathcal{F}_{k+2}, \dots) =$

$$= \sigma\Big(\bigcup_{j \geq 1} \sigma(\mathcal{F}_{k+1}, \mathcal{F}_{k+2}, \dots \mathcal{F}_{k+j})\Big) = (*)$$

i powyższa suma jest π-układem.

Rodziny $\sigma(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ oraz

$\bigcup_{j \geq 1} \sigma(\mathcal{F}_{k+1}, \dots, \mathcal{F}_{k+j})$ są niezależne

(z założeń tw.), a zatem

$\sigma(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k)$ oraz $\underset{\mathcal{F}_\infty}{\overset{\cup\!\!|}{(*)}}$ są niezależne

z lematu.

Zatem dla każdego k

$$\sigma(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_k), \ \sigma(\mathcal{F}_{k+1}, \mathcal{F}_{k+2}, \ldots)$$

są niezależne.

Krok 2. Weźmy teraz

$$B \in \sigma(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots), \ C \in \mathcal{F}_\infty$$

Zbiory $\sigma(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_k)$, $\mathcal{F}_\infty$ są niezależne z kroku 1. Zatem $\bigcup_{k \geq 1} \sigma(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_k)$, $\mathcal{F}_\infty$ są niezależne. Są to π-układy, więc z lematu niezależne są

$$\underbrace{\sigma\Big(\bigcup_{k \geq 1} \sigma(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_k)\Big)}_{= \sigma(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots)}, \quad \mathcal{F}_\infty$$

Ale $\mathcal{F}_\infty \subseteq \sigma(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots)$, więc dla dowolnego $A \in \mathcal{F}_\infty$ mamy

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A \cap A] = \mathbb{P}[A]^2.$$

$\blacksquare$

Wniosek 7.5 Jeżeli $\{X_n\}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych, to

- granica $\lim_{n\to\infty} X_n$ istnieje z p-stwem 0 lub 1
- szereg $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ jest zbieżny z p-stwem 0 lub 1
- $\mathbb{P}[\{\limsup X_n = \infty\}] = 0$ lub 1
- $\mathbb{P}[\{\lim_{n\to\infty} (X_1 + \ldots + X_n)/n < \infty\}] = 0$ lub 1.

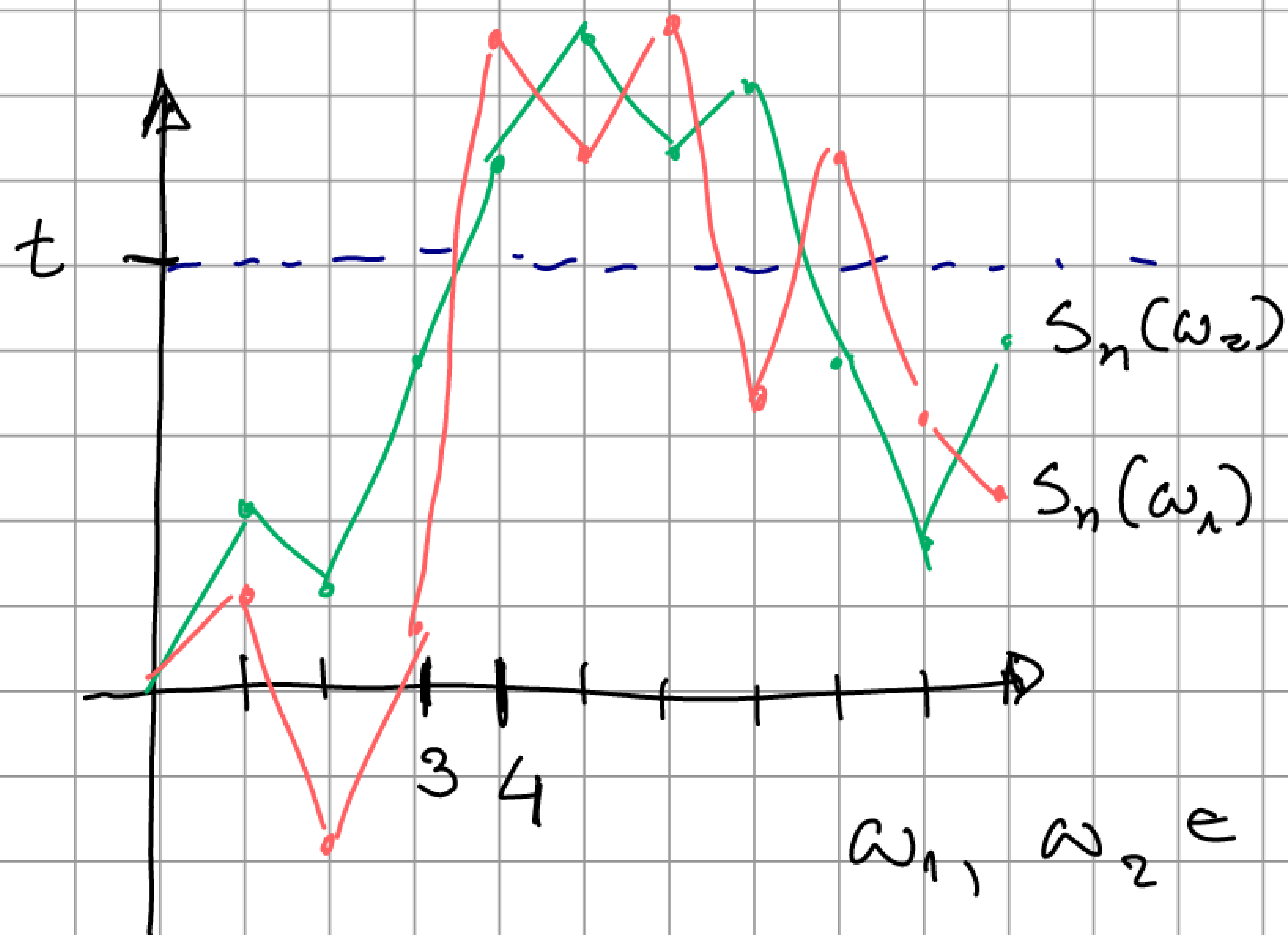
TW. 8.1 (Nierówność Kołmogorowa)

Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niezl. zm. los. takimi, że $\mathbb{E}X_i = 0$ oraz $\mathbb{E}X_i^2 < \infty$. Wtedy dla dowolnego $t > 0$

$$\mathbb{P}\left[\max_{1\le k\le n} |X_1 + \ldots + X_k| \geq t\right] \leq \frac{1}{t^2} \mathrm{Var}(X_1 + \ldots + X_n)$$

D-d. $S_0 := 0$, $S_k := S_{k-1} + X_k$. Zdefiniujmy

$$A_k = \{ |S_j| < t \text{ dla } j < k, \ |S_k| \geq t \}$$



$\omega_1, \omega_2 \in A_4$

A_k opisuje zdarzenia, które dopiero w k-tym kroku przeskakują nad t.

A_k są rozłączne, $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = B = \{ \max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq t \}$

$A_k \in \sigma(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n)$ $(\sigma(X_i) = \mathcal{F}_i)$

$$\operatorname{Var} S_n = \mathbb{E} S_n^2 = \int_\Omega S_n^2 \, d\mathbb{P} \geq \int_B S_n^2 \, d\mathbb{P}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} S_n^2 \, d\mathbb{P} = \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} (S_k + S_n - S_k) \, d\mathbb{P}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{A_k} S_k^2 \, d\mathbb{P} + 2 \int_{A_k} (S_n - S_k) S_k \, d\mathbb{P} + \int_{A_k} (S_n - S_k)^2 \, d\mathbb{P} \right)$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{A_k} S_k^2 \, d\mathbb{P} + 2 \int (S_n - S_k) S_k \mathbb{1}_{A_k} d\mathbb{P} \right)$$

Zmienne losowe $S_n - S_k$ oraz $S_k \mathbb{1}_{A_k}$ są niezależne, bo $\sigma(S_k \mathbb{1}_{A_k}) \subseteq \sigma(X_1, \dots, X_k)$

$\sigma(S_n - S_k) \subseteq \sigma(X_{k+1}, \dots, X_n)$ niezależne

$$\int (S_n - S_k) \cdot S_k \mathbb{1}_{A_k} d\mathbb{P} = \mathbb{E}\left[(S_n - S_k) S_k \mathbb{1}_{A_k}\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[(S_n - S_k)\right] \mathbb{E}\left[S_k \mathbb{1}_{A_k}\right] =$$

$$= \sum_{j=k+1}^{n} \mathbb{E}_j \cdot \mathbb{E}\left[S_k \mathbb{1}_{A_k}\right] = 0$$

A stąd

$$\operatorname{Var} S_n \geq \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} S_k^2 \, d\mathbb{P} \geq \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} t^2 \, d\mathbb{P}$$

$$= t^2 \int_B d\mathbb{P} = t^2 \mathbb{P}[B] \quad \blacksquare$$

TW. 8.2 (Kołmogorowa o dwóch szeregach)

Załóżmy, że $X_1, X_2, \ldots$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że $\mathbb{E}X_i^2 < \infty$. Jeżeli

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}X_k < \infty \quad \text{oraz} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Var} X_k < \infty,$$

to

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_i < \infty \quad \text{p.n.}$$

Przykład Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n}{n}$, gdzie

$$U_n = \begin{cases} 1 & \text{z pstwem } \frac{1}{2} \\ -1 & \text{z pstwem } \frac{1}{2} \end{cases}, \quad U_n \text{ niezależne,}$$

jest zbieżny?

Niech $X_n = \frac{U_n}{n}$, wtedy $\mathbb{E}X_n = 0$,

$$\operatorname{Var} X_n = \frac{1}{n^2} \operatorname{Var}(U_n) = \frac{1}{n^2}.$$

Zatem szereg $\sum X_n$ jest zbieżny p.n.

D-d. TW. 8.2 Możemy założyć, że $\mathbb{E}X_i = 0$, bo przy powyższych założeniach $\sum X_i$ jest zbieżny p.n. $\Leftrightarrow \sum (X_i - \mathbb{E}X_i)$ jest zbieżny.

Niech $S_N = \sum_{n=1}^{N} X_n$. Chcemy pokazać, że $\{S_N\}$ jest ciągiem Cauchy'ego. Z nierówności Kołmogorowa

$$\mathbb{P}\left[\max_{M \le m \le N} |S_m - S_M| \geq \varepsilon\right] \le \frac{1}{\varepsilon^2} \operatorname{Var}(S_N - S_M)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n=M+1}^{N} \operatorname{Var} X_n$$

Przechodząc z N do ∞ i korzystając z ciągłości miary oraz $\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{Var} X_i < \infty$

$$\mathbb{P}\left[\sup_{m \geq M} |S_m - S_M| \geq \varepsilon\right] \le \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n=M+1}^{\infty} \operatorname{Var} X_n \xrightarrow{M \to \infty} 0$$

Zatem dla każdego $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\Big[\underbrace{\sup_{n,m \geq M} |S_m - S_n| \geq 2\varepsilon}_{= W_M}\Big] \xrightarrow{M \to \infty} 0$$

Zatem $W_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Z tw. Riesza W_M ma podciąg W_{M_k} zbieżny do 0 p.n.

Ale zauważmy, że ciąg $W_n \xrightarrow{p.n.} 0$. To pokazuje, że ciąg S_n jest ciągiem Cauchy'ego p.n., a więc S_n jest zbieżny p.n.

$\blacksquare$

5.05.2021

<u>Lemat 8.3</u> (Kroneckera)

Załóżmy, że a_n jest ciągiem liczbowym takim, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ jest zbieżny. Wtedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \to 0$$

<u>D-d.</u> $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}$, $S_n = S_{n-1} + \frac{a_n}{n}$

$$a_n = n(S_n - S_{n-1}) \quad (*)$$

Przypomnienie z AM 1: Jeśli $S_n \to S$, to średnie $\frac{S_1 + \ldots + S_n}{n} \to S$. $(**)$

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \overset{(*)}{=} \frac{S_1 + 2(S_2 - S_1) + \ldots + n(S_n - S_{n-1})}{n} =$$

$$= \frac{-S_1 - S_2 - \ldots - S_{n-1} + nS_n}{n} = S_n - \frac{S_1 + \ldots + S_{n-1}}{n}$$

$$\xrightarrow{(**)} S - S = 0$$

TW. 8.4 (Mocne Prawo Wielkich Liczb Kołmogorowa)

Załóżmy, że $\{X_n\}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych (i.i.d, independent, identically distributed) o tym samym rozkładzie.

1. Jeżeli $\mathbb{E}|X_1| < \infty$ i $m = \mathbb{E}X_1$, to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} = m \quad \text{p.n.}$$

2. Jeżeli $\mathbb{E}|X_1| = \infty$, to

$$\mathbb{P}\left[\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right| = \infty\right] = 1$$

D-d. Z lematu Kroneckera wystarczy pokazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n - m}{n}$ jest zbieżny p.n. Wówczas $\overset{\shortparallel}{(*)}$

$$\frac{(X_1 - m) + (X_2 - m) + \ldots + (X_n - m)}{n} =$$

$$= \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - m \xrightarrow{p.n.} 0$$

Dowód 1. Załóżmy dodatkowo, że $\mathbb{E}X_n^2 < \infty$.

Pokażemy zbieżność szeregu (*) korzystając z tw. o 2 szeregach:

1° $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\frac{X_i - m}{i}\right] = 0 < \infty$

2° $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Var}\left(\frac{X_i - m}{i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \mathrm{Var}(X_i) =$

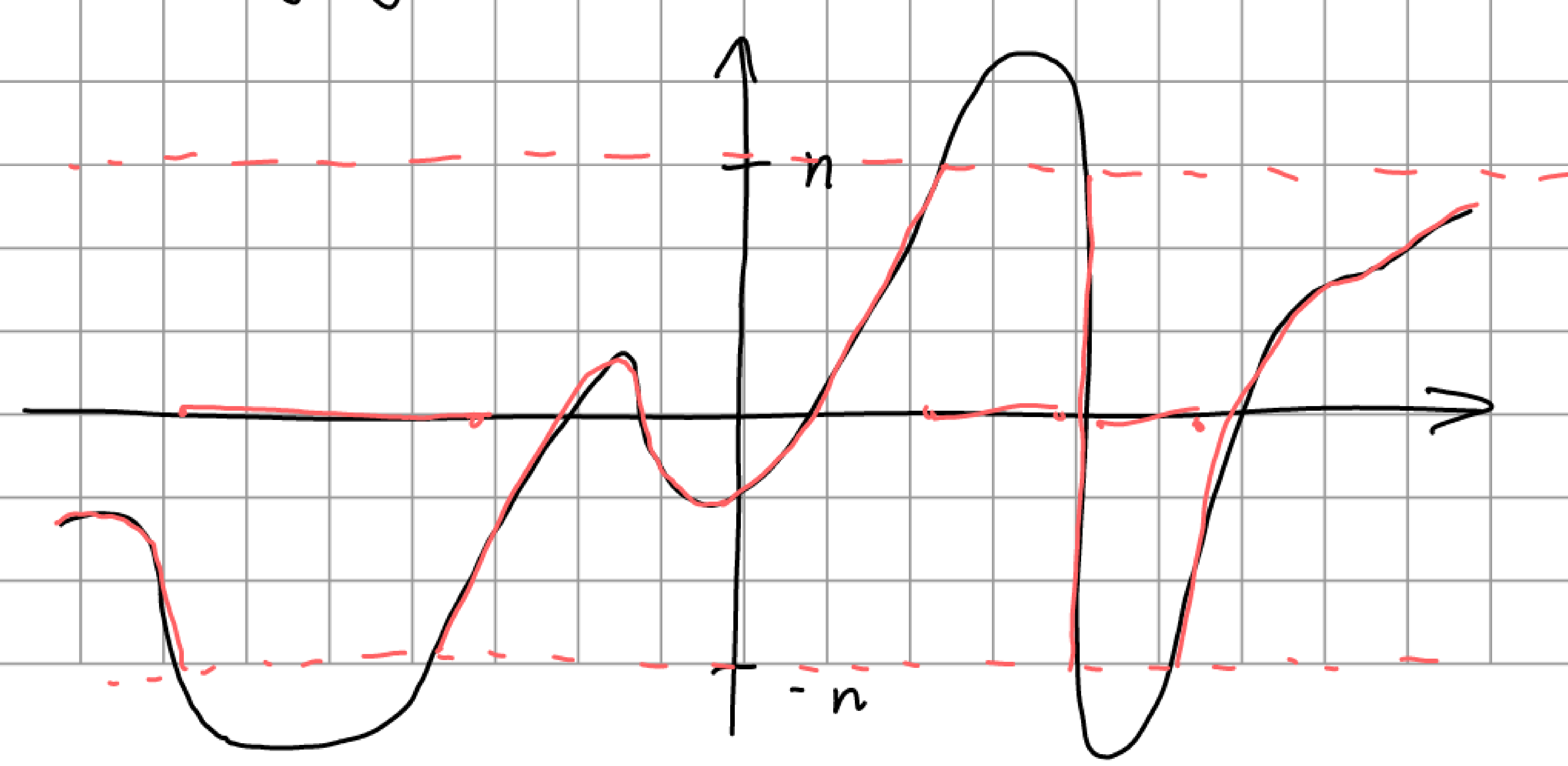
$$= \mathrm{Var}\, X_1 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} < \infty$$

Wtedy $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i - m}{i} < \infty$. $\blacksquare$

Dowód w pełnej ogólności.

Zakładamy $\mathbb{E}|X_n| < \infty$.

Zdefiniujmy $X_n' = X_n \cdot \mathbb{1}_{\langle -n, n \rangle}(X_n) = \begin{cases} X_n & \text{jeżeli } |X_n| < n \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$



Zmienne losowe X_n' są nzl. oraz ograniczone, więc również $\mathbb{E}(X_n')^2 < \infty$. Mamy

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - m = \frac{(X_1 + \dots + X_n) - (X_1' + \dots + X_n')}{n}$$

$$+ \frac{(X_1' + \dots + X_n') - (\mathbb{E}X_1' + \dots + \mathbb{E}X_n')}{n} + \frac{\mathbb{E}X_1' + \dots + \mathbb{E}X_n'}{n} - m$$

$$= \mathrm{I}_n + \mathrm{II}_n + \mathrm{III}_n$$

Pokażemy, że $\mathrm{I}_n \to 0$, $\mathrm{II}_n \to 0$, $\mathrm{III}_n \to 0$.

III: Z tw. Lebesgue'a o zbieżności zdominowanej $\mathbb{E}X_n' = \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{\langle -n,n \rangle}(X_n)] = \mathbb{E}[X_1 \mathbb{1}_{\langle -n,n \rangle}(X_n)]$
$\xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}X_1 = m$, a zatem $\mathrm{III}_n \to 0$
(+ przypomnienie z AM1).

I: $\dfrac{X_1 + \dots + X_n - (X_1' + \dots + X_n')}{n} = \dfrac{(X_1 - X_1') + \dots + (X_n - X_n')}{n}$

Pokażemy, że z p-stwem 1 dla dużych n $X_n = X_n'$

$$\mathbb{P}[\{\omega : \exists N_\omega \ \forall n > N_\omega \ X_n = X_n'\}] = 1$$

$$X_n - X_n' \to 0 \quad \text{p.n.}$$

A zatem $I_n \to 0$ p.n. (bo to są śr. arytmetyczne ciągu $X_n - X_n'$).

Żeby pokazać, że $X_n - X_n' \to 0$, skorzystamy z lematu Borela-Cantelliego.

Zauważmy, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[X_n \neq X_n'] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[|X_n| \geq n] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[|X_1| \geq n] = (\star)$$

Przewidujemy, że $\mathbb{E}|X_1| < \infty$ da nam zbieżność szeregu.

$$(\star) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}[k \leq |X_1| < k+1] = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} \mathbb{P}[k \leq |X_1| < k+1]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}[k \leq |X_1| < k+1]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k \leq |X_1| < k+1} k \, d\mathbb{P} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k \leq |X_1| < k+1} |X_1| \, d\mathbb{P} \leq \mathbb{E}|X_1| < \infty$$

Z lematu B-C $\mathbb{P}[X_n \neq X_n' \text{ i.o.}] = 0$

$\Rightarrow \mathbb{P}[X_n = X_n' \text{ od pewnego miejsca}] = 1$

II_n: Z lematu Kroneckera wystarczy pokazać, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n' - \mathbb{E}X_n'}{n}$ jest zbieżna p.n. Z tw. Kołmogorowa wystarczy pokazać, że szereg wariancji jest zbieżny.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}\left(\frac{X_n' - \mathbb{E}X_n'}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \mathrm{Var}(X_n')$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(\mathbb{E}(X_n')^2 - (\mathbb{E}X_n')^2\right)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \mathbb{E}(X_n')^2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k-1 \leq |X_n'| < k} (X_n')^2 \, d\mathbb{P}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1 \leq |X_n'| < k} (X_1)^2 \, d\mathbb{P}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \cdot \int_{k-1 \leq |X_1| < k} |X_1| \, d\mathbb{P}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \mathbb{E}\left[|X_1| \cdot \mathbb{1}_{[k-1,k)}(|X_1|)\right.$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{k}{n^2} \mathbb{E}[|X_1| \mathbb{1}_{[k-1,k)}(|X_1|)]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k\, \mathbb{E}[|X_1| \mathbb{1}_{[k-1,k)}(|X_1|)] \cdot \underbrace{\sum_{n=k}^{\infty} 1/n^2}_{\leq 2/k} = (\star)$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=k}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{n^2}\,dx \leq \sum_{n=k}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{2}{x^2}\,dx$$

$$= \int_k^{\infty} \frac{2}{x^2}\,dx = \frac{2}{k}$$

$$(\star) \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[|X_1| \mathbb{1}_{[k-1,k)}(|X_1|)]$$

$$= 2\,\mathbb{E}|X_1| < \infty \qquad \blacksquare$$

Zastosowania MPWL

1° Metoda Monte Carlo. Cel: aproksymować $\int_0^1 f(x)dx$

Generujemy ciąg nzl. zm. los. $\{X_n\}$ o rozkładzie z gęstością g $\left(g \geq 0, \int_0^1 g(x)dx = 1\right)$

Obliczmy $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{f(X_i)}{g(X_i)}}_{\text{i.i.d.}} \xrightarrow{\text{MPWL}} \mathbb{E}\left[\frac{f(X_1)}{g(X_1)}\right] =$

$$= \int_0^1 \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$$

2° Igła Buffona.

Igła dł. l, deski szerokości a

$$\mathbb{P}[\text{igła przetnie deskę}] = \frac{2l}{a\pi}$$

Wykonujemy n doświadczeń:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{w } i\text{-tym rzucie igła przecina deskę} \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}X_i = \mathbb{P}[X_i = 1] = \frac{2l}{a\pi}$$

Z MPWL

$$\frac{\text{liczba przecięć}}{n} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \to \mathbb{E}X_1 = \frac{2l}{a\pi}$$

$$\pi \approx \frac{2ln}{ak}$$

W 1901 roku Mario Lazzarini wykonał 3408 rzutów i otrzymał

$$\pi \approx \frac{355}{113} = \underbrace{3.141592}_{\text{zgadza się}}9203$$

Przykład. Oblicz:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{x_1^3 + \dots + x_n^3}{x_1 + \dots + x_n} dx_1 \dots dx_n$$

Niech $\{X_n\}$ będzie ciągiem nzl. zm. los. o rozkładzie $\mathcal{U}([0,1])$. Wtedy

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{x_1^3 + \dots + x_n^3}{x_1 + \dots + x_n} dx_1 \dots dx_n = \mathbb{E}\left[\frac{X_1^3 + \dots + X_n^3}{X_1 + \dots + X_n}\right]$$

Z MPWL

$$\frac{X_1^3 + \dots + X_n^3}{X_1 + \dots + X_n} = \frac{\frac{X_1^3 + \dots + X_n^3}{n}}{\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}} \xrightarrow{p.n.} \frac{\mathbb{E}X_1^3}{\mathbb{E}X_1} = \frac{1}{2}$$

Podsumowując

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{x_1^3 + \dots + x_n^3}{x_1 + \dots + x_n} dx_1 \dots dx_n = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{X_1^3 + \dots + X_n^3}{X_1 + \dots + X_n}\right] \overset{\text{tw. Leb}}{=} \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} \frac{X_1^3 + \dots + X_n^3}{X_1 + \dots + X_n}\right] = \frac{1}{2}$$

<u>Przykład</u> [Dystrybuanta empiryczna]

Powtarzamy wielokrotnie pewne doświadczenie o nieznanym rozkładzie. Na podstawie otrzymanych wyników $X_1, \dots, X_n$ chcemy wyznaczyć ich dystrybuantę F. Definiujemy

$$\left[F_n(x,\omega) = \right] F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_n \le x\}}$$

Powyższa funkcja $F_n(x) = F_n(x,\omega)$ nazywa się **dystrybuantą empiryczną**.

<u>Tw. 8.5</u> (Glivienko – Cantelli)

Zachodzi

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \to 0 \text{ p.n.}$$

Zauważmy, że dla zm. los. $Y_k = \mathbb{1}_{\{X_n \le x\}}$ zachodzi $\mathbb{E}Y_k = \mathbb{P}[X_k \le x] = F(x)$

a z MPWL

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k \le x\}} = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n} \to \mathbb{E}Y_1 = F(x) \text{ p.n.}$$

Tw. 8.6 Jeżeli $\{X_n\}$ jest ciągiem n.z.l. o takim samym rozkładzie oraz istnieje stała c taka, że

$$\mathbb{P}\left[\lim_n \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = c\right] > 0$$

to $\mathbb{E}|X_1| < \infty$ oraz $c = \mathbb{E}X_1$

D-d. Z prawa 0-1 Kołmogorowa

$$\mathbb{P}\left[\lim_n \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = c\right] = 1$$

a stąd

$$\frac{X_n}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{S_{n-1}}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} \xrightarrow{0} \text{p.n.}$$

Zatem z p-stwem 1 zajdzie jedynie skończenie wiele zdarzeń $\{|X_n| > n\}$.

Lemat Borela-Cantelliego implikuje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[|X_1| > n] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[|X_n| > n] < \infty$$

a stąd wynika, że

$$\mathbb{E}|X_1| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[|X_1| > n] < \infty$$

z MPWL wynika więc

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \longrightarrow \mathbb{E}X_1 \quad \text{p.n.}$$

TW. 8.7, ciekawostka raczej

MPWL, Etemadi

Niech $\{X_n\}$ ciąg zm. los. które są PARAMI niezależne i mają jednakowy rozkład. Jeżeli $\mathbb{E}|X_1| < \infty$, to

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \longrightarrow \mathbb{E}X_1 \quad \text{p.n.}$$

12.04.2021 MPWL kontynuacja

Przykład Liczbę $a \in [0,1]$ nazywamy normalną przy podstawie d $(d \in \{2,3,\dots\})$ jeśli ma ona przedstawienie

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{d^n}, \quad \varepsilon_n \in \{0,1,\dots,d-1\}$$

takie, że

$$\frac{\#\{i : \varepsilon_i = k, \ i \le n\}}{n} \to \frac{1}{d}$$

dla każdego $k = \{0,1,\dots,d-1\}$

Problem: • czy istnieją liczby, które są normalne przy każdej podstawie?

TAK (Borel)

• wskaż liczbę, która jest normalna przy każdej podstawie d.

PROBLEM OTWARTY

TW. 8.8 (Borel) Prawie wszystkie liczby (względem miary Lebesgue'a) z przedziału $[0,1]$ są normalne względem każdej podstawy.

D-d. Niech

$$A_d = \{x \in [0,1] : x \text{ normalny przy pods. } d\}$$

$$A = \bigcap_{d=2}^{\infty} A_d$$

Rozważamy przestrzeń prob. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{Bor}([0,1]), \lambda)$. Wystarczy pokazać, że $\mathbb{P}[A_d] = 1$. Ustalmy d. Każdą l. $x \in [0,1]$ możemy zapisać w postaci

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n(x)}{d^n},$$

dla $\varepsilon_n(x) \in \{0, \ldots, d-1\}$. Wtedy $\varepsilon_n(x)$ jest ciągiem zm. los. o rozkładzie jednostajnym na $\{0, 1, \ldots, d-1\}$. Ustalmy $k \in \{0, \ldots, d-1\}$.

Niech $X_n(x) \begin{cases} 1 & \text{gdy } \varepsilon_n(x) = k \\ 0 & \text{w p.w.} \end{cases}$

Wówczas $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{P}[X_n = 1] = 1/d$ oraz z MPWL

$$\frac{\#\{i \leq n : \varepsilon_i(x) = k\}}{n} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{p.n.} \mathbb{E}X_1 = \frac{1}{d}$$

a zatem $\mathbb{P}[A_d] = 1$ oraz $\mathbb{P}[A] = 1$. ■

Tw. 8.9 (Kołmogorowa o 3 szeregach)

Ustalmy $c > 0$. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ jest zbieżny p.n. wtedy i tylko wtedy, gdy następujące 3 szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}X_n^{(c)}, \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}\, X_n^{(c)}, \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[|X_n| > c]$$

są zbieżne.

⌈ Dla $c > 0$ $X^{(c)} = \begin{cases} X & \text{dla } |X| \leq c \\ 0 & \text{dla } |X| > c \end{cases}$ ⌋

D-d. "$\Leftarrow$" Zał. że te 3 szeregi są zbieżne.

1. Ze zbieżności $\sum \mathbb{E}X_n^{(c)}$ i $\sum \mathrm{Var}\, X_n^{(c)}$ i tw. Kołmogorowa o dwóch

szeregach otrzymujemy, że $\sum X_n^{(c)}$ jest zbieżny.

2. Korzystamy z lematu Borela-Cantelliego. Skoro $\sum \mathbb{P}[|X_n| > c] < \infty$, to $\mathbb{P}[|X_n| > c \text{ i.o.}] = 0$, zatem z p-stwem 1 $|X_n| < c$ dla dużych n.

TW. 9.1 (de Moivre'a - Laplace'a) **[Centralne tw. graniczne]**

Niech $X_n = \pm 1$ z p-stwem $1/2$ - niez. zm. los. Z MPWL. $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$,

$$\frac{S_n}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{p.n.}$$

W szczególności $\forall \varepsilon > 0 \quad |S_n| < \varepsilon \cdot n$ dla dużych n.

- Jaka jest typowa odl. S_n od 0 dla dużych n?

• Jak należy znormalizować S_n, aby otrzymać coś nietrywialnego?

$$\frac{S_n}{a_n} \longrightarrow \text{coś} \neq 0$$

Chcielibyśmy policzyć $\mathbb{E}|S_n|$ - to jest żmudne. Łatwiej policzyć $\mathbb{E}S_n^2 = \operatorname{Var} S_n$ $= \operatorname{Var}(X_1 + \ldots + X_n) = \operatorname{Var} X_1 + \ldots + \operatorname{Var} X_n$ $= 1 + \ldots + 1 = n.$

$S_n^2 \approx n \rightarrow |S_n| \approx \sqrt{n}$. Typowa odl. S_n od zera jest rzędu $\sqrt{n}$

Chcemy opisać $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$. Czy ten ciąg ma jakąś granicę? Strukturę?

<u>Treść TW. 9.1</u> Niech $\{X_n\}$ będzie ciągiem niezal. zm. los. t.że $\mathbb{P}[X_n = 1] = \mathbb{P}[X = -1] = 1/2$ i niech $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

Wówczas, dla dowolnych $a < b$

$$\mathbb{P}\left[a \le \frac{S_n}{\sqrt{n}} \le b\right] \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

$\Phi(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ jest dystrybuantą rozkładu normalnego.

D-d. Przypomnienie: formuła Stirlinga:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot \frac{n^n}{e^n} \quad \text{gdy } n \to \infty$$

Zał. że $n = 2m$ (granica po n parzystych).

Wtedy $\mathbb{P}[S_{2m} = 2k+1] = 0$.

$$\mathbb{P}[S_{2m} = 2k] = \binom{2m}{m+k} \frac{1}{2^{2m}} = \frac{(2m)!}{(m+k)!(m-k)!\, 2^{2m}}$$

$$\overset{\text{Stirling}}{\sim} \frac{e^{m+k} e^{m-k}}{e^{2m}} \frac{(2m)^{2m}}{(m+k)^{m+k} (m-k)^{m-k}} \cdot \frac{\sqrt{4\pi m}}{\sqrt{2\pi(m+k)}\sqrt{2\pi(m-k)}} \cdot \frac{1}{2^{2m}}$$

$$= \left(\frac{m}{m+k}\right)^{m+k} \left(\frac{m}{m-k}\right)^{m-k} \sqrt{\frac{m}{(m+k)(m-k)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$$= \left(1 + \frac{k}{m}\right)^{-(m+k)} \left(1 - \frac{k}{m}\right)^{-(m-k)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi m}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{m}}\sqrt{1-\frac{k}{m}}}$$

$$= \left(1 - \frac{k^2}{m^2}\right)^{-m} \left(1 + \frac{k}{m}\right)^{-k} \left(1 - \frac{k}{m}\right)^{k} \frac{1}{\sqrt{m\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{m}}\sqrt{1-\frac{k}{m}}}$$

Ustalmy $x \in \mathbb{R}$. Jeżeli $2m \to \infty$, a $2k = x\sqrt{2m}$, to $\frac{k^2}{m} = \frac{x^2}{2}$, zatem

$$\left(1 - \frac{k^2}{m^2}\right)^{-m} \to e^{\frac{x^2}{2}},$$

$$\left(1 + \frac{k}{m}\right)^{-k} \to e^{-x^2},$$

$$\left(1 - \frac{k}{m}\right)^{k} \to e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Stąd wynika

$$\mathbb{P}[S_{2m} = 2k] \sim e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi m}}$$

Dalej

$$\mathbb{P}\left[a \le \frac{S_{2m}}{\sqrt{2m}} \le b\right] = \sum_{x \in [a,b] \cap \frac{2\mathbb{Z}}{\sqrt{2m}}} \mathbb{P}\left[S_{2m} = x\sqrt{2m}\right]$$

$$\sim \sum_{x \in [a,b] \cap \frac{2\mathbb{Z}}{\sqrt{2m}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2}{m}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \sim \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Zadanie: Jakie jest p-stwo, że w 100 rzutach kostką otrzymamy co najmniej 100 orłów? Rozwiązanie:

Niech $X_i = 1$ gdy w i-tym rzucie wypadł orzeł i $X_i = -1$ w p.p.

$S_{100} = X_1 + \ldots + X_{100}$, Chcemy $S_{100} = 20$.

Z tw. 9.1

$$\mathbb{P}[S_{100} \geq 20] = \mathbb{P}[S_{100}/10 \geq 2] \approx 1 - \Phi(2)$$
$$\approx 0{,}02.$$

Cel: Chcemy sformalizować zb. wg rozkładu.

Co znaczy ciąg miar μ_n zbieżny do miary μ?

Zbieżności wg rozkładu definiuje się na funkcjach ciągłych. Oznaczmy

$$C(\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ ciągłe i ogr.}\}$$

Definicja 9.2 Niech μ_n będzie ciągiem miar prob. na $\mathcal{B}or(\mathbb{R})$. Mówimy, że μ_n **zbiegają słabo** do miary prob. μ ($\mu_n \Rightarrow \mu$) jeżeli dla każdej funkcji $f \in C(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_n(dx) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(dx)$$

$$(f, \mu_n) \longrightarrow (f, \mu)$$

Przykład. $a_n \to a \in \mathbb{R}$, wtedy $\delta_{a_n} \Rightarrow \delta_a$.

Niech $f \in C(\mathbb{R})$.

$$\int_{\mathbb{R}} f\,d\delta_{a_n} = f(a_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(a) = \int_{\mathbb{R}} f\,d\delta_a$$

Przykład $\mu_n(\{\frac{k}{n}\}) = \frac{1}{n}$, $k \in \{1, \dots, n\}$

Niech $f \in C(\mathbb{R})$.

$$\int_{\mathbb{R}} f\,d\mu_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{[0,1]} f\,d\lambda$$

TW. 9.3 Niech μ_n, μ będą miar. prob. na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R}))$. NWSR

1° $\mu_n \Rightarrow \mu$

2° Dla $f \in C(\mathbb{R})$ i jedn. ciągłej

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu_n \xrightarrow{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu$$

3° Dla każdego domkniętego $F \subset \mathbb{R}$

$$\limsup_{n \to \infty} \mu_n(F) \leq \mu(F)$$

4° Dla każdego otwartego $G \subset \mathbb{R}$

$$\liminf_{n \to \infty} \mu_n(G) \geq \mu(G)$$

5° Dla każdego $A \in \mathcal{B}or(\mathbb{R})$ t. że $\mu(\partial A) = 0$

$$\lim_{n \to \infty} \mu_n(A_n) = \mu(A)$$

brzeg A

19.05.2021

D-d. tw. 9.3

- "2 => 3" Ustalmy zbiór domknięty F. Dla $\varepsilon > 0$ oznaczamy przez

$$F_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R} : d(x, F) < \varepsilon\}$$

ε-otoczkę zbioru F. Ustalmy $\delta > 0$ i weźmy $\varepsilon > 0$ taki, że

$$\mu(F_\varepsilon) < \mu(F) + \delta .$$

Taki ε istnieje, gdyż z domkniętości F: $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_{1/n}$, a z lematu o ciągłości miary $\mu(F_{1/n}) \to \mu(F)$. Niech f będzie jednostajnie ciągłą funkcją taką, że

$$\mathbb{1}_F \leqslant f \leqslant \mathbb{1}_{F_\varepsilon}$$

(można np. przyjąć $f(x) = \phi(d(x,F)/\varepsilon)$, dla $\phi(t) = 1$, $1-t$, 0 dla $t \leqslant 0$, $t \in (0,1)$, $t \geqslant 1$)

Wówczas

$$\limsup \mu_n(F) \leq \limsup \int f \, d\mu_n = \int f \, d\mu \leq \mu(F_\varepsilon)$$
$$\leq \mu(F) + \delta$$

Z dowolności δ mamy tezę.

- "4 ⇒ 1" Załóżmy, że $g \in C(\mathbb{R})$ oraz $g \geq 0$.

Wówczas korzystając kolejno z:

tw. Fubiniego, lematu Fatou oraz pkt. 4:

$$\liminf \int_{\mathbb{R}} g(x) \mu_n(dx) = \liminf \int_{\mathbb{R}} \int_0^{g(x)} dt \, \mu_n(dx)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \liminf \int_0^{\infty} \int_{\{x: g(x) > t\}} \mu_n(dx) \, dt$$

$$= \liminf \int_0^{\infty} \mu_n\{x : g(x) > t\} \, dt$$

$$\overset{\text{Fatou}}{\geq} \int_0^{\infty} \liminf \mu_n\{x : g(x) > t\} \, dt$$

g ciągła, więc $\{x : g(x) > t\}$ otwarty

$$\overset{\text{pkt. 4}}{\geq} \int_0^{\infty} \mu\{x : g(x) > t\} \, dt$$

$$= \dots = \int_{\mathbb{R}} g(x) \mu(dx)$$

• "3, 4 ⇒ 5" Bierzemy A t. że $\mu(\partial A) = 0$.

$$0 = \mu(\partial A) = \mu(\bar{A}) - \mu(\operatorname{Int} A) \Rightarrow \mu(\bar{A}) = \mu(\operatorname{Int} A).$$

$$\mu(\bar{A}) \overset{3)}{\geqslant} \limsup \mu_n(\bar{A}) \overset{A \subseteq \bar{A}}{\geqslant} \limsup \mu_n(A)$$

$$\geqslant \liminf \mu_n(A) \overset{A \supseteq \operatorname{Int} A}{\geqslant} \liminf \mu_n(\operatorname{Int} A)$$

$$\geqslant \mu(\operatorname{Int} A)$$

Ale $\mu(\bar{A}) = \mu(\operatorname{Int} A)$, zatem

$$\lim \mu_n A = \mu \bar{A} = \mu \operatorname{Int} A = \mu A.$$

• "5 ⇒ 3" Ustalmy domknięty F. Definiujemy F_ε. Patrzymy na ∂F_ε - są to zbiory rozłączne $(F_{\varepsilon_1} \cap F_{\varepsilon_2} = \emptyset$ gdy $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2)$ $\mu(\partial F_\varepsilon) > 0$ jedynie dla przeliczalnie wielu ε: $F^c \supset \bigcup_{\varepsilon > 0} \partial F_\varepsilon$,

$$\mu\Big(\bigcup_{\varepsilon > 0} \partial F_\varepsilon\Big) \leq \mu(F^c) \leq 1,$$

$$\| $$

$$\sum_{\varepsilon > 0} \partial F_\varepsilon \leftarrow \text{nieprzeliczalnie wiele,}$$

więc tylko przeliczalnie wiele może być > 0.

Istnieje więc ciąg $\{\varepsilon_k\}$ t.że $\varepsilon_k \to 0$ oraz $\mu(\partial F_{\varepsilon_k}) = 0$. Ustalmy k.

$$\limsup \mu_n(F) \leq \limsup \mu_n(F_{\varepsilon_k}) \overset{5.}{=} \mu(F_{\varepsilon_k})$$

Gdy $k \to \infty$ z lematu o ciągłości miary $\mu(F_{\varepsilon_k}) \longrightarrow \mu(F)$. $\blacksquare$

<u>TW. 9.4</u> Jeżeli μ, ν są miarami prob. na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R}))$ t. że dla każdej funkcji $f \in C(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} f \, d\nu$$

to $\mu = \nu$, tj. $\mu(A) = \nu(A)$ dla każdego $A \in \mathcal{B}or(\mathbb{R})$.

<u>Wniosek</u> Granica w def. słabej zbieżności jest jednoznacznie wyznaczona.

D-d. Z lematu Dynkina o π-λ układach wystarczy pokazać, że $\mu(F) = \nu(F)$ dla dow. dom. $F \in \mathcal{B}or(\mathbb{R})$. Istotnie, niech $\mathcal{K}$ będzie rodziną wszystkich domkniętych zbiorów borelowskich, a

$$\mathcal{L} = \{A \in \mathcal{B}or(\mathbb{R}) : \mu(A) = \nu(A)\}.$$

$\mathcal{K}$ jest π-układem, $\mathcal{L}$ jest λ-układem. Niech $\mu_n = \mu$. Wtedy z zał. $\mu_n \Rightarrow \nu$, z tw. 9.3 pkt. 3 mamy

$$\mu(F) = \limsup \mu_n(F) \leq \nu(F)$$

Analogicznie pokazujemy $\nu(F) \leq \mu(F)$ co daje równość obu miar

$$\left(\mathcal{K} \subset \mathcal{L} \Rightarrow \underset{\mathcal{B}or(\mathbb{R})}{\underset{\parallel}{\sigma(\mathcal{K})}} \subset \mathcal{L} \right)$$

$\blacksquare$

TW. 9.5 Niech $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$, μ będą rozkładami na $\mathbb{R}$ o dystrybuantach $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, F. Wtedy $\mu_n \Rightarrow \mu$ wtedy i tylko wtedy, gdy $F_n(x) \to F(x)$ dla każdego x, w którym F ciągła.

Wniosek Niech $\{X_n\}$ i.i.d., $X_n = \pm 1$ z pstwem $1/2$. $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Z tw. Moivre'a-Laplace'a

$$\mu_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$\left(\overset{\shortparallel}{\mu(dx)}, \ \mu(A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)$$

bo $\mathbb{P}\left[\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq b\right] \to \Phi(b)$

D-d. TW 9.5

- "$\Rightarrow$" zał. $\mu_n \Rightarrow \mu$. Ustalmy x - pkt. ciągłości F.

Weźmy $A = (-\infty, x]$, $\partial A = \{x\}$, $\mu(\{x\}) = 0$.
(bo x nie jest atomem).

$$F_n(x) = \mu_n(A) \xrightarrow{\text{z pop. tw.}} \mu(A) = F(x)$$

• "$\Leftarrow$" Załóżmy, że $F_n \to F$ dla x w których F ciągła. Pokażemy $\liminf \mu_n G \geq \mu(G)$ dla każdego otwartego $G \subset \mathbb{R}$.

Ustalmy $G \subset \mathbb{R}$, otwarty. Zbiór G możemy zapisać w postaci $G = \bigcup_{i=1}^{N} I_k$, gdzie $I_k = (a_k, b_k)$ i są rozłączne. (może być $N = \infty$)

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wybieramy a_k', b_k':

- a_k', b_k' były pkt. ciągłości F
- $F(b_k') - F(a_k') = \mu((a_k', b_k'))$
$$\geq \mu(I_k) - \varepsilon/2^k$$

Ustalmy m.

$$\liminf \mu_n(G) \geq \liminf \mu_n\left(\bigcup_{i=1}^{m} I_k\right)$$
$$\geq \sum_{i=1}^{m} \liminf \mu_n((a_k', b_k'))$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \liminf (F_n(b_k') - F_n(a_k'))$$
$$\overset{\text{z zał.}}{=} \sum_{i=1}^{m} F(b_k') - F(a_k')$$
$$\geq \sum_{i=1}^{m} \mu(I_k) - \varepsilon/2^k \geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} I_k\right) - \varepsilon$$

Gdy przejdziemy z $m \to \infty$, to z lematu o ciągłości miary

$$\liminf \mu_n(G) \geq \mu(G) - \varepsilon .$$

Z dowolności ε, przy $\varepsilon \to 0$

$$\liminf \mu_n(G) \geq \mu(G).$$

Z popr. tw.

$$\mu_n \Rightarrow \mu .$$

■

<u>Przykład</u> Niech $a_n \to a \in \mathbb{R}$. Wtedy $\delta_{a_n} \Rightarrow \delta_a$, bo dystrybuanta F miary δ_a ma tylko jeden punkt nieciągłości: a. Dla każdego $x \neq a$ $F_n(x) \to F(x)$.

<u>Przykład</u> Niech $\mu(\{\frac{k}{n}\}) = 1/n$ i $\mu = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)dx$. Wówczas zbieżność $\mu_n \Rightarrow \mu$ wynika z popr. tw.

<u>Definicja 9.6</u> Mówimy, że ciąg zm. los. $\{X_n\}$ zbiega **według rozkładu** do zmiennej losowej X $(X_n \xrightarrow{d} X)$, jeżeli $\mu_{X_n} \Rightarrow \mu_X$ lub równoważnie $F_n(x) \to F(x)$ dla punktów ciągłości F.

Często będziemy używać nieco innej notacji i np. pisać $X_n \xrightarrow{d} N(0,1)$ co oznacza, że X_n zbiegają wg rozkładu do pewnej zmiennej losowej o rozkładzie $N(0,1)$.

<u>Uwaga</u> $X_n \xrightarrow{d} X \iff \mathbb{E}f(X_n) \to \mathbb{E}f(X)$ dla każdej $f \in C(\mathbb{R})$.

<u>Przykład</u> Niech $\{X_n\}$ będzie ciągiem niezależnych zm. los. t.że $\mathbb{P}[X_n = \pm 1] = 1/2$ i niech $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Wówczas

$$S_n/\sqrt{n} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

26.05.2021 Przypomnienie:

Ciąg miar $\{\mu_n\}$ zbiega słabo do miary μ jeżeli ($\mu_n \Rightarrow \mu$)

$$\forall f \in C(\mathbb{R}) \quad \int_{\mathbb{R}} f(x)\,d\mu_n(x) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x)\,d\mu(x)$$

ciągłe i ograniczone

($X_n \xrightarrow{d} X$)

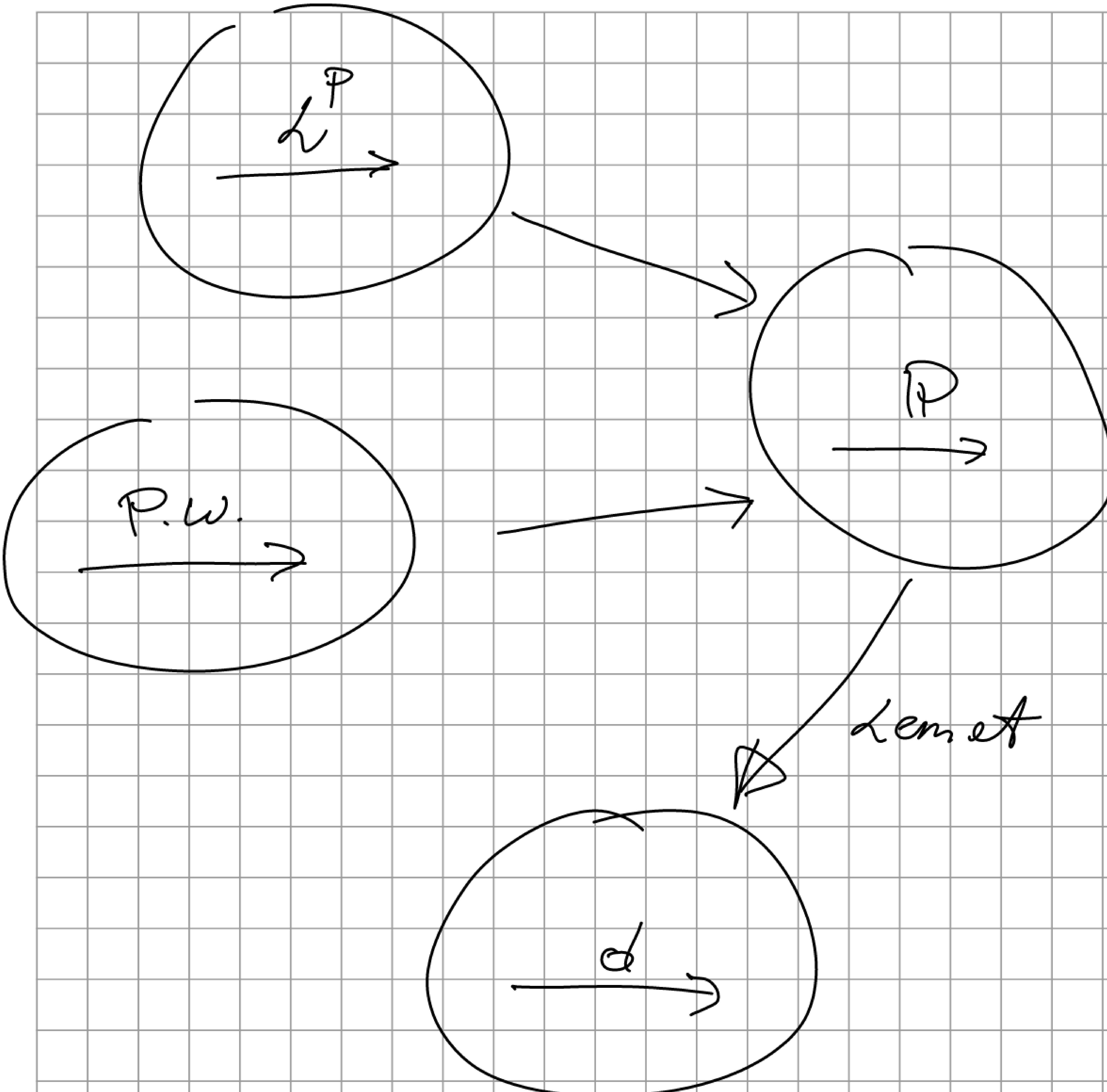
Ciąg zm. los. $\{X_n\}$ zb. wg rozkładu do zm. los. X jeżeli $\mu_{X_n} \Rightarrow \mu_X$, tzn.

$$\forall f \in C(\mathbb{R}) \quad \mathbb{E} f(X_n) \longrightarrow \mathbb{E} f(X).$$

Lemat 9.7 $\{X_n\}, \{Y_n\}$ – ciągi zm. los.

Wtedy:

- jeżeli $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, to $X_n \xrightarrow{d} X$
- jeżeli $X_n \xrightarrow{d} X$ i $\mathbb{P}[X = c] = 1$, to $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$
- jeżeli $X_n \xrightarrow{d} X$, to $aX_n + b \xrightarrow{d} aX + b$, dla $a, b \in \mathbb{R}$
- jeżeli $X_n \xrightarrow{d} X$, $Y_n \xrightarrow{d} c$, to $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$ oraz $X_n Y_n \xrightarrow{d} cX$



<u>Przykład.</u> Zbieżność wg rozkładu nie implikuje zb. wg. p-stwa.

a) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1], Bor([0,1]), \lambda)$,

$$X_k = \begin{cases} \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]} & \text{gdy } k \text{ nieparzyste} \\ \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]} & \text{gdy } k \text{ parzyste} \end{cases}$$

X_k ma rozkład $\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$, więc

$\mu_{X_n} \Rightarrow \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$, ale nie

ma zb. wg. p-stwa.

b) $Y \sim N(0,1)$, $X_n = (-1)^n Y$

Tw. 9.8 (Skorochoda)

Zał. że $\{X_n\}$ jest ciągiem zm. los. określonych na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i t. że $X_n \xrightarrow{d} X$ dla pewnej zm. los X. Istnieją zm. los $\{X_n'\}$ oraz X' określone na $((0,1), \mathcal{B}or(0,1), \lambda)$ t. że $X_n \overset{d}{=} X_n'$, $X \overset{d}{=} X'$ (a więc w szczególności $X_n' \xrightarrow{d} X'$) oraz

$$X_n' \longrightarrow X' \text{ p.n.}$$

Def. 9.9 **Dystrybuanta ułomna** to funkcja F spełniająca warunki:

- F jest niemalejąca
- $0 \leq F(t) \leq 1$
- F jest prawostronnie ciągła
- $\lim_{t\to\infty} F(t) - \lim_{t\to-\infty} F(t) = p \leq 1$.

Rozważmy rodzinę dyst. ułomnych $\{F_n\}$ zbieżnych do F (czyli $F_n(x) \to F(x)$ dla każdego x - punktu ciągłości F)

Tw. 9.10 (Helleya o wyborze)

Każdy ciąg dystrybuant zawiera podciąg słabo zbieżny do dystrybuanty ułomnej:

$\{F_n\}$ dyst., $\exists \{n_k\}$ t. że $F_{n_k} \to F$ dyst. uł.

D-d. Idea: chcemy wybrać $\{F_{n_k}\}$ który będzie zbieżny punktowo we wszystkich liczbach wymiernych.

Ustawmy l. wymierne w ciąg $w_1, w_2, w_3, \ldots$

Krok 1

Ciąg $\{F_n(w_1)\}$ jest ograniczony (bo $F_n \in [0,1]$)

Z tw. Bolzano - Weierstrassa ten ciąg zawiera podciąg zbieżny $F_{n_{1,k}}$:

$$\lim_{n \to \infty} F_{n_{1,k}}(w_1) =: F_0(w_1)$$

Krok 2

Ciąg $\{F_{1,k}(w_2)\}_k$ jest ograniczony, więc zawiera podciąg zbieżny $\{F_{2,n}(w_2)\}$

$$\lim_{n\to\infty} F_{2,n}(w_2) =: F_0(w_2)$$

Krok 3

Analogicznie do poprzednich

$$\lim_{n\to\infty} F_{3,n}(w_3) =: F_0(w_3)$$

$\vdots$

$$\begin{array}{lllll}
F_{1,1}(w_1) & F_{1,2}(w_1) & F_{1,3}(w_1) \ \dots & \to & F_0(w_1) \\
F_{2,1}(w_2) & F_{2,2}(w_2) & F_{2,3}(w_2) \ \dots & \to & F_0(w_2) \\
F_{3,1}(w_3) & F_{3,2}(w_3) & F_{3,3}(w_3) \ \dots & \to & F_0(w_3) \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Wybieramy podciąg $\{F_{n_{k,k}}\}$ - podciąg dystrybuant, który spełnia

$$\lim_{k\to\infty} F_{n_{k,k}}(w) = F_0(w) \quad \forall w \in \mathbb{Q}$$

Definiujemy F_0 na $\mathbb{R}$:

$$F_0(t) = \inf\{F_0(w) : t<w,\ w\in\mathbb{Q}\}$$

$\blacksquare$

<u>Przykład.</u> $F_n(x) = \begin{cases} 0 & x<n \\ 1 & x\geq n \end{cases}$

Zauważmy, że $F_n(x) \longrightarrow 0$ gdy $n\to\infty$, więc $\{F_n\}$ zb. słabo do dystrybuanty ułomnej $F\equiv 0$ $\quad(\delta_n \Rightarrow 0)$

<u>Przykład</u> $F_n(x) = \begin{cases} 0 & x<-n \\ 1 & x\geq n \end{cases}$

$\{F_n\}$ zbiega do $F\equiv 1$ - dyst. ułomna.

<u>Problem</u>: Znaleźć warunki, przy których dystrybuanta graniczna jest prawdziwą dystrybuantą.

<u>Def. 9.11</u> Rodzina $\{\mu_t\}_{t\in T}$ rozkładów p-stwa na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R}))$ nazywana jest ciasną (jędrną, ang. tight), jeżeli

dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór zwarty K t. że

$$\mu_t(K) > 1-\varepsilon, \quad \forall t \in T$$
$$\left(\mu_t(K^c) < \varepsilon\right)$$

(np. $K = [-N, N]$ dla pewnego "dużego" N.)

<u>Przykład.</u> Niech $\{X_t\}_{t\in T}$ będzie rodziną zm. los. t. że istnieje $\delta > 0$:

$$\sup_{t \in T} \mathbb{E}|X_t|^{\delta} = M < \infty$$

Wtedy rodzina $\{\mu_{X_t}\}_{t\in T}$ jest ciasna.

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wtedy dla $t \in T$

$$\mu_t\left([-n,n]^c\right) = \mathbb{P}\left[|X_t| > n\right] \leq \mathbb{P}\left[|X_t|^{\delta} > n^{\delta}\right] \leq$$
$$\leq \frac{\mathbb{E}|X_t|^{\delta}}{n^{\delta}} \leq \frac{M}{n^{\delta}} < \varepsilon \quad \text{dla dużych } n.$$

<u>Tw. 9.12</u> (Prochorowa)

Rodzina rozkładów p-stwa jest ciasna

$$\Updownarrow$$

z każdego ciągu elem. tej rodziny można wybrać podciąg słabo zbieżny do pewnego rozkładu p-stwa.

D-d. "$\Rightarrow$" Zał. $\{F_t\}_{t\in T}$ jest ciasna.

Z tw. Helleya istnieje $\{F_{n_k}\}$ do pewnej ułomnej dystrybuanty F. Pokażemy, że F jest dystrybuantą. Ustalmy $\varepsilon > 0$.

Z ciasności wynika, że istnieje M t.że $\mu_{n_k}([-M, M]) > 1-\varepsilon$. Możemy założyć, że $M, -M$ ~~są~~ pkt. ciągłości F oraz F_{n_k} dla każdego k. Wówczas

$$F_{n_k}(M) - F_{n_k}(-M) = \mu_{n_k}([-M, M]) > 1-\varepsilon$$

$$\Big\downarrow k\to\infty$$

$$F(M) - F(-M)$$

Pokazaliśmy, że $\forall \varepsilon > 0\ \exists M_\varepsilon\ (F(M_\varepsilon) - F(M_\varepsilon) < 1-\varepsilon)$

Zatem $\lim\limits_{M_\varepsilon\to\infty} F(M_\varepsilon) - F(-M_\varepsilon) = 1$.

Zatem F jest prawdziwą dystrybuantą.

"$\Leftarrow$" ćwiczenie. ■

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow$ funkcja tworząca $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow$ funkcje charakterystyczne (transformata Fouriera) $\Big\}$ Centralne tw. graniczn

Def. 10.1 **Funkcją charakterystyczną** zmiennej losowej X nazywamy funkcję $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zdefiniowaną wzorem

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\, e^{itX} = \mathbb{E}\left[\cos(tX) + i\sin(tX)\right]$$

$$= \mathbb{E}\cos tX + i\,\mathbb{E}\sin tX$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{its}\, d\mu_X(s)$$

$\left[\text{Z analizy } \hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)\,dx\right]$

Przykład.

1) $X = a$ p.w., $\varphi_X(t) = \mathbb{E}e^{itX} = \mathbb{E}e^{ita} = e^{ita}$

2) $X \sim \mathcal{U}(0,1)$, $\varphi_X(t) = \int_0^1 e^{its}\,ds = \int_0^1 \cos ts\,ds$

$$+ i\int_0^1 \sin ts\,ds = \frac{\sin ts}{t}\Big|_0^1 - i\frac{\cos ts}{t}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\sin t}{t} - \frac{i\cos t}{t} + \frac{i}{t} = \frac{1}{it}\left(i\sin t + \cos t - 1\right) = \frac{e^{it}-1}{it}$$

(dla $t=0$ to nie działa, ale łatwo wprost policzyć tę całkę)

3) $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, wtedy $\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$. Jak to policzyć?

1) Metoda z analizy zespolonej

2) $$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$+ \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\sin(tx) e^{-\frac{x^2}{2}}}_{\text{funkcja nieparzysta}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Różniczkujemy po t:

$$\varphi'(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \sin tx \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin tx \, e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{t}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= -t\varphi(t)$$

otrzymaliśmy równanie $\varphi' = -t\varphi$, $\varphi(0) = 1$.

$$\frac{d\varphi}{dt} = -t\varphi \to \int \frac{d\varphi}{\varphi} = -\int t\, dt \to \log|\varphi| = -\frac{t^2}{2} + c$$

$$\varphi = C \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad C = 1.$$

Podsumowując:

- $\delta_a \to e^{ita}$
- $\mathcal{U}(0,1) \longrightarrow \frac{e^{it}-1}{it}$
- $\mathcal{N}(0,1) \to e^{-\frac{t^2}{2}}$

Tw. 10.2 Niech φ_X będzie f. char. zm. los. X.

Wtedy:

1) $\varphi_X(0) = 1$
2) $|\varphi_X(t)| \leqslant 1$
3) $\varphi_X(t) = \overline{\varphi_X(-t)}$ $\left(\mathbb{E}e^{itX} = \mathbb{E}\overline{e^{-itX}} = \overline{\mathbb{E}e^{-itX}} = \overline{\varphi(-t)}\right)$
4) $\varphi_X(t)$ jest rzeczywist $\Leftrightarrow$ rozkład X jest symetryczny
5) φ_X jest jednostajnie ciągła.
6) $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb}\varphi_X(at)$

D-d 5) $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x,y\ |x-y|<\delta \Rightarrow |\varphi_X(x)-\varphi_X(y)|<\varepsilon$

$|\varphi_X(t+h) - \varphi_X(y)| = |\mathbb{E}e^{i(t+h)X} - \mathbb{E}e^{itX}| = |\mathbb{E}[e^{itX}(e^{ihX}-1)]|$

$\leqslant \mathbb{E}|e^{ihX}-1| \longrightarrow 0$ gdy $h \to 0$.

б) $\varphi_{aX+b}(t) = \mathbb{E}\, e^{it(aX+b)} = e^{itb}\, \mathbb{E}\, e^{i(at)X} = e^{itb}\, \varphi_X(at)$ $\blacksquare$

9.06.2021 Chcemy badać ciągi zm. los. $\{X_n\}$ iid. i ich sumy $X_1 + \ldots + X_n = S_n$.

Pytamy, czy S_n zbiega (po odpowiednim znormalizowaniu) i w jakim sensie?

TW. 10.3 (Bochnera)

Funkcja φ jest f. char. pewnego rozkładu p-stwa wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest ciągła, $\varphi(0) = 1$ i jest dodatnio określona, tzn. dla każdego ciągu $t_1, \ldots, t_n$ oraz $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ zachodzi

$$\sum_{k,j \le n} \varphi(t_k - t_j) z_k \overline{z_j} \geq 0$$

D-d. "$\Rightarrow$" $\sum_{k,j \le n} \varphi(t_k - t_j) z_k \overline{z_j} = \sum_{k,j} \mathbb{E}\left[e^{i(t_k - t_j)X} z_k \overline{z_j}\right]$

$$= \mathbb{E}\left[\sum_{k,j} e^{it_kX} z_k \left(\overline{e^{it_jX} z_j}\right)\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_k e^{it_kX} z_k\right)\left(\overline{\sum_j e^{it_jX} z_j}\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\left|\sum_k e^{it_kX} z_k\right|^2\right] \geq 0 \qquad \left(z\overline{z} = |z|^2\right)$$

TW. 10.4 Załóżmy, że X jest zm. los. taką, że $\mathbb{E}|X_k|^k < \infty$ dla pewnej liczby naturalnej k. Wtedy f. char. φ_X ma k-tą ciągłą pochodną oraz

$$\varphi_X^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}\left[e^{itX} X^k\right].$$

W szczególności

$$\varphi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}\left[X^k\right].$$

Ponadto

$$\varphi_X(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(it)^k}{k!} \cdot \mathbb{E}X^k + o\left(|t|^n\right)$$

gdzie ostatni składnik spełnia

$$\lim_{t \to 0} \frac{o(|t|^n)}{|t|^n} = 0.$$

"Dowód" $\varphi_X(t) = \mathbb{E}e^{itX}$. Jak zróżniczkować φ_X?

Krok. 1 Należy pokazać, że $\varphi_X'(t) = \mathbb{E}\left[\left(e^{itX}\right)'\right]$

Krok. 2 $\varphi_X'(t) = \mathbb{E}\left[iXe^{itX}\right]$

Dowód kroku 1.

Dla $k=1$ mamy

$$\frac{\varphi_X(t+h)-\varphi_X(t)}{h} = \mathbb{E}\left[\frac{e^{i(t+h)X}-e^{itX}}{h}\right] = \mathbb{E}\left[e^{itX}\frac{e^{ihX}-1}{h}\right].$$

Zauważmy, że $\lim_{h\to 0}\frac{e^{ihX}-1}{h} = iX$ $\left(\text{pochodna } e^{itX}\right)$

Chcemy użyć tw. Lebesgue'a. W tym celu piszemy

$$\left|e^{itX}\cdot\frac{e^{ihX}-1}{h}\right| \leq \frac{|\cos(hX)-1|}{|h|}+\frac{|\sin(hX)|}{|h|}$$

$$= |X|\cdot\left(\underbrace{\sin\frac{hX}{2}\cdot\frac{\sin\left(\frac{hX}{2}\right)}{h|X|/2}}_{\leqslant 1}+\underbrace{\frac{|\sin hX|}{|h||X|}}_{\leqslant 1}\right) \leq 2|X|$$

Z zał. $\mathbb{E}|X|<\infty$ możemy odwołać się do tw. Lebesgue'a i stąd

$$\varphi_X'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{\varphi_X(t+h)-\varphi_X(t)}{h} = \mathbb{E}\left[e^{itX}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{e^{ihX}-1}{h}\right]$$

$$= i\,\mathbb{E}\left[e^{itX}\cdot X\right]$$

TW. 10.5 Jeżeli X, Y są nzl. zm. los. to

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$$

D-d. $\varphi_{X+Y}(t) = \mathbb{E}e^{it(X+Y)} = \mathbb{E}e^{itX}\mathbb{E}e^{itY} = \varphi_X(t)\varphi_Y(t).$ ■

TW. 10.6 (o jednoznaczności)

Jeżeli rozkłady μ i ν na $\mathbb{R}$ mają równe funkcje charakterystyczne

$$\varphi_\mu(t) = \varphi_\nu(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

to $\mu = \nu$.

D-d. Pokażemy, że

$$\left.\begin{aligned} &\forall f \in C(\mathbb{R}) \\ &\int_{\mathbb{R}} f\,d\mu = \int_{\mathbb{R}} f\,d\nu \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mu = \nu$$

Narzędzie: tw. Weierstrassa: jeżeli f jest funkcją ciągłą i okresową na $\mathbb{R}$ (o okr. T, $f(x+T) = f(x)$) to możemy f przybliżyć ciągiem wiel. tryg. o tym samym okresie co f.

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(a_k \sin\frac{2\pi k x}{T} + b_n \cos\frac{2\pi k x}{T} \right)$$

$$f_n \rightrightarrows f$$

Wiemy: $\varphi_\mu(t) = \varphi_\nu(t)$, czyli

$$\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, d\nu(x)$$

$$\sin tx = \frac{e^{itx} - e^{-itx}}{2i}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \sin tx\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \sin tx\, d\nu(x)$$

$$\int_{\mathbb{R}} \cos tx\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \cos tx\, d\nu(x)$$

Zatem również

$$\int f_n(x)\, d\mu(x) = \int f_n(x)\, d\nu(x)$$ dla każdego wiel. tryg. f_n

Z tw. Weierstrassa mamy również

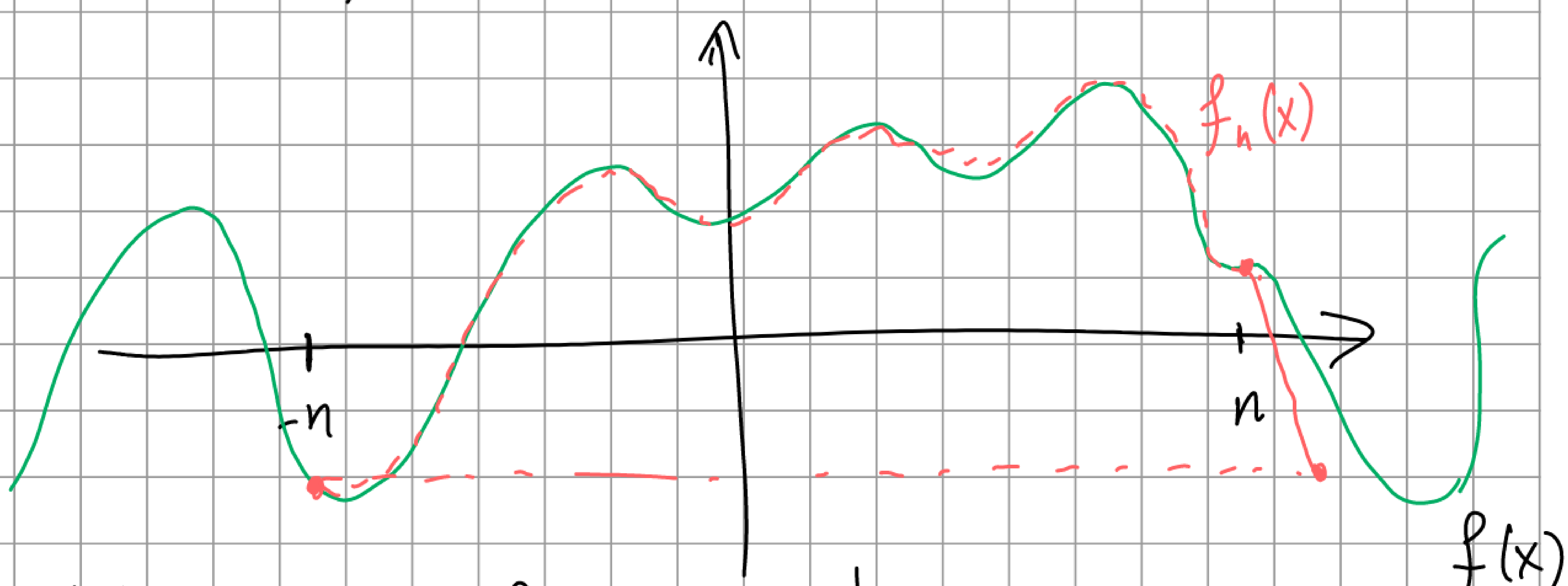
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\nu(x)$$

dla każdej f ciągłej i okresowej.

Niech $f \in C(\mathbb{R})$. Istnieje ciąg $\{f_n\}$ funkcji ciągłych i okresowych.

1) $f(x) = f_n(x)$ dla $x \in [-n, n]$

2) $\sup |f_n(x)| \leq \sup |f(x)|$



$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\mu(x) - \int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\nu(x) \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)|\, d\mu(x)$$

$$+ \left| \int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\mu(x) - \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, d\mu(x) \right| + \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)|\, d\nu(x)$$

$$\leq 2\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \left(\mu\left((-n,n)^c\right) + \nu\left((-n,n)^c\right)\right) \longrightarrow 0$$

$\blacksquare$

<u>Przykład</u> Jeśli X_1, X_2 są niezależne i mają rozkłady $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$, $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$, to X_1+X_2 ma rozkład $\mathcal{N}(m_1+m_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

Istotnie, możemy napisać $X_j = m_j + \sigma_j Y_j$, gdzie Y_j ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$. Możemy obliczyć φ_{X_j}:

$$\varphi_{X_j}(t) = \varphi_{m_j+\sigma_j Y_j}(t) = e^{im_j}\varphi_{Y_j}(\sigma_j t) = e^{im_j t}e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

zatem

$$\varphi_{X_1+X_2}(t) = \varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t) = e^{im_1 t}e^{-\frac{\sigma_1^2 t^2}{2}}\cdot e^{im_2 t}e^{-\frac{\sigma_2^2 t^2}{2}} = e^{i(m_1+m_2)t}e^{-\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2}{2}}$$

Powyższa funkcja jest f. char. $\mathcal{N}(m_1+m_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$. Z tw. o jednoznaczności wynika więc, że X_1+X_2 ma taki rozkład.

TW, 10.7 (Lévy, Cramér)

Niech μ_n będą rozkładami na $\mathbb{R}$. Wówczas

1. Jeżeli $\mu_n \Rightarrow \mu$, to dla każdego t

$$\varphi_{\mu_n}(t) \longrightarrow \varphi_\mu(t).$$

2. Jeżeli $\varphi_{\mu_n}(t) \longrightarrow \varphi(t)$ dla pewnej funkcji φ ciągłej w 0, to φ jest funkcją char. pewnego μ t.że $\mu_n \Rightarrow \mu$.

D-d.

1. $$\varphi_{\mu_n}(t) = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx)\,d\mu_n(x) + i\int_{\mathbb{R}} \sin(tx)\,d\mu_n(x)$$

$$\longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \cos(tx)\,d\mu(x) + i\int \sin(tx)\,d\mu(x) = \varphi_\mu(t)$$

2. Krok 1. Pokażemy, że jeżeli $\varphi_{\mu_n} \to \varphi$ i φ jest ciągła w 0, to rodzina miar $\{\mu_n\}$ jest ciasna.

Ustalmy $x \in \mathbb{R}$, $u > 0$ i zauważmy

$$\int_{-u}^{u} (1 - e^{itx})\,dt = 2u - \int_{-u}^{u} \cos(tx)\,dt = 2u - \frac{2\sin(ux)}{x}$$

Podzielmy obie strony przez u i scałkujmy po x względem miary μ_n. Wtedy

$$\frac{1}{u}\int_{-u}^{u}\left(1-\varphi_{\mu_n}(t)\right)dt = 2\int_{\mathbb{R}}\left(1-\frac{\sin ux}{ux}\right)d\mu_n(x)$$

$$\geqslant 2\int_{\{|x|\geqslant\frac{2}{u}\}}\left(1-\frac{1}{u|x|}\right)d\mu_n(x) \geqslant \mu_n\left(\{x: |x| > \tfrac{2}{u}\}\right).$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Z ciągłości $\varphi(t)$ w 0 istnieje małe u t. że

$$\frac{1}{u}\int_{-u}^{u}\left(1-\varphi(t)\right)dt < 2\varepsilon .$$

Ze zbieżności $\varphi_n(t)\to\varphi(t)$ wynika, że dla dużych n

$$\frac{1}{u}\int_{-u}^{u}\left(1-\varphi_n(t)\right)dt < 3\varepsilon .$$

Zatem $\mu_n\left(\{x: |x| > \frac{2}{u}\}\right) < 3\varepsilon$ a to implikuje ciasność $\{\mu_n\}$.

Krok 2. Chcemy pokazać, że istnieje μ t. że $\mu_n \Rightarrow \mu$. oraz $\varphi_\mu = \varphi$. Z tw. Prochorowa ciąg $\{\mu_n\}$ zawiera podciąg $\{\mu_{n_k}\}$ słabo zbieżny $\mu_{n_k} \Rightarrow \mu$. Ponieważ $\mu_{n_k} \Rightarrow \mu$ to z pkt. 1

$$\begin{tikzcd} \varphi_{n_k}(t) \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & \varphi_\mu(t) \\ & \varphi(t) \end{tikzcd}$$

, a zatem $\varphi_\mu = \varphi$.

Pozostaje $\mu_n \Rightarrow \mu$. Zał. nie wprost, że $\mu_n \not\Rightarrow \mu$, tzn. μ_n zawiera podciąg $\{\mu_{m_k}\}$ niezbieżny do μ. Ten podciąg $\{\mu_{m_k}\}$ jest ciasny, z tw. Prochorowa zawiera podciąg zbieżny $\{\mu_{m'_k}\}$ do pewnej miary μ_0. Z pkt. 1 $\varphi_\mu(t) \leftarrow \varphi_{\mu_{m'_k}}(t) \rightarrow \varphi_{\mu_0}(t)$

Z tw. o jednoznaczności $\mu = \mu_0$.

TW. 11.1 (Centralne twierdzenie graniczne)

Niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o takim samym rozkładzie i takim, że $\mathbb{E}X_1 = m$, $\operatorname{Var}X_1 = \sigma^2$. Wówczas

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n - nm}{\sqrt{n}\,\sigma} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$$

D-d. Dla uproszczonej notacji $Y_j = X_j - m$.

Wtedy $\mathbb{E}Y_j = 0$, $\operatorname{Var}Y_j = \sigma^2$. Zmienna losowa $Y = Y_1$ ma pierwszy i drugi moment, zatem funkcja φ_Y jest dwukrotnie różniczkowalna w 0.

$$\varphi_Y(0) = 1$$

$$\varphi_Y'(0) = 0$$

$$\varphi_Y''(0) = -\mathbb{E}Y^2 = -\operatorname{Var}Y = -\sigma^2$$

Zatem z tw. 10.4 w otoczeniu 0

$$\varphi_Y(t) = \varphi_Y(0) + \varphi_Y'(0)\cdot t + \varphi_Y''\cdot\frac{t^2}{2} + o(t^2) = 1 - \frac{t^2\sigma^2}{2} + h(t)$$

gdzie $\frac{h(t)}{t^2} \xrightarrow{t\to 0} 0$. Funkcja h może być zespolona. Poniżej przydatna będzie następująca obserwacja: jeżeli $\{c_n\}$ jest ciągiem liczb zespolonych t. że $c_n \to c \in \mathbb{C}$, to

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{c_n}{n}\right)^n = e^c.$$

Ustalmy t. Mamy

$$\varphi_{\frac{X_1+\ldots+X_n-nm}{\sqrt{n}\sigma}}(t) = \varphi_{\frac{Y_1+\ldots+Y_n}{\sqrt{n}\sigma}}(t) = \left(\varphi_{\frac{Y}{\sigma\sqrt{n}}}(t)\right)^n$$

$$= \left(\varphi_Y\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{\sigma^2}{2}\cdot\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)^2 + h\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right)^n$$

$$= \left(1 - \frac{t^2}{2n^2} + h\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right)^n$$

Weźmy $c_n = n\left(-\frac{t^2}{2n} + h\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right)$.

Wówczas $c_n \longrightarrow -\frac{t^2}{2}$, a więc

$$\varphi_{\frac{X_1+\ldots+X_n-nm}{\sqrt{n}\sigma}}(t) \xrightarrow{n\to\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Funkcja $e^{-\frac{t^2}{2}}$ jest funkcją charakterystyczną zm. los. o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$. Z tw. Lévy'ego – Craméra wnioskujemy tezę. $\blacksquare$

16.06.2021

Zadanie Na podstawie losowej próby szacujemy procent dorosłych, którzy potrafią pisać i czytać. Wiadomo na pewno, że jest to powyżej 90% dorosłej populacji. Chcemy, aby błąd był mniejszy niż 0.01 z p-stwem 0.9. Ile osób musi liczyć próba?

CTG: $\{X_n\}$ i.i.d., $\underset{m}{\overset{\|}{EX_1}} < \infty$, $\underset{\sigma^2}{\overset{\|}{Var X_1}} < \infty$.

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n - nm}{\sqrt{n}\,\sigma} = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{Var S_n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Rozwiązanie zadania

Chcemy znaleźć $p \approx \frac{\text{osoby, które potrafią pisać}}{\text{wielkości próbki}}$

n – l. testowanych osób

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{i-ta osoba czyta} \\ 0 & \text{w p.w.} \end{cases}$$

$S_n = X_1 + \dots + X_n$ — l. osób, które czytają.

$$p \approx \frac{S_n}{n}, \ \mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \leq 0{,}01\right] \geq \frac{9}{10}$$

S_n ma rozkład $Bin(n,p)$

$\mathbb{E}X_1 = p$, $Var X_1 = p(1-p)$. Chcemy skorzystać z CTG.

$$\mathbb{P}\left[\underbrace{\left|\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right|}_{\text{z CTG } \sim \mathcal{N}(0,1)} \leq \overbrace{\frac{0{,}01\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}}^{x_0}\right] \geq \frac{9}{10}$$

tu się też generuje pewien błąd

Szukamy x_0 t.że

$$\frac{9}{10} \leq \mathbb{P}[|\underset{\sim\mathcal{N}(0,1)}{Y}| \leq x_0] = \int_{-x_0}^{x_0} \varphi(x)\,dx = \Phi(x_0) - \Phi(-x_0)$$

$$= \Phi(x_0) - 1 + \Phi(x_0) = 2\Phi(x_0) - 1$$

Czyli $\Phi(x_0) \geq 0.95 \Rightarrow x_0 \geq 1.65$.

Zatem $\frac{\sqrt{n}}{100\sqrt{p(1-p)}} \geq 1.65$

$$\sqrt{n} \geq 165\sqrt{p(1-p)}$$

Wiemy, że $p \geq 0.9$. Wtedy $p(1-p) \leq 0.09$.

Czyli $\sqrt{n} \geq 0.3 \cdot 165 = 49.5$

Zatem $n \geq 49.5^2 = 2450.25$

Czyli $n \geq 2451$.

Tw. 11.2 (Berry–Essen)

Jeżeli $\{X_n\}$ i.i.d., $\mathbb{E}|X_1|^3$, $\mathbb{E}X_1 = 0$, $\sigma^2 = \mathrm{Var}\, X_1$, to

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P}\left[\frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}\,\sigma} < t \right] - \Phi(t) \right| \leq \frac{C \cdot \mathbb{E}|X_1|^3}{\sigma^3 \sqrt{n}}$$

gdzie $\Phi(t)$ jest dystrybuantą rozkł. normalnego $\mathcal{N}(0,1)$, a C jest ustaloną stałą (niezależną od rozkładu X_1)

Przykład Niech u_n będzie ciągiem Bernoulliego, tj. $\mathbb{P}[u_n = \pm 1] = 1/2$. Wówczas dla parzystych wartości n:

$$\left| \mathbb{P}\left[\frac{u_1 + \ldots + u_n}{\sqrt{n}\,\mathrm{Var}\, u_n} < 0\right] - \Phi(0) \right| = \left| \mathbb{P}[u_1 + \ldots + u_n < 0] - 1/2 \right|$$

$$= \left| 1/2\, \mathbb{P}[u_1 + \ldots + u_n < 0] + 1/2\, \mathbb{P}[u_1 + \ldots + u_n > 0] - 1/2 \right|$$

$$= \left| 1/2 \left(1 - \mathbb{P}[u_1 + \ldots + u_n = 0]\right) - 1/2 \right|$$

$$= 1/2\, \mathbb{P}[u_1 + \ldots + u_n = 0]$$

$$= 1/2 \cdot \frac{\binom{n}{n/2}}{2^n} \overset{\text{stirling}}{\sim} 1/2 \frac{1}{\sqrt{\pi n/2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{n}}$$

TW. 11.3 (Lindeberg – Feller)

Niech $\{X_{n,k}\}$ będzie schematem serii spełniającym:

- $\mathbb{E} X_{n,k} = 0$ dla $n \geq 1$, $k \leq n$
- $\lim_{n\to\infty} s_n^2 = \sigma^2 > 0$, dla $s_n^2 := \mathrm{Var} \sum_{k=1}^{n} X_{n,k} = \sum \mathrm{Var}\, X_{n,k}$

• (warunek Lindeberga) dla każdego $r > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_{n,k}^2 \mathbb{1}_{\{|X_{n,k}|>r\}}\right] = 0$$

Wówczas $\sum_{k=1}^{n} X_{n,k} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,\sigma^2)$

<u>Przykład</u> Liczba cykli w losowej permutacji:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 9 & 6 & 8 & 2 & 1 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix} = (1\,3\,6)(2\,9\,7\,5)(4\,8)$$

Problem: losujemy permutację $\Pi_n \in S_n$.

C_n – l. cykli tej permutacji.

Cel: $\frac{C_n - \log n}{\sqrt{\log n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$

Definiujemy $Z_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli po k-tej liczbie w rozkł. na cykle pojawia się ")"} \\ 0 & \text{w p.w.} \end{cases}$

Zauważmy, że $C_n = \sum_{k=1}^{n} Z_{n,k}$

Lemat: dla ustalonego n $Z_{n,k}$ są nzl.

oraz $\mathbb{P}[Z_{n,k} = 1] = \frac{1}{n-k+1}$.

Sprawdzimy warunek Lindeberga.

Zdef. $Y_{n,k} = Z_{n,\,n-k+1}$. Znowu $Y_{n,k}$ są nzl.

oraz $\mathbb{P}[Y_{n,k} = 1] = \frac{1}{k}$.

$\mathbb{E} Y_{n,k} = 1/k$, $\operatorname{Var} Y_{n,k} = 1/k - 1/k^2$

$$\mathbb{E} C_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E} Y_{n,k} = \sum_{k=1}^{n} 1/k \sim \log n$$

$\operatorname{Var} C_n \sim \log n$

Niech $X_{n,k} = \dfrac{Y_{n,k} - \frac{1}{k}}{\sqrt{\log n}}$. $\{X_{n,k}\}$ – schemat serii.

1) $\mathbb{E} X_{n,k} = 0$

2) $$s_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Var} X_{n,k} = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Var}\left(\frac{Y_{n,k}}{\sqrt{\log n}}\right) = \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} 1/k - 1/k^2$$

$$\longrightarrow 1 = \sigma^2$$

3) $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_{n,k}^2 \mathbb{1}_{\{|X_{n,k}|>r\}} \right]$

$$= \sum \mathbb{E}\left[X_{n,k}^2 \mathbb{1}_{\left\{ \frac{Y_{n,k} - 1/k}{\sqrt{\log n}} > r \right\}} \right] \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$\frac{2}{\sqrt{\log n}} > r$

$\frac{2}{\sqrt{\log n}} \to 0$ dla dużych n

ten zbiór pusty

Z CTG L-F $\sum_{k=1}^{n} X_{n,k} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$

Czyli

$$\underbrace{\frac{C_n - \log n}{\sqrt{\log n}}}_{\xrightarrow{d}\ \mathcal{N}(0,1)} + \underbrace{\frac{\log n - \sum 1/k}{\sqrt{\log n}}}_{\to 0} = \frac{\sum Y_{n,k} - \sum 1/k}{\sqrt{\log n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$$

KONIEC