31.03.2021

Tw. z poprzedniego wykładu:

Tw. 4.12 Załóżmy, że X_1, X_2 są niezl. zm. los. o rozkładach ciągłych z gęstościami f_1, f_2. Wówczas zmienna losowa $X_1 + X_2$ ma rozkład z gęstością

$$f(x) = f_1 * f_2(x) = \int_{\mathbb{R}} f_1(x-y) f_2(y) dy$$

D-d. Dla dowolnego $B \in \mathcal{B}or(\mathbb{R})$:

$$\mathbb{P}[X_1 + X_2 \in B] = \mu_{(X_1, X_2)}(\{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 \in B\})$$

$$= \int_{(x_1,x_2): x_1+x_2 \in B} \mu_{(X_1,X_2)}(dx_1, dx_2)$$

$$\overset{\text{niezależności}}{=} \iint f_1(x_1) f_2(x_2) dx_1 dx_2$$

$$\overset{\text{tw. Fubiniego}}{=} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B(x_1 + x_2) f_1(x_1) f_2(x_2) dx_1 \right) dx_2$$

$$\overset{z = x_1 + x_2}{=} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B(z) f_1(z - x_2) dz \right) f_2(x_2) dx_2$$

$$\overset{\text{tw. Fubiniego}}{=} \int_B \left(\int_{\mathbb{R}} f_1(z - x_2) f_2(x_2) \, dx_2 \right) dz =$$

$$= \int_B f_1 * f_2 \, dz$$

<u>Przykład</u> Niech X_1 i X_2 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na $[0,1]$, czyli $U([0,1])$. Oblicz gęstość $X_1 + X_2$.

<u>Rozwiązanie</u>

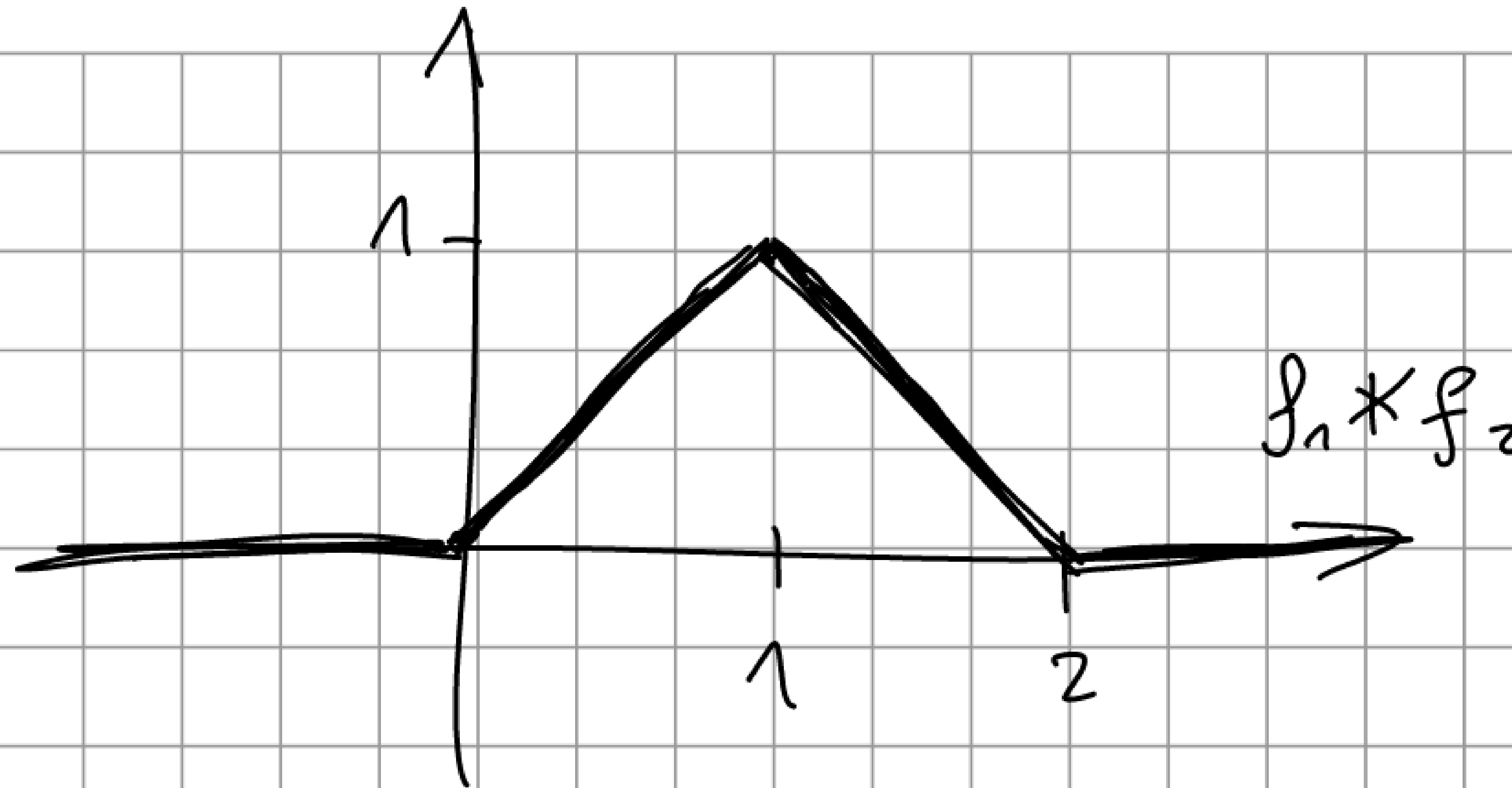
$$f_1(x_1) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x_1), \quad f_2(x_2) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x_2).$$

Zatem $X_1 + X_2$ ma gęstość

$$f_1 * f_2(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,1]}(x-y) \mathbb{1}_{[0,1]}(y) \, dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[x-1,x]}(y) \mathbb{1}_{[0,1]}(y) \, dy = \left| [x-1, x] \cap [0,1] \right|$$

$$0 \leq x-y \leq 1$$
$$\begin{cases} x-1 \leq y \leq x \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$



<u>Przykład</u> Załóżmy, że X_1, X_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $N(m_1, \sigma_1)$, $N(m_2, \sigma_2)$. Wówczas

$m_1 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1 \in [0, \infty)$

$$f_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{(x-m_i)^2}{2\sigma_i^2}} \qquad i = 1, 2$$

i można obliczyć splot

$$f_1 * f_2(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y-m_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(y-m_2)^2}{2\sigma_2^2}} dy$$

$$\overset{\text{(zadanie)}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} e^{-\frac{(x-m_1-m_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}$$

Zatem $X_1 + X_2$ ma rozkład $N(m_1+m_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

Definicja 5.1 Niech X będzie zmienną losową (o wartościach z $\mathbb{R}$) na p. prob $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Mówimy, że X **ma wartość oczekiwaną** jeżeli

$$\int_\Omega |X| \, d\mathbb{P} = \int_\Omega |X(\omega)| \, d\mathbb{P}(\omega) < \infty$$

Wówczas **wartością oczekiwaną** zmiennej losowej X nazywamy liczbę

$$\mathbb{E}X = \int_\Omega X \, d\mathbb{P}$$

Jeżeli $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, $\mathbb{P}[\{\omega_i\}] = p_i$, wtedy $\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{n} X(\omega_i) p_i$

Intuicja Rzucamy kostką. Jaki średnio otrzymamy wynik?

Wartość oczekiwana, to tak jakbyśmy wykonali doświadczenie wiele razy i obliczamy średnią wartość wyniku.

Historycznie: wartość losowa opisuje, czy gra losowa w której gramy jest opłacalna.

<u>Przykład</u> Dwaj gracze A i B grają w grę: rzucają kostką, niech k będzie wynikiem rzutu. Jeżeli k jest nieparzyste, to A wygra k zł. W p.w. B dostaje k zł. Czy gra jest uczciwa?

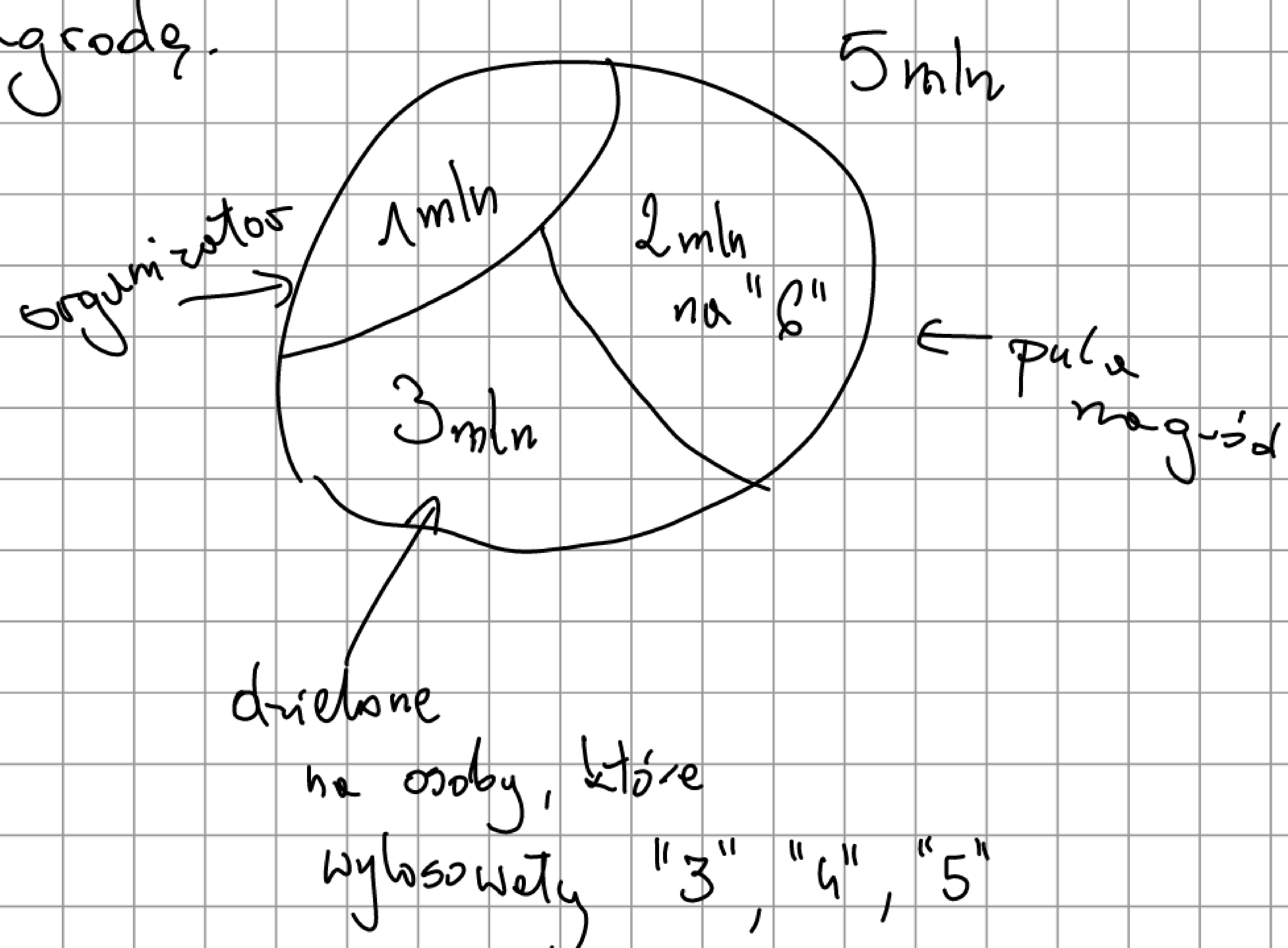
<u>Rozwiązanie</u> Załóżmy, że wykonamy n rzutów. Wówczas oczekujemy że gracz A wygra w przybliżeniu

$$1 \cdot \frac{n}{6} + 3 \cdot \frac{n}{6} + 5 \cdot \frac{n}{6} - 2\frac{n}{6} - 4\frac{n}{6} - 6\frac{n}{6} = -\frac{n}{2}$$

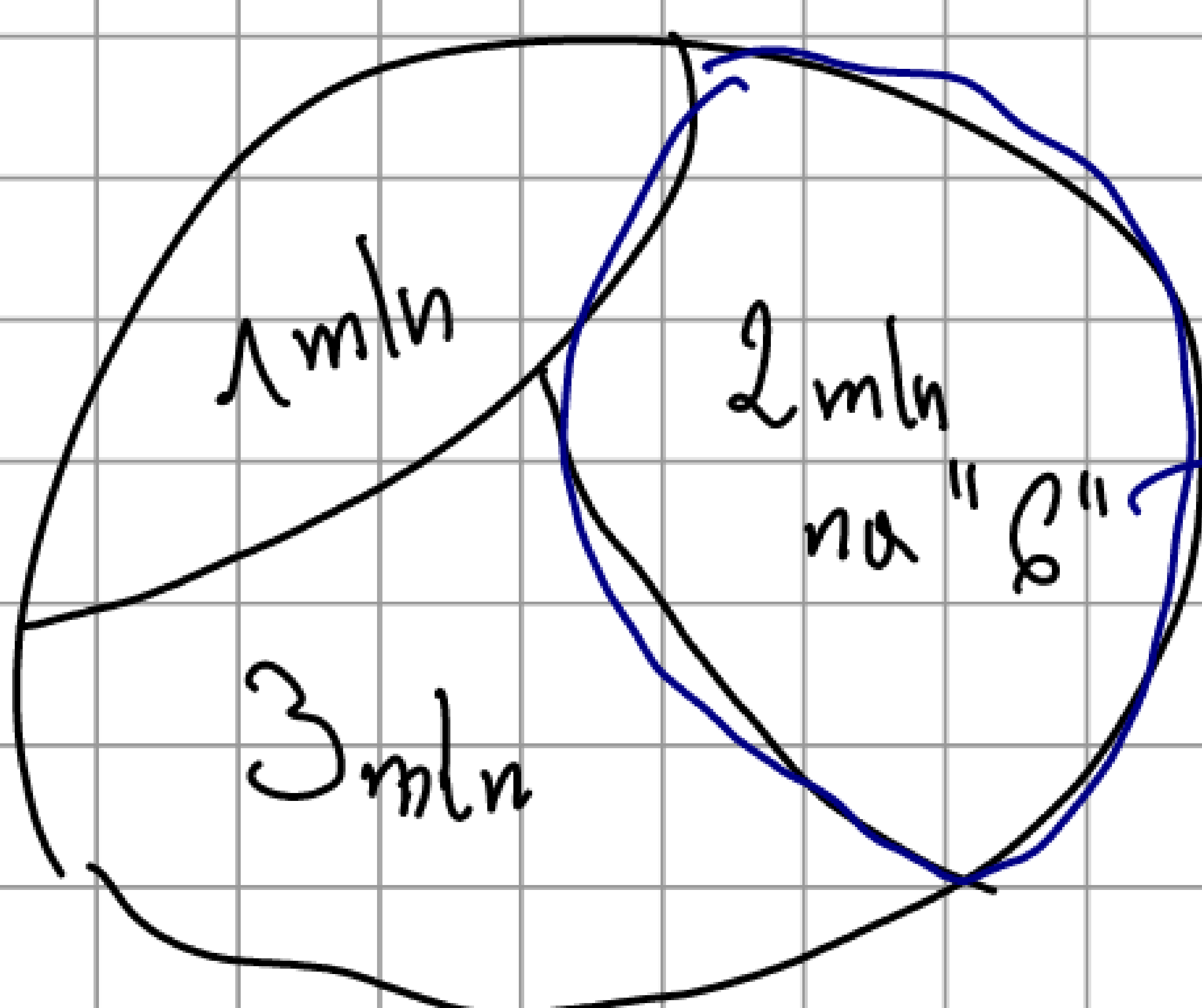
Formalnie: Niech X oznacza wygraną gracza A podczas jednej rundy, wtedy:

$$EX = 1 \cdot \mathbb{P}[X=1] - 2 \cdot \mathbb{P}[X=2] + \ldots - 6\,\mathbb{P}[X=6] =$$
$$= -\frac{1}{2}.$$

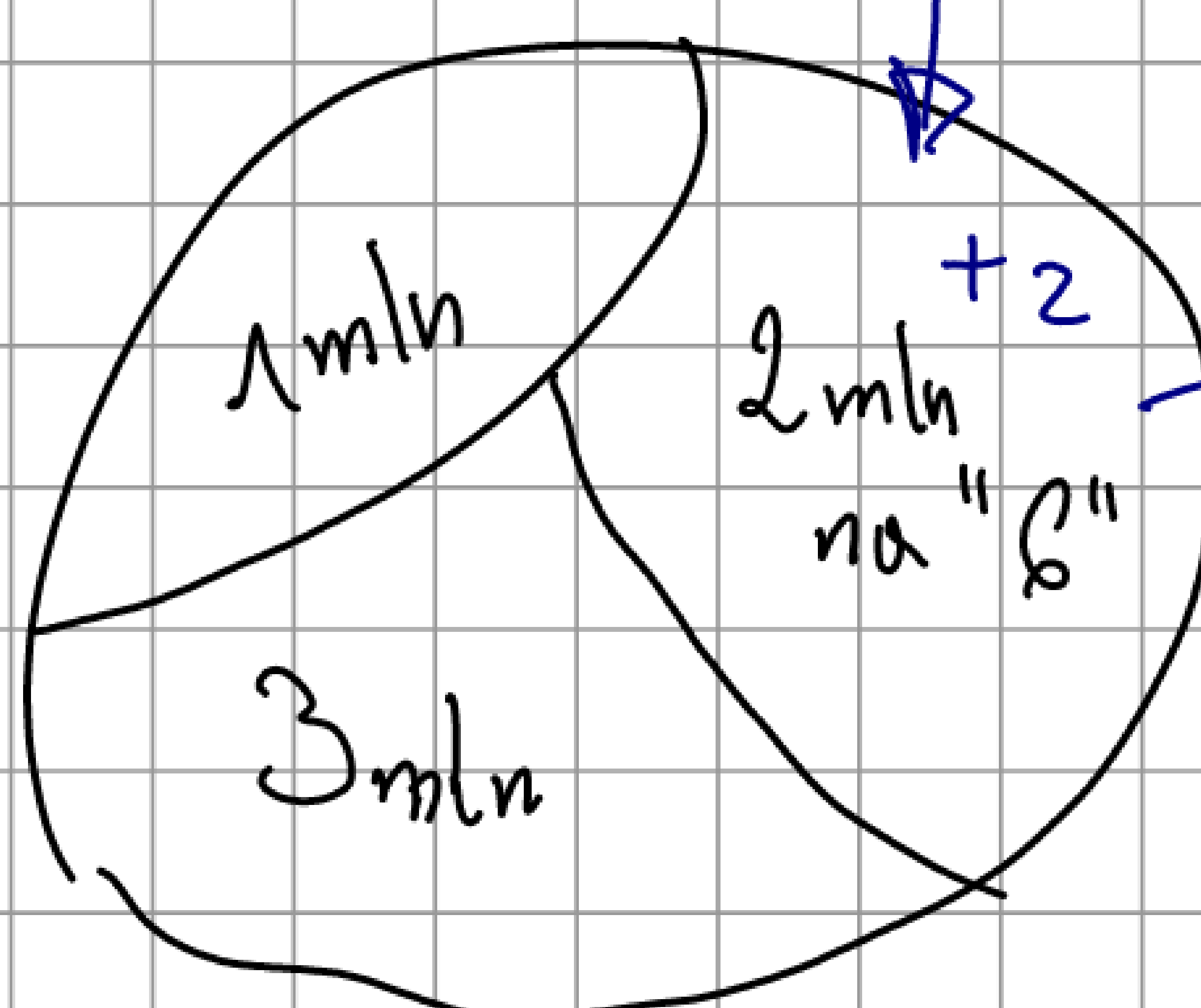
<u>Totolotek</u> Mamy 49 liczb, skreślamy 6. Jeśli skreśliliśmy liczby wylosowane przez maszynę losującą, to dostajemy nagrodę.

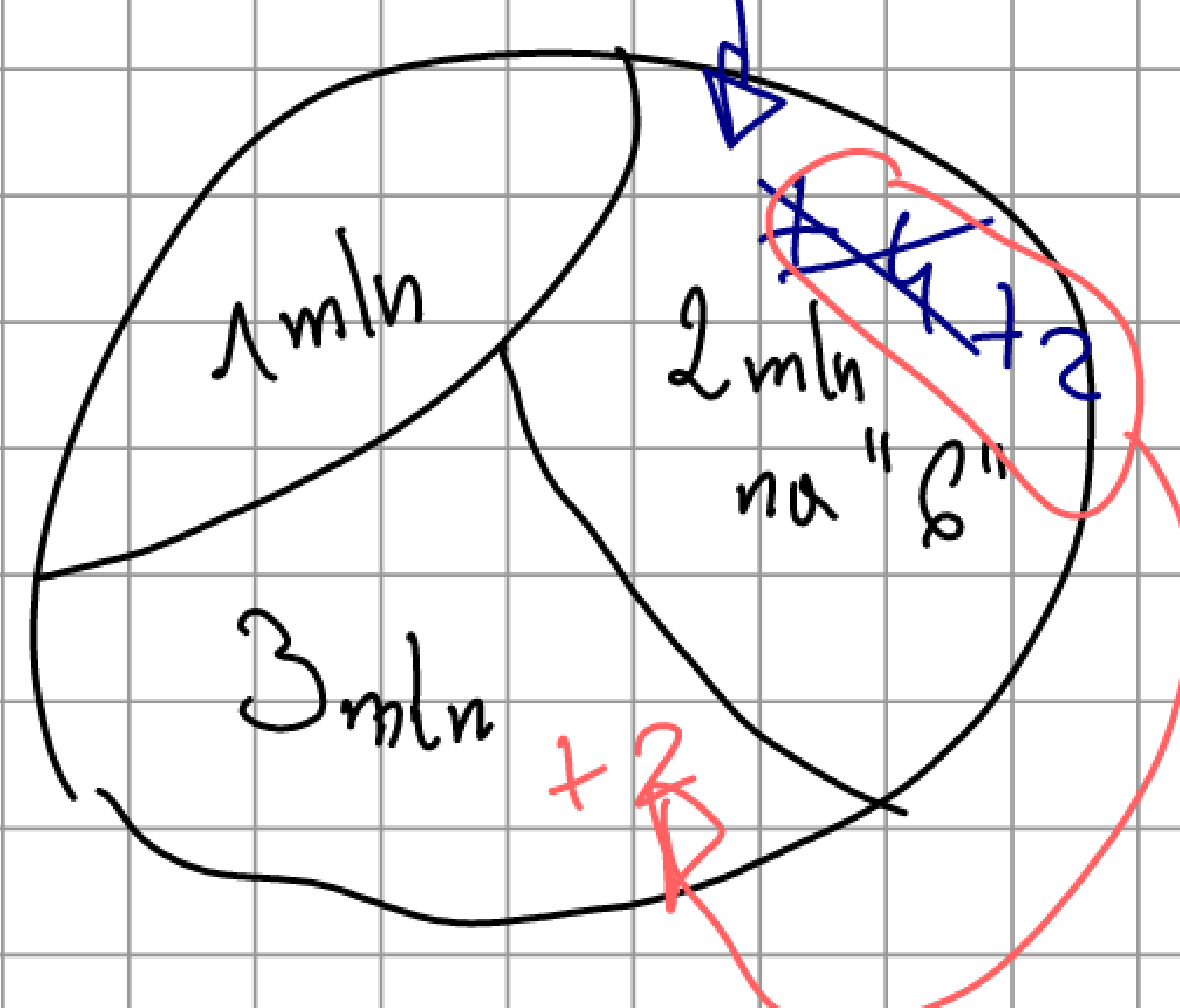


Jeśli nikt nie wylosował "6", to te 2 mln przechodzą na następną turę.



Jak było w Ameryce?





Okazało się, że w tej puli wartość oczekiwana stała się dodatnia.

TW. 5.2 Załóżmy, że X, Y są zmiennymi losowymi i że $\mathbb{E}X, \mathbb{E}Y$ istnieją. Wtedy

1. Jeżeli $X \geq 0$, to $\mathbb{E}X \geq 0$
2. $|\mathbb{E}X| \leq \mathbb{E}|X|$
3. Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}X + b\mathbb{E}Y$$

TW. 5.3 Załóżmy, że $\{X_n\}$ jest ciągiem zm. los. t. że $\mathbb{E}X_n$ istnieją. Wtedy

1. (lemat Fatou) Jeżeli $X \geq 0$, to

$$\mathbb{E} \liminf_{n\to\infty} \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n$$

2. (tw. o zbieżności monotonicznej) Jeżeli $X_n \geq 0$ oraz $\{X_n\}$ jest ciągiem monotonicznym (tzn. $X_n \leq X_{n+1}$) to

$$\mathbb{E} \lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n$$

3. (tw. Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej)

Jeżeli $|X_n| \leq Y$ dla pewnej zmiennej losowej Y, t. że $\mathbb{E}|Y| < \infty$ oraz istnieje granica $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ dla $\mathbb{P}$ prawie wszystkich ω, to

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}\lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n$$

Przykład Kupujemy k losów w loterii, w której M losów jest przegrywających, a N wygrywających (zakł. $k \leq M, N$). Niech X będzie liczbą wygrywających wśród tych, które kupiliśmy. Oblicz $\mathbb{E}X$

I

$$X_i = \begin{cases} 1 & i\text{-ty wygrywa} \\ 0 & i\text{-ty przegrywa} \end{cases}$$

$$X = \sum_{i=1}^{k} X_i \ , \quad \mathbb{E}X_i = \mathbb{P}[X_i = 0]\cdot 0 + \mathbb{P}[X_i = 1]\cdot 1 =$$

$$= \mathbb{P}[X_i = 1] = \frac{N}{M+N}$$

???

$$\mathbb{E}X = \sum \mathbb{E}X_i = \frac{kN}{M+N}.$$

II

$$\mathbb{E}X = \sum_{j=0}^{k} j\,\mathbb{P}[X=j] = \sum_{j=0}^{k} \frac{\binom{N}{j}\binom{M}{k-j}}{\binom{N+M}{k}} \cdot j = \ldots$$

Masakra do liczenia...

<u>Przykład</u> Losujemy σ ze zbioru S_n.

Niech X oznacza l. punktów stałych.

Oblicz $\mathbb{E}X$.

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \sigma(i)=i \\ 0 & \end{cases}$$

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}X_i = 1,$$

bo $\mathbb{E}X_i = \mathbb{P}[X_i = 1] = \frac{1}{n}$.

Potęga liniowości $\mathbb{E}$ wynika z tego, że nie wymaga niezależności.

Tw. 5.4 Niech $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ będzie f. borelowską a X d-wymiarową zm. los. o rozkładzie μ.

Wówczas:

$$\int_\Omega f(X)\, d\mathbb{P} = \mathbb{E} f(X) = \int_{\mathbb{R}^d} f \, d\mu \qquad (*)$$

o ile jedna z tych stałych istnieje

D-d. Przybliżamy f funkcjami prostymi.

(Zał. $d=1$, dla prostoty dowodu)

Krok 1. $f = \mathbb{1}_A$, dla $A \in Bor(\mathbb{R})$

Wtedy $\mathbb{E} f(X) = \mathbb{P}[f(X) = 1] =$

$$\mathbb{P}[X \in A] = \mu(A) = \int_A 1 \, d\mu =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu$$

Krok 2.

$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$ – f. prosta. Wtedy $(*)$ wynika z kroku 1 i liniowości wartości oczekiwanej.

Krok 3.

Załóżmy, że $f \geq 0$. Wtedy niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem f. prostych t. że $f_n \nearrow f$. Z tw. o zbieżności monotonicznej i kroku 2.

$$\mathbb{E} f(X) = \mathbb{E} \lim_n f_n(X) \overset{MCT}{=} \lim_n \mathbb{E} f_n(X) \overset{K2}{=}$$

$$= \lim_n \int f_n(X)\, d\mu \overset{MCT}{=} \int f(X)\, d\mu$$

Krok 4.

$f = f^+ - f^-$, znowu z liniowości. ∎

Wniosek 5.5 Jeżeli zm. los. ma rozkład dyskretny $\mathbb{P}[X = x_i] = p_i$, to $\mathbb{E}\Phi(X)$ istnieje iff $\sum |\Phi(x_i)| p_i < \infty$. Wówczas

$$\mathbb{E}\Phi(X) = \sum \Phi(x_i) p_i$$

Wniosek 5.6

Jeżeli zm. los. ma rozkład absolutnie ciągły o gęstości g (tzn. $\mu(dx) = g(x)dx$) a $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, to

$$\mathbb{E} f(X) = \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x)\, dx$$

TW. 5.7 Zał., że X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi oraz obie posiadają wartość oczekiwaną. Wówczas

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$$

D-d. Niech $Z = (X, Y)$. Z niezależności wynika, że $\mu_Z = \mu_X \otimes \mu_Y$.

Korzystając z tw. Fubiniego oraz tw. 5.4 otrzymujemy

$$\mathbb{E}|XY| \overset{\text{Tw5.4}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} |xy| \mu_Z(dx, dy) = \int_{\mathbb{R}^2} |xy| \mu_X(dx) \mu_Y(dy)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |xy| \mu_X(dx) \mu_Y(dy) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |x| \mu_X(dx) \cdot \int_{\mathbb{R}} |y| \mu_Y(dy) \overset{\text{Tw.5.4}}{=} \mathbb{E}|X| \cdot \mathbb{E}|Y|.$$

Powyższy rachunek pokazuje, że zmienna losowa XY ma wartość oczekiwaną. Powtarzając rachunki bez modułów otrzymujemy tezę.