28.04.2021

GPWL. $\{X_i\}$ – ciąg zm. los. o takim samym rozkładzie i $\mathbb{E}X_i^2 < \infty$

Cel: $\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{p.w.} \mathbb{E}X_1$

Chcemy badać sumy: $\frac{X_1 + \ldots + X_n - a_n}{b_n}$

Przykład: Czy $\sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1) \frac{1}{n}$ jest zbieżny?

Np. $\sum \frac{1}{n} = \infty$, $\sum (-1)^n \frac{1}{n} < \infty$

Tw. Riemanna: można tak ustawić ± 1, żeby szereg był zbieżny do dowolnej wartości $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Definicja 7.2 Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie p. prob. i niech $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$ będzie ciągiem σ-ciał zawartych w $\mathcal{F}$. Zdefiniujmy

$$\mathcal{F}_{n,\infty} = \sigma(\mathcal{F}_n, \mathcal{F}_{n+1}, \dots)$$

wtedy $$\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{n,\infty}$$

nazywamy **σ-ciałem ogonowym.**

Intuicja: Mamy ciąg doświadczeń (zm. los. X_n). $\mathcal{F}_n$ - wiedza o n-tym doświadczeniu. $\mathcal{F}_{n,\infty}$ - wiedza o dośw. od chwili n.

$$\mathcal{F}_{n,\infty} \supseteq \mathcal{F}_{n+1,\infty}.$$

$\mathcal{F}_\infty$ - wiedza o „nieskończenie odległej" przyszłości.

<u>Przykład.</u> Rzucamy kostką.

"6 wypadnie ∞ wiele razy"

Dla każdego n to zdarzenie należy do $\mathcal{F}_{n,\infty}$

<u>Przykład</u> Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem zmiennych losowych i niech $\mathcal{F}_n = \sigma(X_n)$ będzie σ-ciałem generowanym przez X_n.

Wtedy:

- jeżeli $A_i \in \sigma(X_i)$, to

$$A = \limsup A_n = \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{i \geq k} A_i \in \mathcal{F}_\infty$$

bo dla każdego n

$$A = \bigcap_{k > n} \bigcup_{i \geq k} A_i \in \mathcal{F}_{n,\infty}$$

$$\left(\begin{array}{l} A_i = \{\text{"w } i\text{-tym rzucie wypadła } 6\text{"}\} \\ \bigcup_{i \geq k} A_i = \{\text{"w rzutach } k, k+1, k+2, \ldots \text{ wypadła co najmniej jedna } 6\text{"}\} \\ A = \{\text{wypadło } \infty \text{ wiele } 6\} \end{array}\right)$$

- zdarzenie

$$A = \{\omega : \text{ciąg } \{X_n(\omega)\} \text{ jest zbieżny}\}$$

należy do σ-ciała ogonowego, bo

$$\{\omega : \{X_n(\omega)\} \text{ zbieżny}\} = \bigcap_{N=1} \bigcup_{k=n}^{\infty} \bigcap_{j,m \geq k} \{|X_j(\omega) - X_m(\omega)| < 1/N\}$$

$$= \bigcap_{N=n} \bigcup_{k=N}^{\infty} \bigcap_{j,m \geq k} \{|X_j(\omega) - X_m(\omega)| < 1/N\} \in \mathcal{F}_{n,\infty}$$

Pokazaliśmy, że dla każdego n

$$\{\omega : \text{ciąg } \{X_n(\omega)\} \text{ jest zbieżny}\} \in \mathcal{F}_{n,\infty}$$

a to daje nam

$$\{\omega : \text{ciąg } \{X_n(\omega)\} \text{ jest zbieżny}\} \in \mathcal{F}_{\infty}$$

- zdarzenie

$$\{\sup_n |X_n| < \infty\} \text{ i } \{\sum_{n=1}^{\infty} X_n \text{ jest zbieżny}\}$$

$$\{\omega : \sup_n |X_n(\omega)| < \infty\}$$

należy do σ-ciała ogonowego

• zdarzenie

$$\{\limsup_{n\to\infty}(X_1+\ldots+X_n)>0\}$$

nie należy do σ-ciała ogonowego, ponieważ pierwsze składniki mają wpływ na granicę.

<u>Tw. 7.3</u> (Prawo 0-1 Kołmogorowa)
Jeżeli σ-ciała $\mathcal{F}_n$ są niezależne, to dla każdego zdarzenia $A\in\mathcal{F}_\infty$ zachodzi

$$\mathbb{P}[A]=0 \text{ lub } \mathbb{P}[A]=1.$$

<u>Lemat 7.4</u> Jeżeli rodziny zbiorów $\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\ldots,\mathcal{A}_n$ są niezależne i każdy z nich tworzy π-układ, to σ-ciała przez nie generowane $\sigma(\mathcal{A}_1),\ldots,\sigma(\mathcal{A}_n)$ są niezależne.

D-d. Ustalmy zbiory $A_2 \in \mathcal{A}_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}_n$ oraz niech

$$\mathcal{L} = \{ A \in \mathcal{F} : \mathbb{P}[A \cap A_2 \cap \dots \cap A_n] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[A_2] \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}[A_n] \}$$

Oczywiście $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{L}$. Ponadto $\mathcal{L}$ jest λ-układem

- $\Omega \in \mathcal{L}$
- jeżeli $A, B \in \mathcal{L}$ oraz $A \subset B$, to

$$\mathbb{P}[(B \setminus A) \cap A_2 \cap \dots \cap A_n] =$$

$$\mathbb{P}[B \cap A_2 \cap \dots \cap A_n] - \mathbb{P}[A \cap A_2 \cap \dots \cap A_n] =$$

$$= \mathbb{P}[B] \cdot \mathbb{P}[A_2] \dots \mathbb{P}[A_n] - \mathbb{P}[A] \mathbb{P}[A_2] \dots \mathbb{P}[A_n]$$

$$= \mathbb{P}[B \setminus A] \mathbb{P}[A_2] \dots \mathbb{P}[A_n].$$

- $\{B_k\}$ wst. rodz. zb. w $\mathcal{L}$, $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, wtedy $\mathbb{P}[B_n] \to \mathbb{P}[B]$. Podobnie

$$\mathbb{P}[B_k \cap A_2 \cap \dots \cap A_n]$$

$$\big\downarrow k \to \infty$$

$$\mathbb{P}[B \cap A_2 \cap \dots A_n]$$

Wynika stąd

$$\mathbb{P}[B \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n] \xleftarrow{k\to\infty} \mathbb{P}[B_k \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n] =$$

$$= \mathbb{P}[B]\mathbb{P}[A_2] \ldots \mathbb{P}[A_n] \xrightarrow{k\to\infty} \mathbb{P}[B]\mathbb{P}[A_2] \ldots \mathbb{P}[A_n]$$

a więc $B \in \mathcal{L}$.

Zatem $\sigma(\mathcal{A}_1), \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ są niezależne. Teraz ustalamy $A_1 \in \sigma(\mathcal{A}_1)$, $A_3 \in \mathcal{A}_3, \ldots, A_n \in \mathcal{A}_n$ i definiujemy

$$\mathcal{L}_2 = \{A \in \mathcal{F} : \mathbb{P}[A_1 \cap A \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n] = \mathbb{P}[A_1]\mathbb{P}[A]\mathbb{P}[A_3] \ldots \mathbb{P}[A_n]\}.$$

Powtarzamy rozumowanie n razy i dostajemy tezę. ■

<u>Dow. tw. 7.3</u> Pokażemy że A jest niezależny od samego siebie.

Wtedy $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A \cap A] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A]^2$

Stąd $\mathbb{P}[A] \in \{0, 1\}$.

Aby to uzasadnić opiszemy pewne rodziny zbiorów $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ dla których zachodzi

$$\mathbb{P}[B \cap C] = \mathbb{P}[B]\mathbb{P}[C]$$

dla $B \in \mathcal{G}_1$, $C \in \mathcal{G}_2$.

Krok 1. Weźmy dowolne k oraz

$B \in \sigma(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k)$, $C \in \sigma(\mathcal{F}_{k+1}, \mathcal{F}_{k+2}, \dots)$

Zauważmy, że $\sigma(\mathcal{F}_{k+1}, \mathcal{F}_{k+2}, \dots) =$

$$= \sigma\Big(\bigcup_{j \geq 1} \sigma(\mathcal{F}_{k+1}, \mathcal{F}_{k+2}, \dots \mathcal{F}_{k+j})\Big) = (*)$$

i powyższa suma jest π-układem.

Rodziny $\sigma(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ oraz

$\bigcup_{j \geq 1} \sigma(\mathcal{F}_{k+1}, \dots, \mathcal{F}_{k+j})$ są niezależne

(z założeń tw.), a zatem

$\sigma(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k)$ oraz $\underset{\mathcal{F}_\infty}{\overset{}{\underset{\cup}{(*)}}}$ są niezależne

z lematu.

Zatem dla każdego k

$$\sigma(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k), \ \sigma(\mathcal{F}_{k+1}, \mathcal{F}_{k+2}, \dots)$$

są niezależne.

Krok 2. Weźmy teraz

$$B \in \sigma(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots), \ C \in \mathcal{F}_\infty$$

Zbiory $\sigma(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k)$, $\mathcal{F}_\infty$ są niezależne z kroku 1. Zatem $\bigcup_{k \geq 1} \sigma(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k)$, $\mathcal{F}_\infty$ są niezależne. Są to π-układy, więc z lematu niezależne są

$$\underbrace{\sigma\Big(\bigcup_{k \geq 1} \sigma(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k)\Big)}_{= \sigma(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots)}, \quad \mathcal{F}_\infty$$

Ale $\mathcal{F}_\infty \subseteq \sigma(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots)$, więc dla dowolnego $A \in \mathcal{F}_\infty$ mamy

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A \cap A] = \mathbb{P}[A]^2.$$

$\blacksquare$

Wniosek 7.5 Jeżeli $\{X_n\}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych, to

- granica $\lim_{n\to\infty} X_n$ istnieje z p-stwem 0 lub 1
- szereg $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ jest zbieżny z p-stwem 0 lub 1
- $\mathbb{P}[\{\limsup X_n = \infty\}] = 0$ lub 1
- $\mathbb{P}[\{\lim_{n\to\infty} (X_1 + \ldots + X_n)/n < \infty\}] = 0$ lub 1.

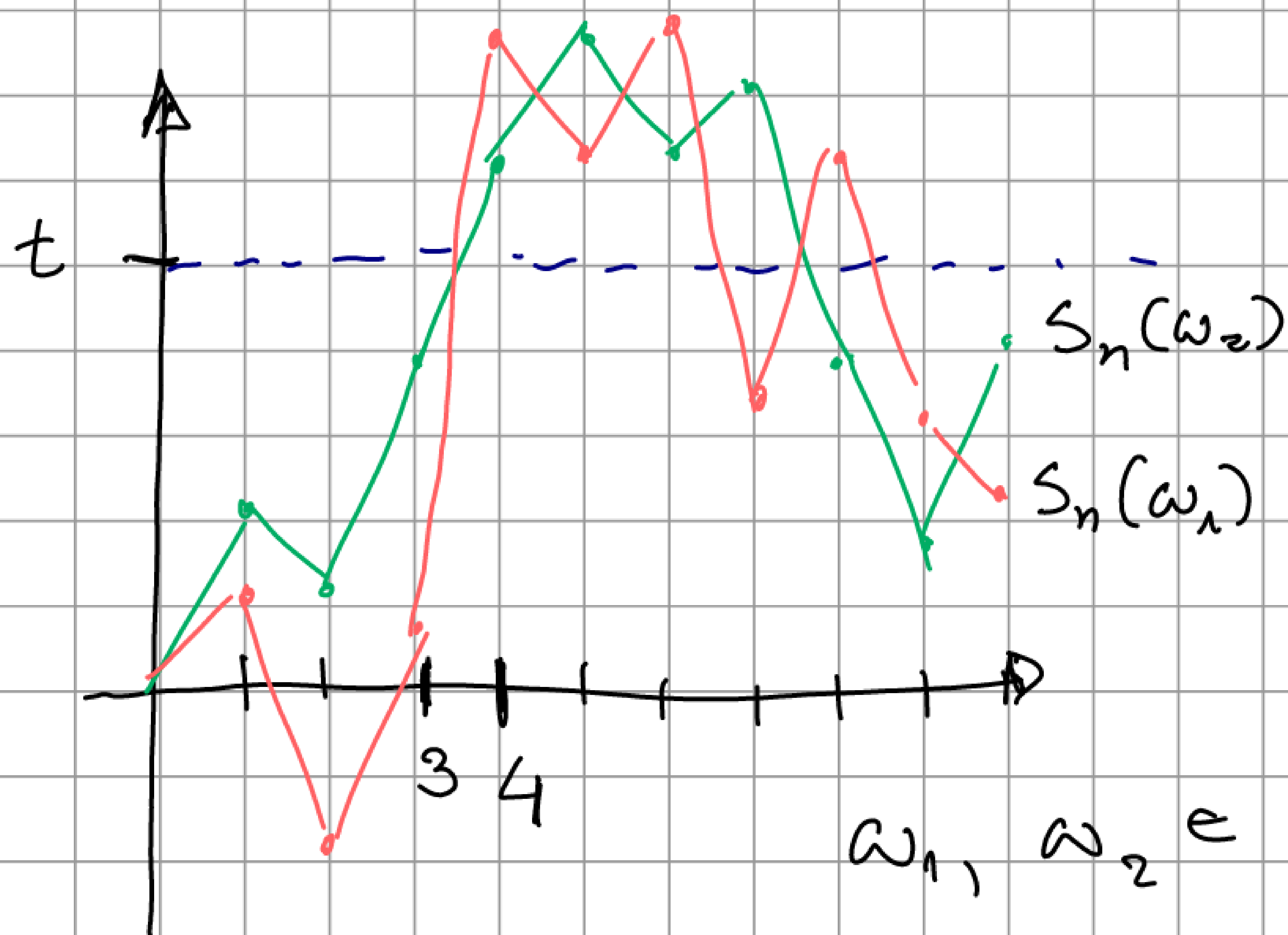
Tw. 8.1 (Nierówność Kołmogorowa)

Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niezl. zm. los. takimi, że $\mathbb{E}X_i = 0$ oraz $\mathbb{E}X_i^2 < \infty$. Wtedy dla dowolnego $t > 0$

$$\mathbb{P}\left[\max_{1\le k\le n} |X_1 + \ldots + X_k| \geq t\right] \leq \frac{1}{t^2} \mathrm{Var}(X_1 + \ldots + X_n)$$

D-d. $S_0 := 0$, $S_k := S_{k-1} + X_k$. Zdefiniujmy

$$A_k = \{ |S_j| < t \text{ dla } j<k,\ |S_k| \geq t \}$$



$\omega_1, \omega_2 \in A_4$

A_k opisuje zdarzenia, które dopiero w k-tym kroku przeskakują nad t.

A_k są rozłączne, $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = B = \{ \max_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq t \}$

$A_k \in \sigma(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n)$ $(\sigma(X_i) = \mathcal{F}_i)$

$$\operatorname{Var} S_n = \mathbb{E} S_n^2 = \int_\Omega S_n^2 \, d\mathbb{P} \geq \int_B S_n^2 \, d\mathbb{P}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} S_n^2 \, d\mathbb{P} = \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} (S_k + S_n - S_k) \, d\mathbb{P}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{A_k} S_k^2 \, d\mathbb{P} + 2 \int_{A_k} (S_n - S_k) S_k \, d\mathbb{P} + \int_{A_k} (S_n - S_k)^2 \, d\mathbb{P} \right)$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{A_k} S_k^2 \, d\mathbb{P} + 2 \int (S_n - S_k) S_k \mathbb{1}_{A_k} d\mathbb{P} \right)$$

Zmienne losowe $S_n - S_k$ oraz $S_k \mathbb{1}_{A_k}$ są niezależne, bo $\sigma(S_k \mathbb{1}_{A_k}) \subseteq \sigma(X_1, \dots, X_k)$

$\sigma(S_n - S_k) \subseteq \sigma(X_{k+1}, \dots, X_n)$ ← niezależne

$$\int (S_n - S_k) \cdot S_k \mathbb{1}_{A_k} d\mathbb{P} = \mathbb{E}\left[(S_n - S_k) S_k \mathbb{1}_{A_k}\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[(S_n - S_k)\right] \mathbb{E}\left[S_k \mathbb{1}_{A_k}\right] =$$

$$= \sum_{j=k+1}^{n} \mathbb{E}_j \cdot \mathbb{E}\left[S_k \mathbb{1}_{A_k}\right] = 0$$

A stąd

$$\operatorname{Var} S_n \geq \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} S_k^2 \, d\mathbb{P} \geq \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} t^2 \, d\mathbb{P}$$

$$= t^2 \int_B d\mathbb{P} = t^2 \mathbb{P}[B] \qquad \blacksquare$$

TW. 8.2 (Kołmogorowa o dwóch szeregach)

Załóżmy, że $X_1, X_2, \ldots$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że $\mathbb{E}X_i^2 < \infty$. Jeżeli

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}X_k < \infty \quad \text{oraz} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Var}\, X_k < \infty,$$

to

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_i < \infty \quad \text{p.n.}$$

Przykład Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$, gdzie

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{z pstwem } \frac{1}{2} \\ -1 & \text{z pstwem } \frac{1}{2} \end{cases}, \quad u_n \text{ niezależne},$$

jest zbieżny?

Niech $X_n = \frac{u_n}{n}$, wtedy $\mathbb{E}X_n = 0$,

$$\mathrm{Var}\, X_n = \frac{1}{n^2} \mathrm{Var}(u_n) = \frac{1}{n^2}.$$

Zatem szereg $\sum X_n$ jest zbieżny p.n.

D-d. TW. 8.2 Możemy założyć, że $\mathbb{E}X_i = 0$, bo przy powyższych założeniach $\sum X_i$ jest zbieżny p.n. $\Leftrightarrow \sum (X_i - \mathbb{E}X_i)$ jest zbieżny.

Niech $S_N = \sum_{n=1}^{N} X_n$. Chcemy pokazać, że $\{S_N\}$ jest ciągiem Cauchy'ego. Z nierówności Kołmogorowa

$$\mathbb{P}\left[\max_{M \le m \le N} |S_m - S_M| \geq \varepsilon\right] \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathrm{Var}(S_N - S_M)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n=M+1}^{N} \mathrm{Var}\, X_n$$

Przechodząc z N do ∞ i korzystając z ciągłości miary oraz $\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Var} X_i < \infty$

$$\mathbb{P}\left[\sup_{m \geq M} |S_m - S_M| \geq \varepsilon\right] \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n=M+1}^{\infty} \mathrm{Var}\, X_n \xrightarrow{M \to \infty} 0$$

Zatem dla każdego $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\Big[\underbrace{\sup_{n,m \geq M} |S_m - S_n| \geq 2\varepsilon}_{= W_M}\Big] \xrightarrow{M \to \infty} 0$$

Zatem $W_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Z tw. Riesza W_M ma podciąg W_{M_k} zbieżny do 0 p.n.

Ale zauważmy, że ciąg $W_n \xrightarrow{p.n.} 0$. To pokazuje, że ciąg S_n jest ciągiem Cauchy'ego p.n., a więc S_n jest zbieżny p.n. $\blacksquare$