17.03.2021

Co było do tej pory?

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – p. prob, niezależność,

$X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightsquigarrow (\mathbb{R}, Bor(\mathbb{R}), \mu)$

μ – rozkład X

$$\mu(B) = \mathbb{P}[X \in B] = \mathbb{P}[\{\omega : X(\omega) \in B\}]$$

Definicja 3.6 **Dystrybuantą** zmiennej losowej X nazywamy funkcję $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ zadaną wzorem

$$F(t) = \mathbb{P}[X \leq t] = \mu((-\infty, t])$$

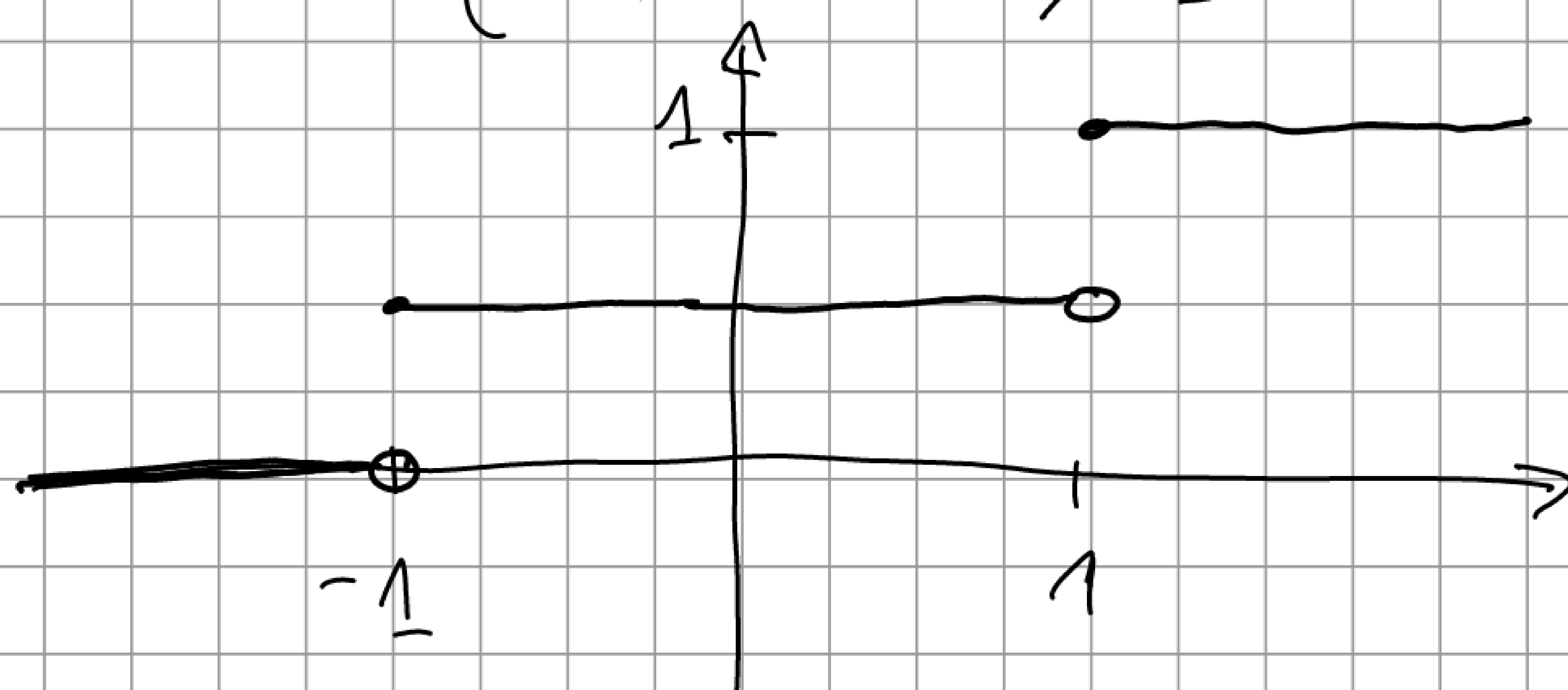
Przykład

1) $(\Omega = \{O, R\}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

$X(O) = 1, \quad X(R) = -1$

Jak wygląda dystrybuanta?

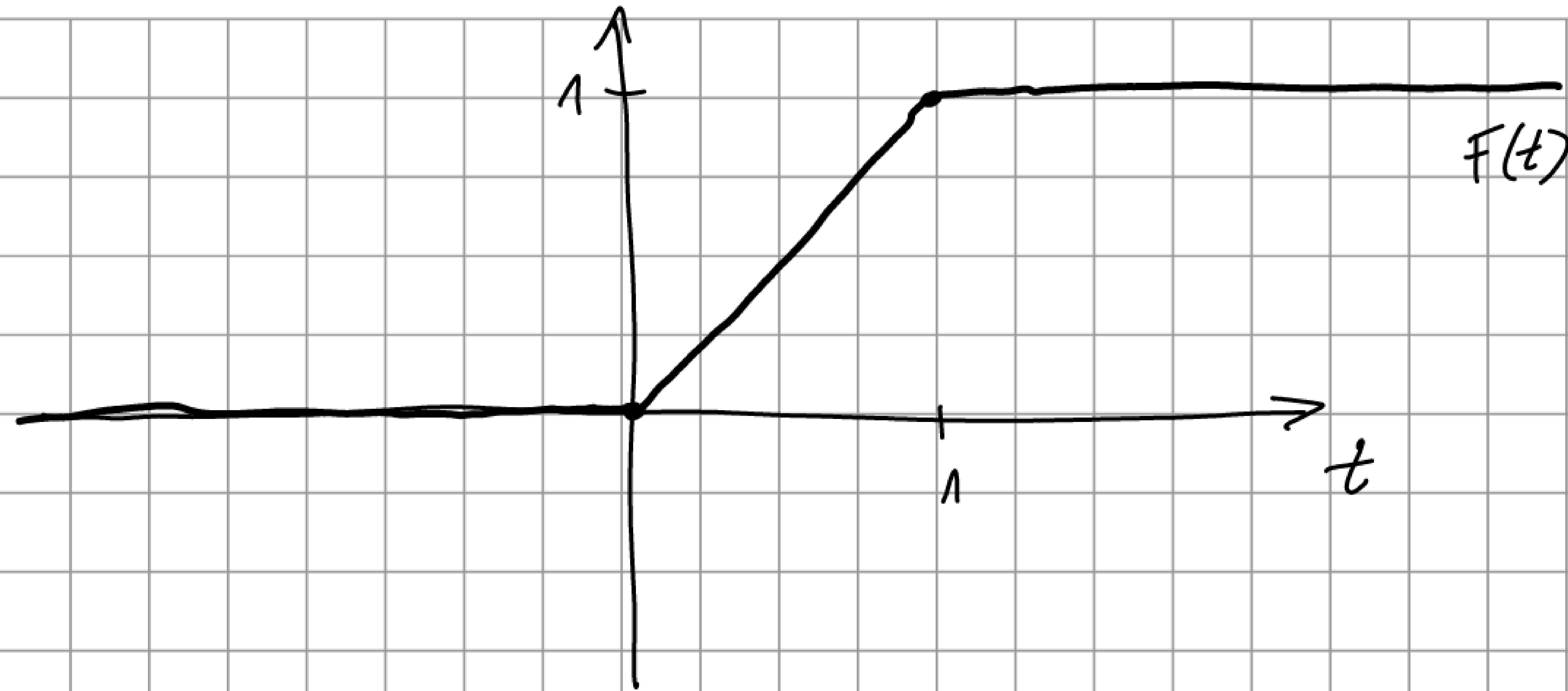
$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < -1 \\ \frac{1}{2} & t \in [-1, 1) \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$$



2) Losujemy jednostajnie liczbę z przedziału $[0,1]$. $([0,1], Bor[0,1], \lambda)$, $X(\omega) = \omega$.

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \leq 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$$

$$\mathbb{P}[X \leq t] = \lambda([0,t]) = t$$



Tw. 3.7 : Własności dystrybuanty

1. F jest niemalejąca
2. $\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0$, $\lim_{t \to \infty} F(t) = 1$
3. F jest prawostronnie ciągła
4. Dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ istnieje lewostronna granica

$$F(t-) = \lim_{s \to t^-} F(s) = \mathbb{P}[X < t]$$

5. F jest nieciągła w punkcie t_0 iff $\mathbb{P}[X = t_0] > 0$. Wówczas $\mathbb{P}[X = t_0] = F(t_0) - F(t_0-)$.

Punkt t_0 nazywamy **atomem** rozkładu.

D-d.

2. Niech $t_n \nearrow \infty$. Wtedy $\{(-\infty, t]\}$ jest wstępującą rodziną zbiorów.

$\bigcup_n (-\infty, t_n] = \mathbb{R}$. Z lematu o ciągłości miary $\lim_{n\to\infty} F(t_n) = \lim_{n\to\infty} \mu((-\infty, t_n]) =$

$$= \mu(\mathbb{R}) = 1.$$

3. Ustalmy $t \in \mathbb{R}$, $t_n \searrow t$.
Wtedy $(t, t_n]$ jest zstępującą rodziną zbiorów.

$$\lim_{n\to\infty} \mu((t, t_n]) = \mu(\emptyset) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} F(t_n) - F(t) \Rightarrow F(t) = \lim_{t_n \searrow t} F(t_n).$$

$$\mu((-\infty, t_n]) - \mu((-\infty, t])$$

$$\mu((t, t_n])$$

5. $F(t_0) - F(t-) = \mu((-\infty, t_0]) -$

$- \lim_{t_n \to t^-} \mu((-\infty, t_n]) =$

$= \lim_{t_n \to t^-} \mu((-\infty, t_0]) - \mu((-\infty, t_n]) =$

$= \lim_{t_n \to t^-} \mu((t_n, t_0]) =$

$= \lim_{t_n \to t^-} \underbrace{\mu((t_n, t_0))}_{\to 0} + \mu(\{t_0\}) = \mu(\{t_0\}) =$

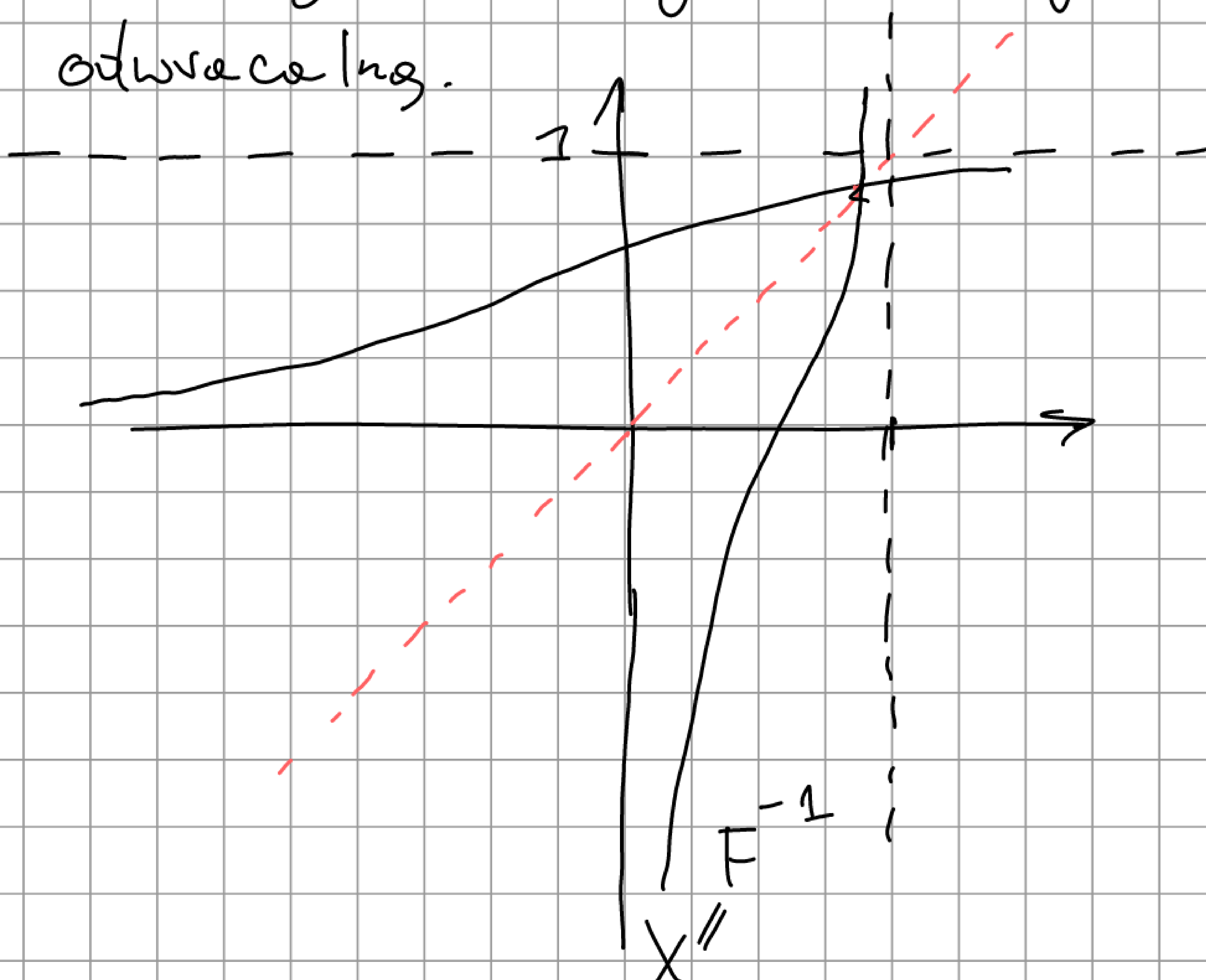
$= \mathbb{P}[X = t_0]$.

<u>TW. 3.8</u> Jeżeli F jest funkcją na $\mathbb{R}$ spełniającą warunki 1, 2 i 3 z poprzedniego twierdzenia, to F jest dystrybuantą pewnego rozkładu.

<u>D-d.</u> Chcemy znaleźć p. prob. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ oraz $X: \Omega \to \mathbb{R}$ t. że $F = F_X$ (dystrybuanta X).

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) := ([0,1], Bor([0,1]), \lambda)$$

I Załóżmy, że F jest funkcją odwracalną.



$$X(\omega) := F^{-1}(\omega)$$

Sprawdźmy: $F_X(t) = \mathbb{P}[X \leq t] =$

$= \mathbb{P}[\{\omega : X(\omega) \leq t\}] \overset{*}{=} \mathbb{P}[\{\omega : F(X(\omega)) \leq F(t)\}]$

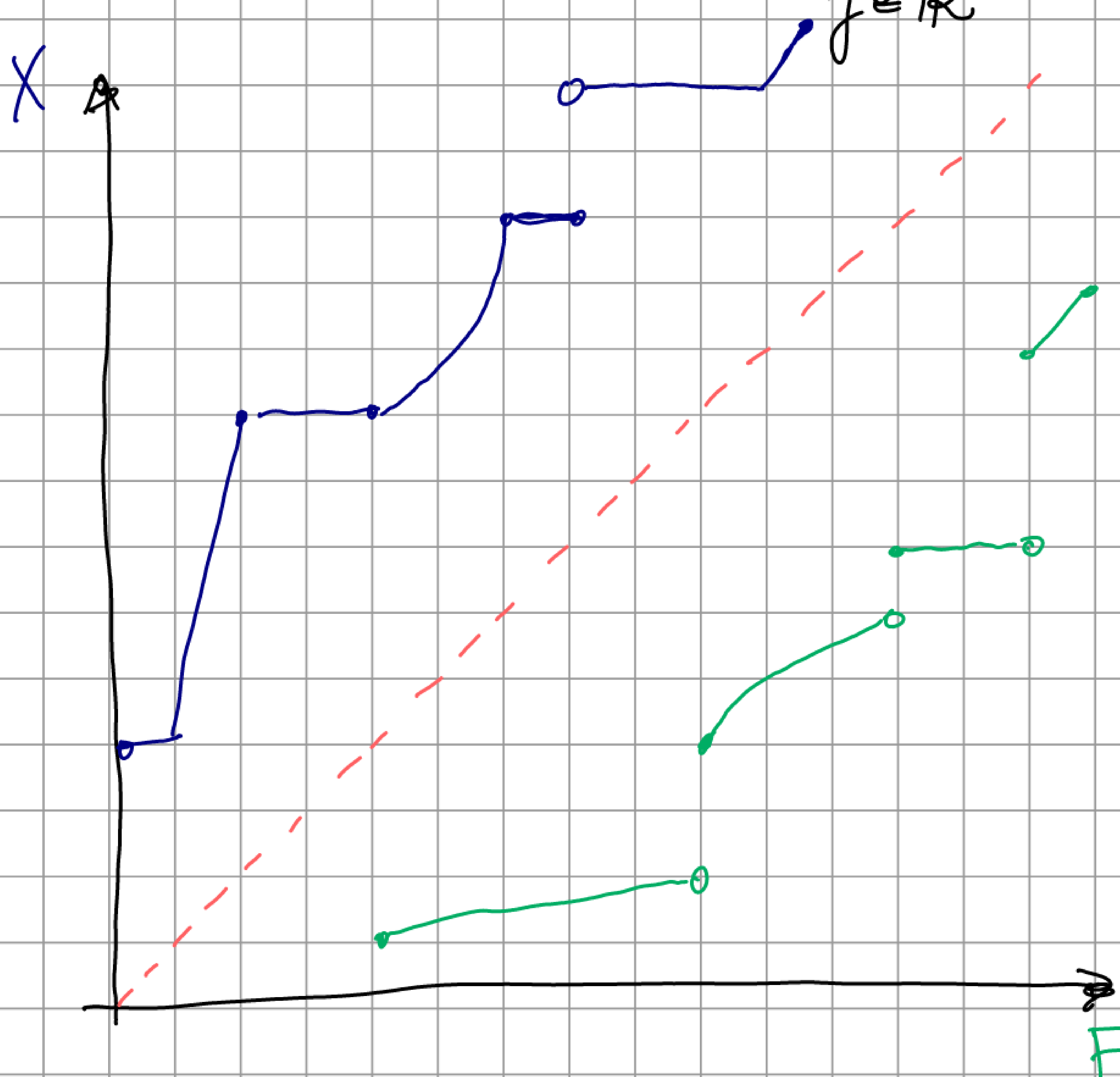
$*$ bo F niemalejąca

$= \mathbb{P}[\{\omega : \omega \leq F(t)\}] = \lambda([0, F(t)]) = F(t)$

Problem: F nie musi być odwracalna.

II Przypadek ogólny. Dla funkcji prawociągłej, niemalejącej można zdefiniować uogólnioną funkcję odwrotną.

$$X(\omega) = F^{-1}(\omega) := \inf_{y \in \mathbb{R}} \{ F(y) \geq \omega \}$$



Potrzebujemy $\underbrace{\{\omega : X(\omega) \le t\}}_{L} = \underbrace{\{\omega : \omega \le F(t)\}}_{P}$.

1. $P \subseteq L$. Weźmy $\omega \in P$. Wtedy
$\omega \le F(t)$, czyli $t \in \{y \in \mathbb{R} : F(y) \ge \omega\}$.
Zatem $X(\omega) \le t$ (z def. X).
$\Rightarrow \omega \in L$

2. $L \subseteq P$. Weźmy $\omega \in L$. Wtedy
$X(\omega) \le t$, czyli $\inf_y \{\omega \le F(y)\} \le t$,
a zatem $\omega \le F(y) \le F(t)$ (bo F niemalejąca i prawostronnie ciągła)
$\Rightarrow \omega \in P$.

<u>Pytanie</u> Czy dystrybuanta jednoznacznie wyznacza rozkład zmiennej losowej?
(zobaczmy, że zmienna losowa zależy od p. prob. i to jest bardzo elastyczne, rozkład jest już konkretny).

TW. 3.9 (o jednoznaczności)

Dystrybuanta zmiennej losowej X wyznacza jednoznacznie jej rozkład.

Alt.: Dane są dystrybuanty $F_X = F_Y$.

Chcemy pokazać, że to implikuje

$\mu_X = \mu_Y$.

(Z teorii miary wiemy, że

$\mu_X((-\infty,t]) = \mu_Y((-\infty,t]) \Rightarrow \mu_X = \mu_Y$)

Definicja 3.10 Niepustą rodzinę

$\mathcal{K}$ podzbiorów Ω nazywamy

π-układem, jeżeli jest zamknięta

na operację przekroju, tzn. $A \cap B \in \mathcal{K}$

dla wszystkich $A, B \in \mathcal{K}$.

Np. $\mathcal{K} = \{(-\infty, t] : t \in \mathbb{R}\}$

Definicja 3.11

Niepustą rodzinę $\mathcal{L}$ podzbiorów Ω nazywamy **λ-układem**, jeżeli:

- $\Omega \in \mathcal{L}$
- $A, B \in \mathcal{L} \wedge A \subset B \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{L}$
- $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ wstępujący, to $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}$

Lemat 3.12 (o π-λ układach Tw. Dynkina)

Jeżeli $\mathcal{L}$ jest λ-układem zawierającym π-układ $\mathcal{K}$, to $\mathcal{L}$ zawiera także $\sigma(\mathcal{K})$.

Throwback do MiC - tam było tw. że jeśli pierścień $R \subset \mathcal{M}$, to $\sigma(R) \subset \mathcal{M}$.

klasa monotoniczna

D-d. tw. 3.9

Chcemy pokazać, że

$F_X = F_Y \Rightarrow \mu_X = \mu_Y$, tzn. $\forall B \in \mathrm{Bor}\,\mathbb{R}$

$$\mu_X(B) = \mu_Y(B). \quad (*)$$

$\Downarrow$

wynika, że $*$ jest spełnione przez zbiory postaci $B = (-\infty, t]$. Rodzina $\mathcal{K} = \{(-\infty, t]\}_{t \in \mathbb{R}}$ tworzy π-układ.

Zdefiniujmy $\mathcal{L} = \{B \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}) : \mu_X(B) = \mu_Y(B)\}$.

$\mathcal{L}$ jest λ-układem (zadanie).

Ponadto $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$, gdyż

$$\begin{array}{ccc} F_X(t) & = & F_Y(t) \\ \| & & \| \\ \mu_X((-\infty, t]) & & \mu_Y((-\infty, t]) \end{array}$$

Z lematu 3.12 $\underbrace{\sigma(\mathcal{K})}_{= \mathrm{Bor}(\mathbb{R})} \subseteq \mathcal{L} \subseteq \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$

zatem $\mathcal{L} = \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$, więc $\mu_X = \mu_Y$.

Definicja 3.13 Zmienna losowa X o rozkładzie μ ma **rozkład dyskretny**, jeśli istnieje przeliczalny zbiór S taki, że $\mu(S)=1$. Wtedy

$$S = \{x : \mathbb{P}[X=x] > 0\}$$

jest **zbiorem atomów**.

Przykład Rozkład skupiony w punkcie $a \in \mathbb{R}$: $\mathbb{P}[X=a]=1$,

$$\mu = \delta_a, \quad S = \{a\}.$$

Przykład Rozkład dwumianowy (Bernoulliego) z parametrami n, p ($n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$): X ma rozkład $\mathrm{Bin}(n,p)$, jeśli

$$\mathbb{P}[X=k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Przykład Rozkład Poissona z parametrem $\lambda > 0$. X ma rozkład $\mathrm{Pois}(\lambda)$, jeżeli

$$\mathbb{P}[X=k] = \frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

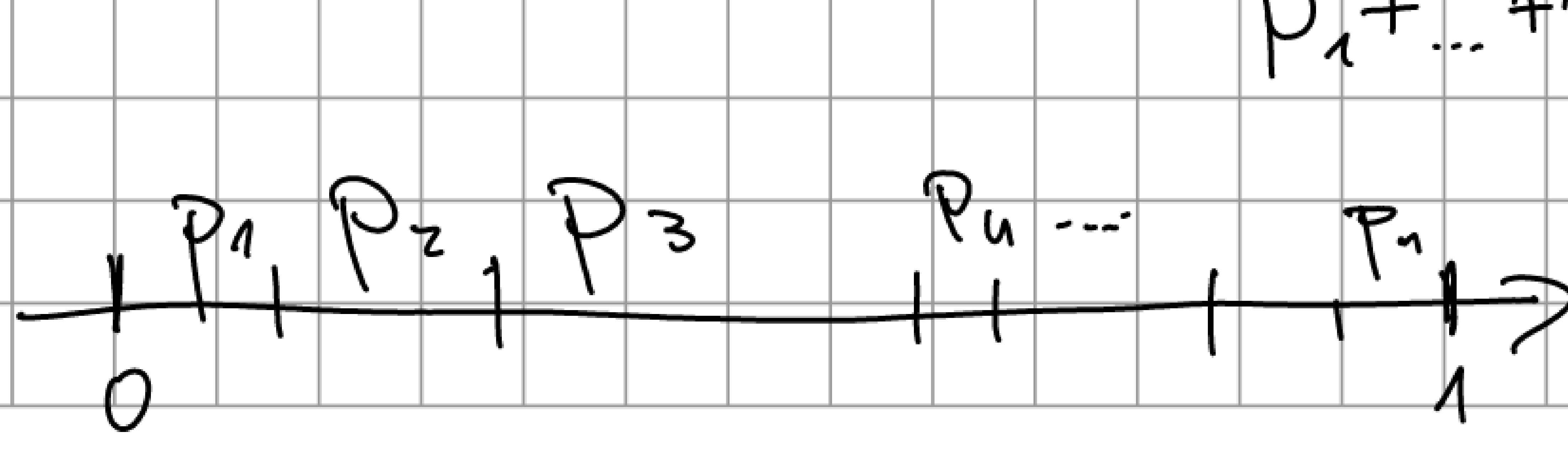
Ten rozkład ma duży związek z rozkładem dwumianowym. Przy odpowiednim doborze parametrów dobrze przybliża Bin, a łatwiej go używać.

Przykład Ogólnie: jeżeli $S = \{s_1, s_2, \dots\}$ oraz $p_k > 0$ t. że $\sum_k p_k = 1$, to istnieje zmienna losowa spełniająca

$$\mathbb{P}[X = s_k] = p_k$$

$([0,1], \mathrm{Bor}([0,1]), \lambda)$, $X(\omega) = s_i$, gdy

$$p_1 + \dots + p_{i-1} < \omega \leq p_1 + \dots + p_i$$



Definicja 3.14 Zmienna losowa X o rozkładzie μ ma rozkład **absolutnie ciągły** (względem miary Lebesgue'a), jeżeli istnieje funkcja borelowska $f: \mathbb{R} \to [0, \infty)$ taka, że dla $B \in Bor(\mathbb{R})$

$$\mathbb{P}[X \in B] = \mu(B) = \int_B f \, d\lambda$$

Funkcję f nazywamy **gęstością** rozkładu X.

(Funkcja f nie jest dowolna: musimy założyć, że $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, $f \geq 0$

Wtedy $\mu([a,b]) = \int_a^b f(x)dx$ jest miarą prob. na $\mathbb{R}$)

Istnieje związek między dystrybuantą, a gęstością:

$$F(t) = \mu((-\infty, t]) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx.$$

Jeżeli f jest ciągła, to
$$F'(t) = f(t).$$

Przykład Rozkład jednostajny na $[0,1]$: $X \sim U([0,1])$.

$$f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$

$$\underbrace{X \text{ ma rozkład}}_{\sim} \; \underbrace{\text{jednostajny na odcinku } [0,1]}_{U([0,1])}$$

$$X \sim U([0,1])$$

Przykład Ogólniej, dla dowolnego $D \in Bor(\mathbb{R})$ o niezerowej mierze możemy zdefiniować gęstość

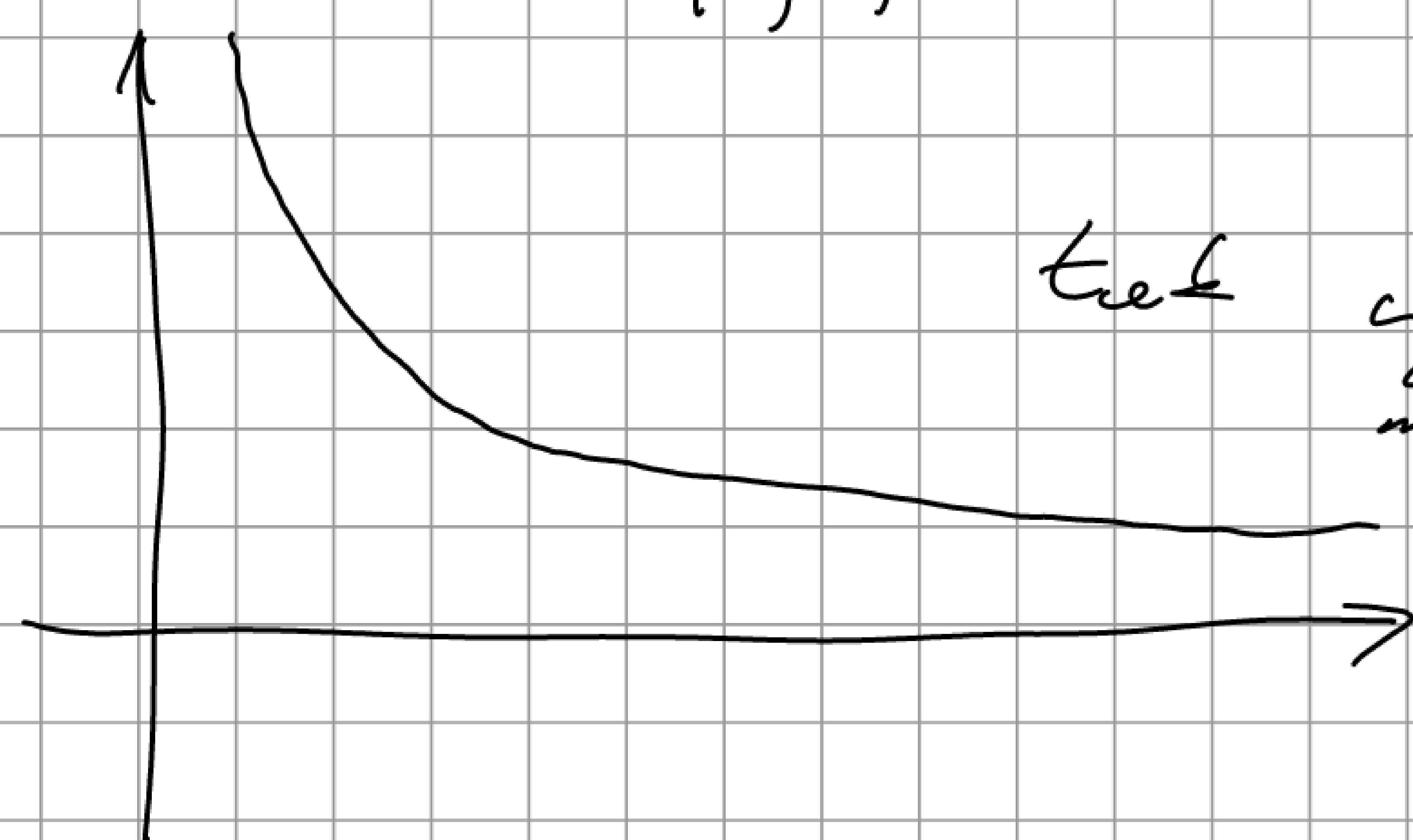
$$f(x) = \frac{\mathbb{1}_D(x)}{\lambda(D)}$$

Wtedy, dla $B \in Bor(\mathbb{R})$

$$\mathbb{P}[X \in B] = \int_B f(x)\,dx = \frac{\lambda(B \cap D)}{\lambda(D)}$$

Przykład Rozkład wykładniczy z parametrem λ $(\lambda > 0)$: $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x), \quad F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

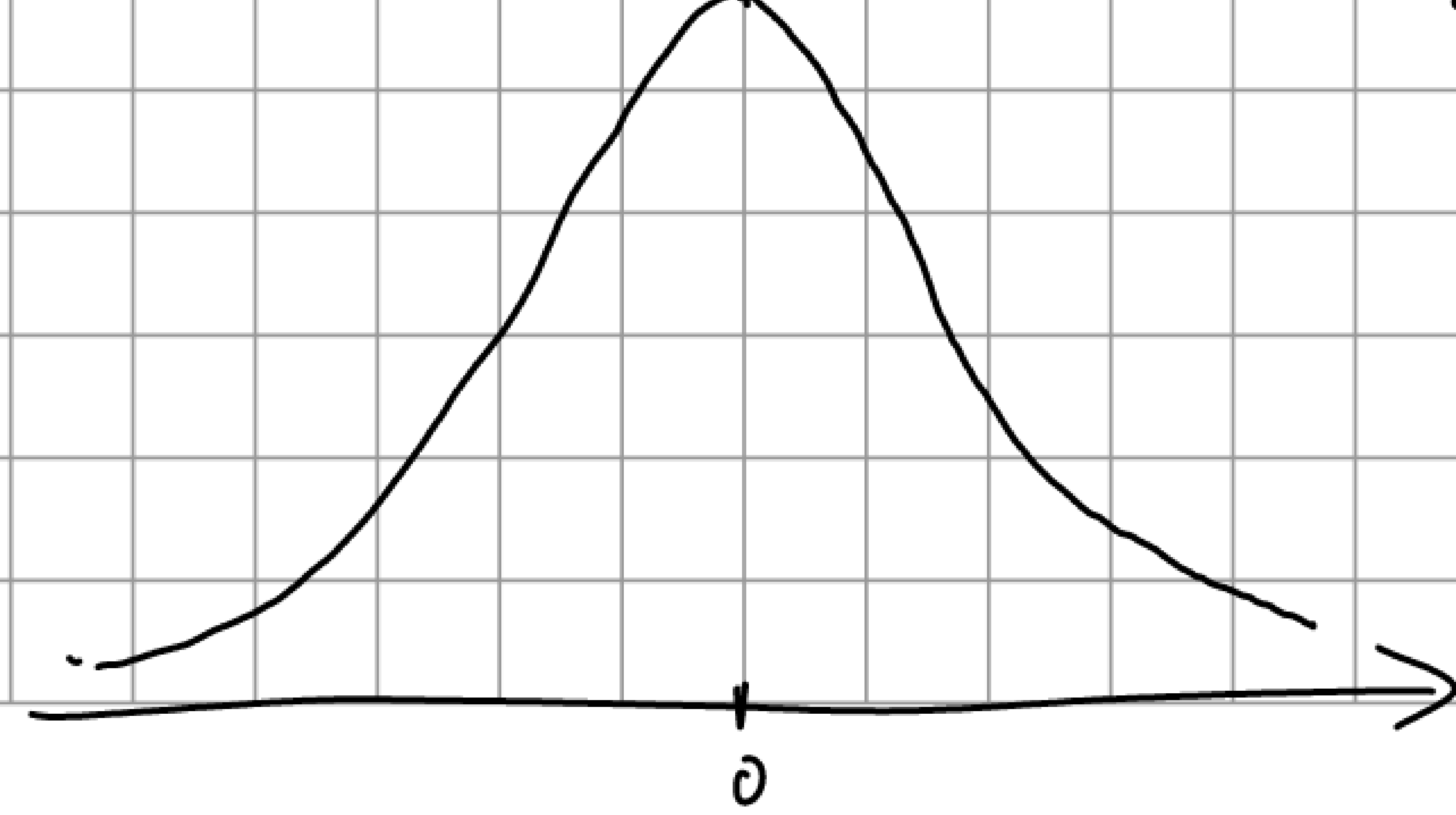


tak wygląda mniej więcej.

Przykład Rozkład Gaussa (normalny):

$$X \sim N(0,1)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$



Rozkłady dyskretne i ciągłe nie wyczerpują wszystkich możliwości. Wiemy, że każdą miarę μ można jednoznacznie zapisać w postaci $\mu = \mu_{abs} + \mu_{sing}$

gdzie $\mu_{abs} \ll \lambda$ oraz $\mu_{sing} \perp \lambda$.