03.03.2021

Przypomnienie:

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — przestrzeń probabilistyczna

- Ω: przestrzeń (dyskretna, ciągła, po prostu zbiór punktów)
- $\mathcal{F}$: σ – ciało na Ω
- $\mathbb{P}$: miara, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

Zawsze powinniśmy mieć z tyłu głowy jaką przestrzeń probabilistyczną rozważamy.

P-stwo geometryczne

Pytanie: jak losować punkty z odcinka $[0, 1]$?

Chcielibyśmy wziąć $x \in [0, 1]$, $\mathbb{P}[\{x\}] > 0$.

żeby była jednostajna $(x \neq y \Rightarrow \mathbb{P}[\{x\}] = \mathbb{P}[\{y\}])$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{P}[\{x\}] = 0.$$

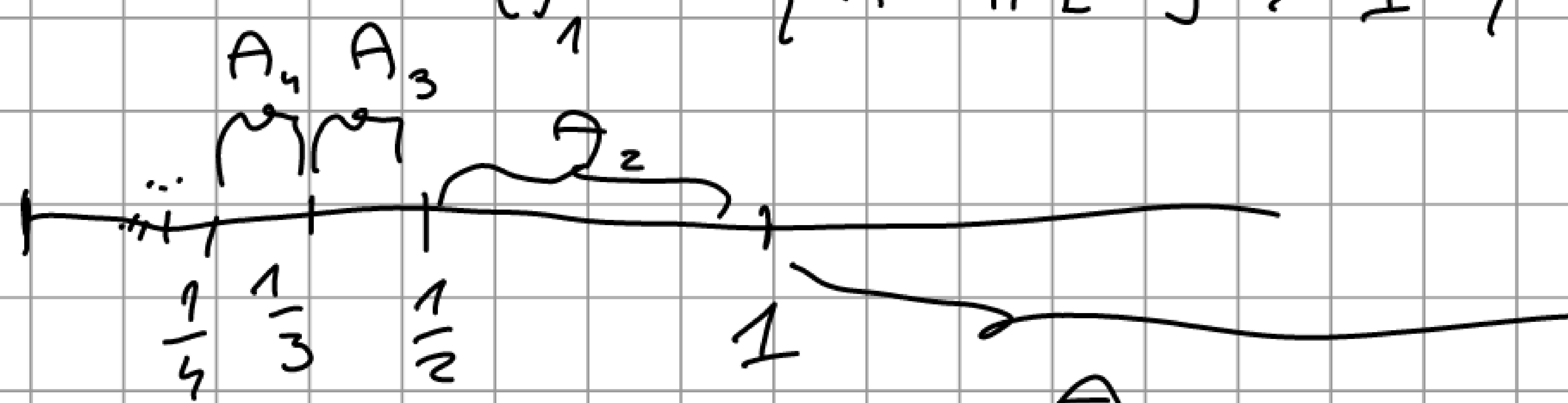
Jeżeli miara nie musi być jednostajna, to i tak się nie da tak zrobić, żeby $\forall x \in [0,1]$ $\mathbb{P}[\{x\}] > 0$, bo mielibyśmy

$$(*) \quad \sum_{x \in [0,1]} \mathbb{P}[\{x\}] = \infty$$

Szkic dowodu $(*)$:

Zdefiniujmy $A_n := \{x : \mathbb{P}[x] \in (\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}]\}$

$A_1 := \{x : \mathbb{P}[x] > 1\}$



A_1 (przeciwobraz)

$\bigcup A_n = [0,1]$

przeliczalna suma

nieprzeliczalne

$\Downarrow$

$\exists k$ t. że A_k nieprzeliczalne

$\Downarrow$

$$\sum_{x \in A_k} \mathbb{P}[\{x\}] = \infty$$

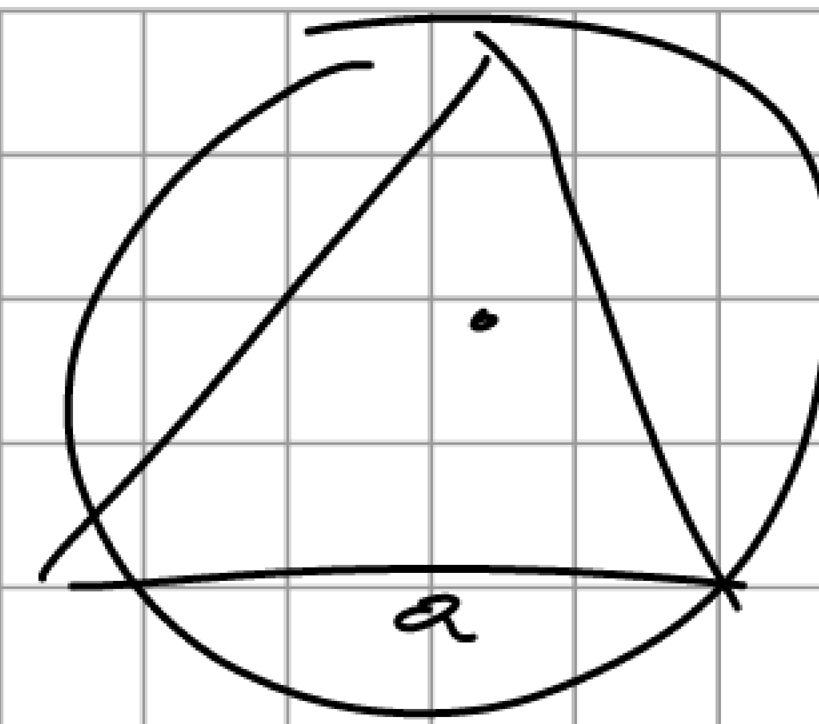
To nam mówi, że nie możemy za bardzo zrobić sensownej miary „na punktach".
Jeżeli zależy nam na sensownej jednostajnej mierze, to bierzemy miarę Lebesgue'a:

$$([0,1], \mathrm{Bor}[0,1], \mathrm{Leb})$$

__Przykład__ Paradoks Bertranda

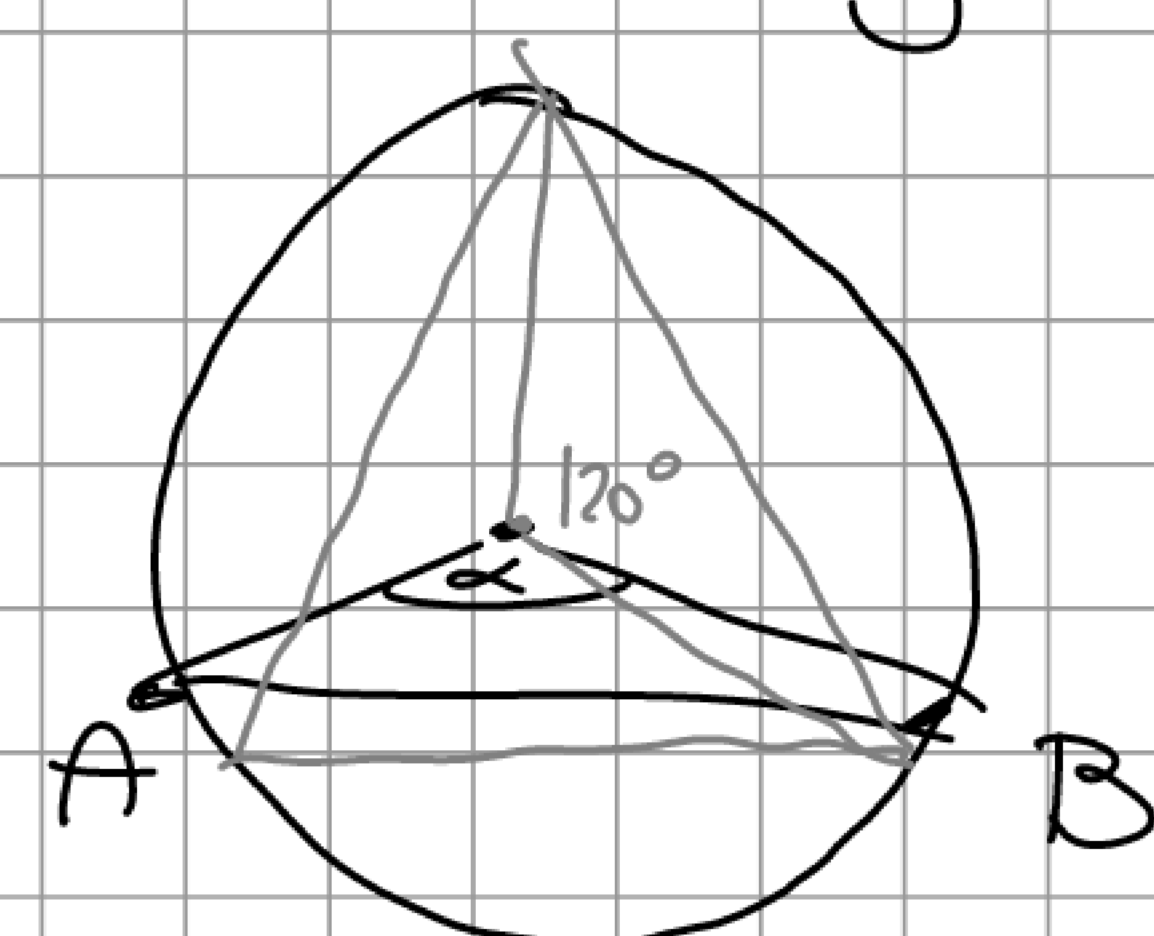
W okręgu o promieniu 1 wybrano losowo cięciwę AB. Jakie jest p-stwo, że będzie ona dłuższa niż bok trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg?

Cel: $\mathbb{P}[|AB| > a]$



Rozw. 1

Dł. cięciwy zależy jedynie od kąta, na którym jest rozwarta:



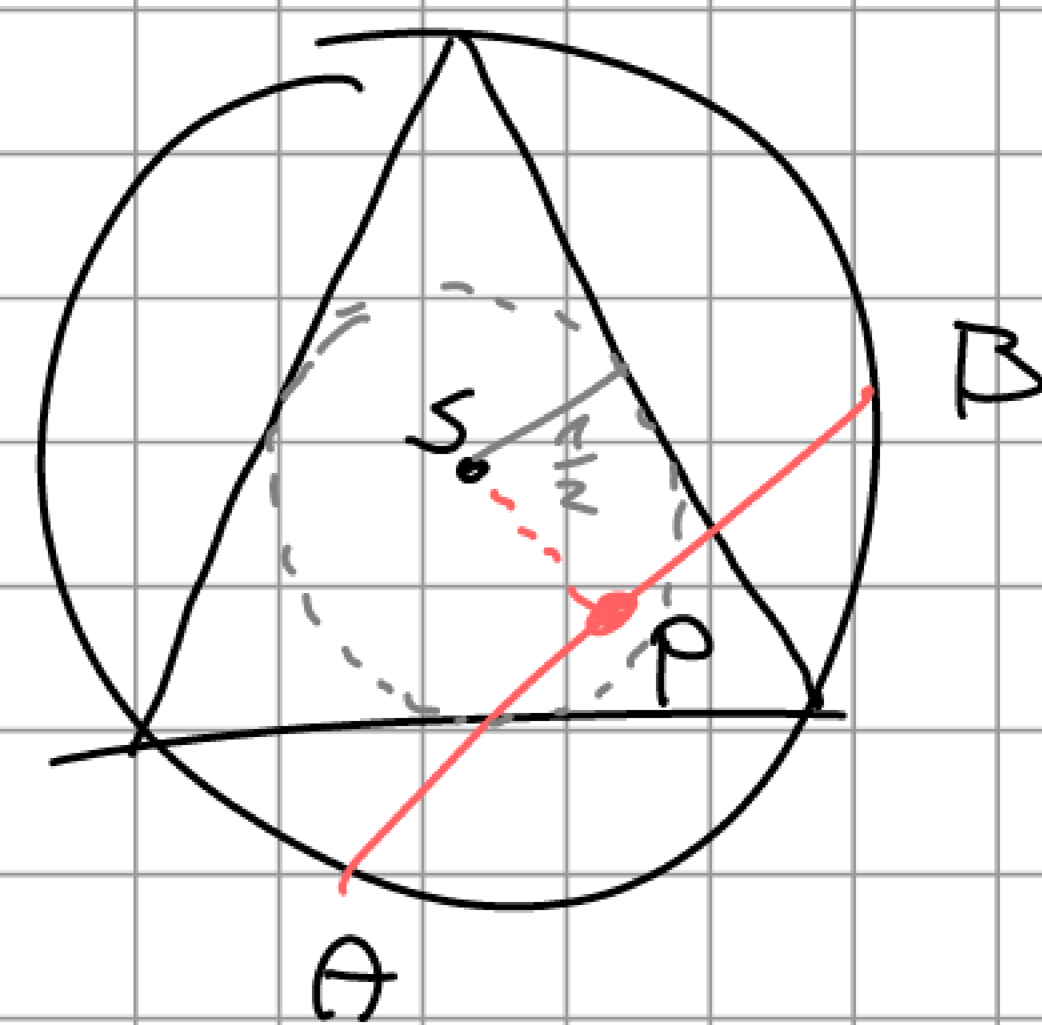
$$|AB| > a \iff \alpha > \frac{2}{3}\pi, \quad \alpha \in [0, \pi]$$

Nasza p. prob. to teraz:

$$\left([0, \pi], \mathcal{B}or([0,\pi]), \frac{1}{\pi} Leb\right)$$

$$\mathbb{P}\left(|AB| > \frac{2}{3}\pi\right) = \frac{1}{3}$$

Rozw. 2



$|AB|$ jest jedn. wyznaczona przez długość $|SP|$.

$|AB| > a$ iff P leży wewnątrz koła wpisanego w trójkąt.

Nasza przestrzeń:

$$\Big(\underset{\mathbb{R}^2}{\underset{\cap}{B(0,1)}},\ Bor(B(0,1)),\ \frac{1}{\pi} Leb_2 \Big)$$

$$\mathbb{P}[|AB| > a] = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \pi}{\pi} = \frac{1}{4}$$

Rozw. 3

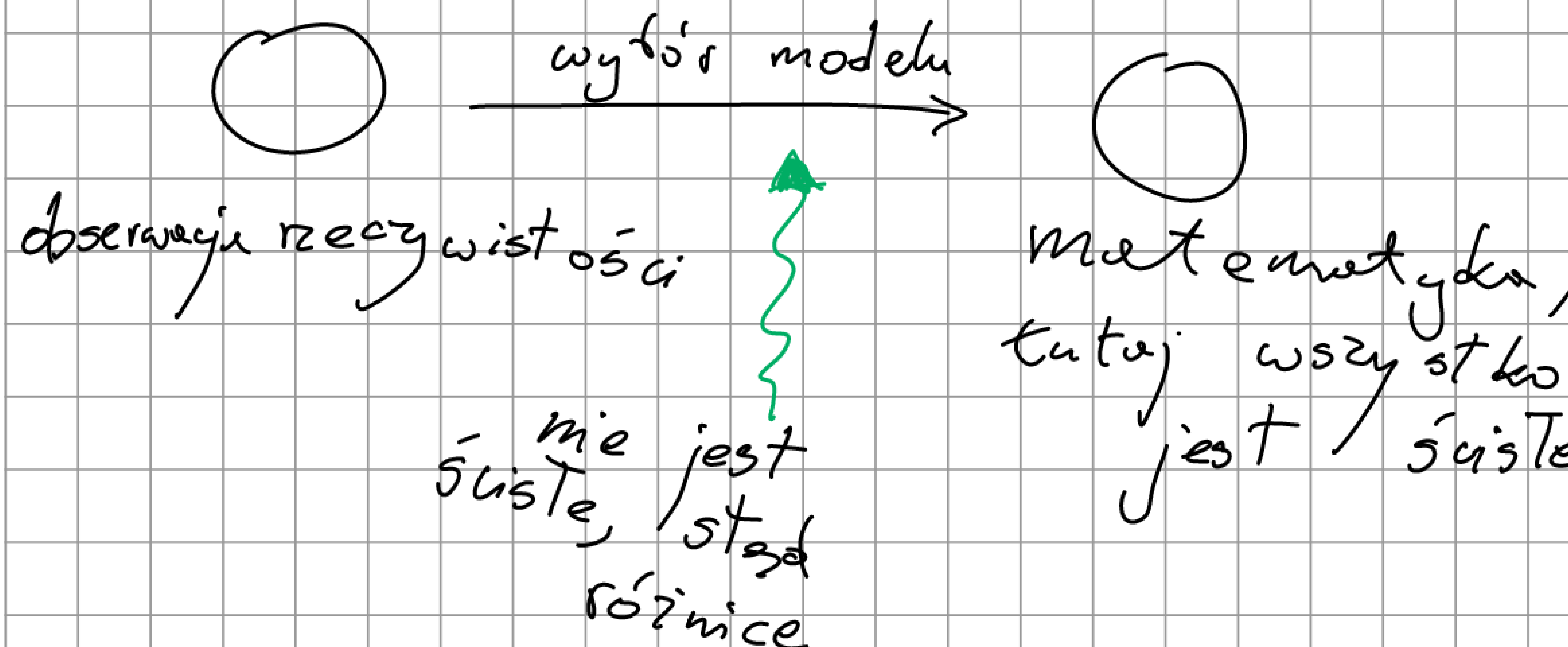
Wybór cięciwy jest niezmiennicza na obroty.

Możemy po prostu wylosować punkt z promienia okręgu, wyznaczy on cięciwę.

P. prob: $([0,1], \mathcal{B}or([0,1]), leb)$

$$\mathbb{P}(|AB| > a) = \frac{1}{2}$$

<u>Morał:</u> wszystko zależy od wyboru p. probabilistycznej:



P-stwo warunkowe.

<u>Motywacja</u> Powiedzmy, że chcemy liczyć średnie składki emerytalne. Mężczyźni żyją średnio 70 lat, jednak że jeśli facet dożyje wieku

emerytalnego, to dożyje średnio 83 roku życia.

<u>**Def. 2.1.**</u> $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – p. prob. oraz A, B takie zdarzenia, że $\mathbb{P}[B] > 0$. **P-stwo warunkowe** zdarzenia A pod warunkiem B nazywamy liczbę

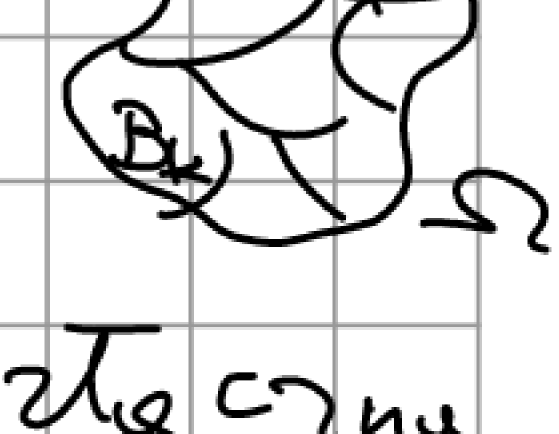
$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$$

Wówczas przy ustalonym zbiorze B, miara $\mathbb{P}[\cdot \,|\, B]$ jest miarą prob. na $(\Omega, \mathcal{F})$.

<u>**Def. 2.2**</u> Rodzina $\{B_k\}_{k=1}^{n}$ (dopuszczamy $n=\infty$) jest **rozbiciem** zbioru Ω, gdy

$$\Omega = \dot{\bigcup_{k=1}^{n}} B_k$$

suma rozłączna.



(Wystarczyłoby $\mathbb{P}[\Omega - \bigcup B_k] = 0$)

TW.2.3 Wzór na p-stwo całkowite

$\{B_k\}_k^n$ – rozbicie Ω takim, że $\mathbb{P}[B_k] > 0$, to dla $A \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}[A] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}[A \mid B_k] \cdot \mathbb{P}[B_k]$$

D-d.

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A \cap \underbrace{\bigcup_k^n B_k}_{=\Omega}] = \mathbb{P}[\bigcup_k^n \underbrace{A \cap B_k}_{\text{rozł.}}] =$$

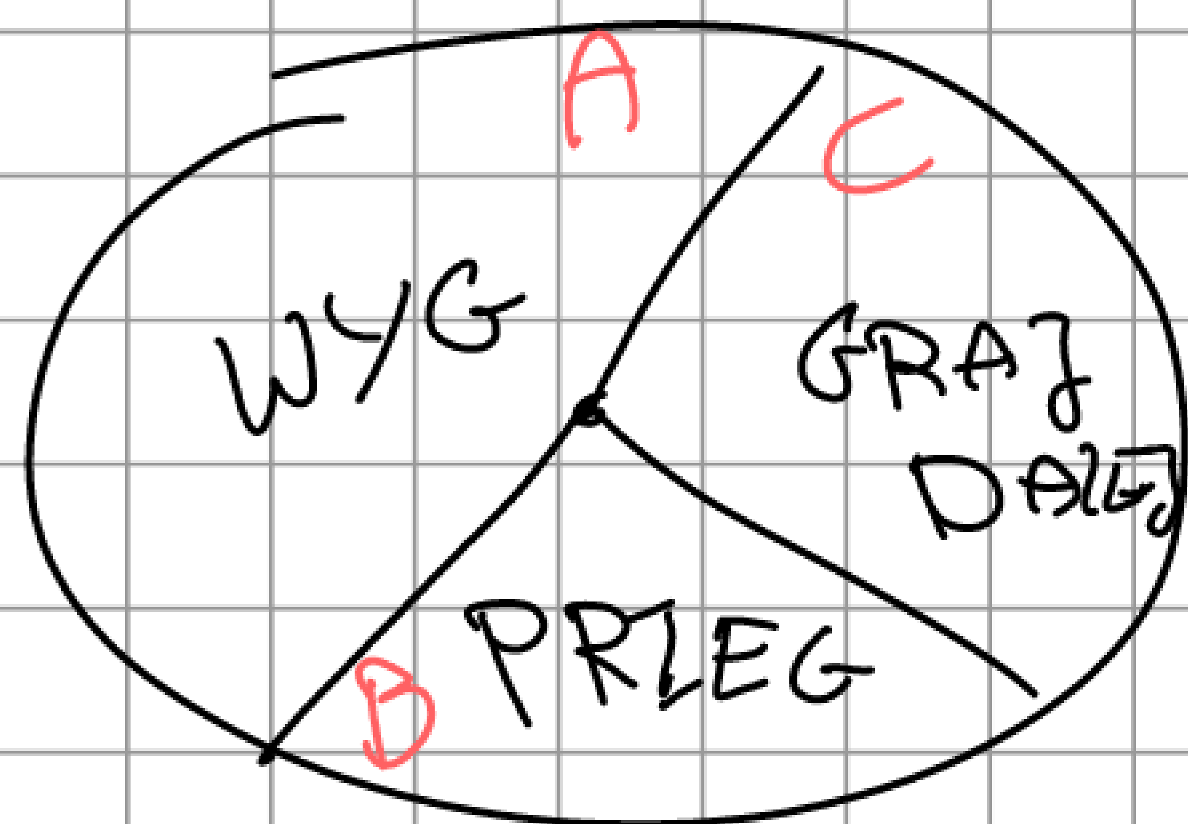
$$= \sum_k^n \mathbb{P}[A \cap B_k] = \sum_k^n \mathbb{P}[A \mid B_k] \mathbb{P}[B_k]$$

■

Przykład Gramy na loterii.

Wyciągamy los. Z p-stwem p wygrywamy, z p-stwem q przegrywamy, z p-stwem r ciągniemy jeszcze raz (los „graj dalej").

Jakie jest pstwo wygranej?



$$\mathbb{P}[W] = \overset{1}{\mathbb{P}[W|A]} \cdot \overset{p}{\mathbb{P}[A]} + \overset{0}{\mathbb{P}[W|B]} \cdot \overset{q}{\mathbb{P}[B]} + \underset{\mathbb{P}[W]}{\mathbb{P}[W|C]} \cdot \underset{r}{\mathbb{P}[C]} =$$

$$= p + \mathbb{P}[W] \cdot r$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{P}[W] = \frac{p}{1-r} = \frac{p}{p+q}$$

<u>Dygresja:</u> z punktu widzenia probabilistyki zbiory miary 0 są „niewidoczne", nie zmieniają ani nie wpływają na przebieg doświadczenia.

TW. 2.4 Wzór Bayesa

Przy założeniach jak wyżej, jeżeli $\mathbb{P}[A] > 0$, to dla każdego k

$$\mathbb{P}[B_k | A] = \frac{\mathbb{P}[A | B_k] \cdot \mathbb{P}[B_k]}{\sum_{i}^{n} \mathbb{P}[A | B_i] \mathbb{P}[B_i]}$$

D-d.

$$\mathbb{P}[B_k | A] = \frac{\mathbb{P}[B_k \cap A]}{\mathbb{P}[A]} = \frac{\mathbb{P}[B_k | A] \cdot \mathbb{P}[A]}{\sum_i \mathbb{P}[A | B_i] \mathbb{P}[B_i]}$$

popr. tw.

def. prawd. warunk.

Przykład Mamy 100 monet, jedna jest fałszywa i ma orła po obu stronach. Wybieramy losową monetę i rzucamy nią 10 razy. Otrzymaliśmy 10 orłów. Jakie jest p-stwo, że wylosowaliśmy fałszywą monetę?

(ma orła po dwóch stronach)

Krok 1. Wybór monety

Krok 2. 10 raz rzucamy

Wynik: 10 orłów

używamy wyniku do analizy poprzednich kroków

B_1 – dobra moneta

B_2 – fałszywa moneta

A – 10 orłów

$\Omega = B_1 \cup B_2$

$$\mathbb{P}[B_2 \mid A] = \frac{\mathbb{P}[A \mid B_2]\,\mathbb{P}[B_2]}{\mathbb{P}[A \mid B_1]\,\mathbb{P}[B_1] + \mathbb{P}[A \mid B_2]\,\mathbb{P}[B_2]} =$$

$$= \frac{1 \cdot \frac{1}{100}}{\frac{1}{2^{10}} \cdot \frac{99}{100} + 1 \cdot \frac{1}{100}} \approx 0.91$$

Przykład Pewna choroba zaraża jedną na 1000 osób. Test na tę chorobę wykrywa ją z p-stwem 99%, a u osób zdrowych działa poprawnie z p-stwem 95%. Załóżmy, że u losowej osoby test wyszedł pozytywny. Jakie jest p-stwo, że naprawdę jest chora?

Zdarzenia:

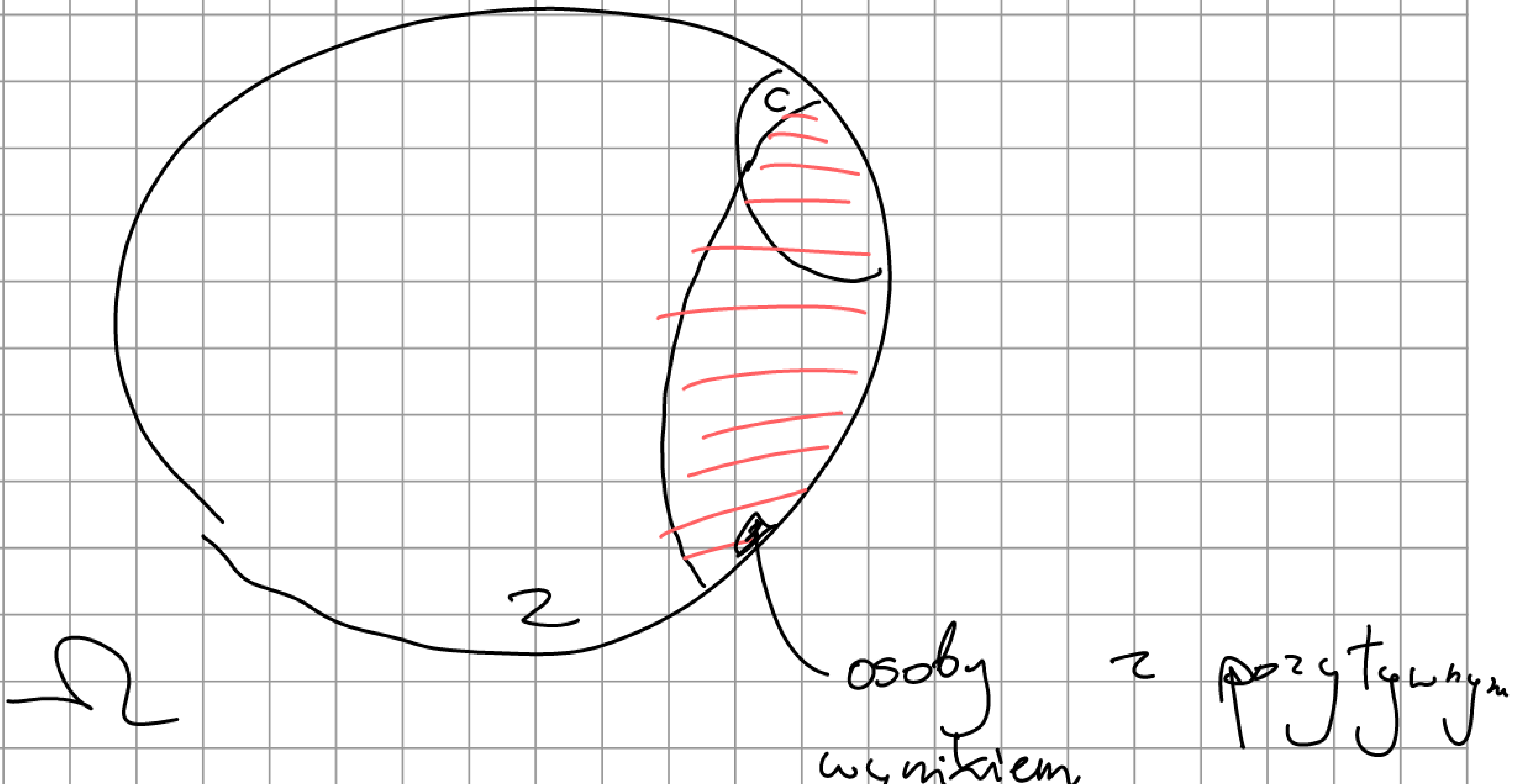
C - chora, Z - zdrowa. $\Omega = C \cup Z$

T - pozytywny test

$$\mathbb{P}[C \mid T] = \frac{\mathbb{P}[T \mid C] \cdot \mathbb{P}[C]}{\mathbb{P}[T \mid C] \cdot \mathbb{P}[C] + \mathbb{P}[T \mid Z] \cdot \mathbb{P}[Z]} =$$

$$= \frac{0.99 \cdot \frac{1}{1000}}{\frac{99}{100} \cdot \frac{1}{1000} + \frac{5}{100} \cdot \frac{999}{1000}} = 0.194\ldots$$

SZOK!



Lekarz do pacjenta:

„Niech będzie pan spokojny. Ze wzoru Bayesa wynika że jest tylko 19,4% szans, że jest pan chory!"

NIEZALEŻNOŚĆ ZDARZEŃ

<u>Motywacja:</u> jeżeli zdarzenie A nie zależy od zdarzenia B,

to chcielibyśmy mieć równość $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A \mid B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$

Stąd definiujemy:

Def. 2.5. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – p. prob.

Wtedy zdarzenia $A, B \in \mathcal{F}$ są **niezależne**, gdy

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]$$

Przykład Wybieramy losową dziewczynę posiadającą n dzieci. Niech A będzie zdarzeniem, że w wybranej rodzinie jest co najwyżej jedna dziewczynka, a B zdarzeniem, że są dziewczyny i chłopcy.

Czy A jest niezależne z B?

$\Omega = \{d, c\}^n$ – płeć dzieci wg wieku

$|A| = n+1$, $|B| = 2^n - 2$.

$|A \cap B| = n$

$$\mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B] = \frac{n+1}{2^n} \cdot \frac{2^n - 2}{2^n}$$

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \frac{n}{2^n}$$

$$\frac{n}{2^n} = \frac{n+1}{2^n} \cdot \frac{2^n-2}{2^n}$$

$$\Downarrow$$

$$2^n = 2n+2$$

$$n = 3$$

Morał: niezależność jest czysto algebraicznym pojęciem.

Trzeba o tym myśleć w kategoriach definicji, a nie intuicji.

Def. 2.6. Zdarzenia $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ nazywamy **niezależnymi**, gdy

$$\mathbb{P}[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}] = \mathbb{P}[A_{i_1}] \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}[A_{i_k}]$$

dla każdego ciągu $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$, $k = 2, 3, \ldots, n$.

Def. 2.7 Zdarzenia $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ nazywamy **niezależnymi parami**, gdy dla dowolnej pary $i \neq j$ A_i jest niezależne z A_j

Przykład Rzucamy 2 razy kostką

- A – za pierwszym razem wypadła parzysta l. oczek
- B – za drugim razem wypadła parzysta liczba oczek
- C – suma l. oczek jest parzysta

Wówczas A, B, C są parami niezależne, ale NIE są niezależne.

<u>Def. 2.8</u> Załóżmy, że $\{A_i\}_{i \in I}$ jest pewną rodziną zdarzeń. Mówimy, że zdarzenia są **niezależne**, jeżeli wszystkie skończone podzbiory $\{A_i\}$ są niezależne.

<u>Def. 2.9</u> $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – p. prob., $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ będą σ-ciałami zawartymi w $\mathcal{F}$. Mówimy, że te σ-ciała są **niezależne**, gdy dla dowolnych $A_1 \in \mathcal{F}_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}_n$ zachodzi

$$\mathbb{P}[A_1 \cap \dots \cap A_n] = \mathbb{P}[A_1] \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}[A_n].$$

Dowolna rodzina $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ jest niezależna, gdy każdy jej skończony

Podzbiór jest niezależny.

Tw. 2.10 σ-ciała $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$ są niez. $\Longleftrightarrow$ dowolne zdarzenia $A_1, \ldots, A_n$ są niezależne.

Przykład Rzucamy 2 razy kostką. Niech $\Omega = \{(i,j) : i,j \in \{1 \ldots 6\}\}$, $\mathcal{F}$ składa się ze wszystkich podzbiorów Ω, a $\mathbb{P}$ jest miarą prob. Rozważmy dwa σ-ciała

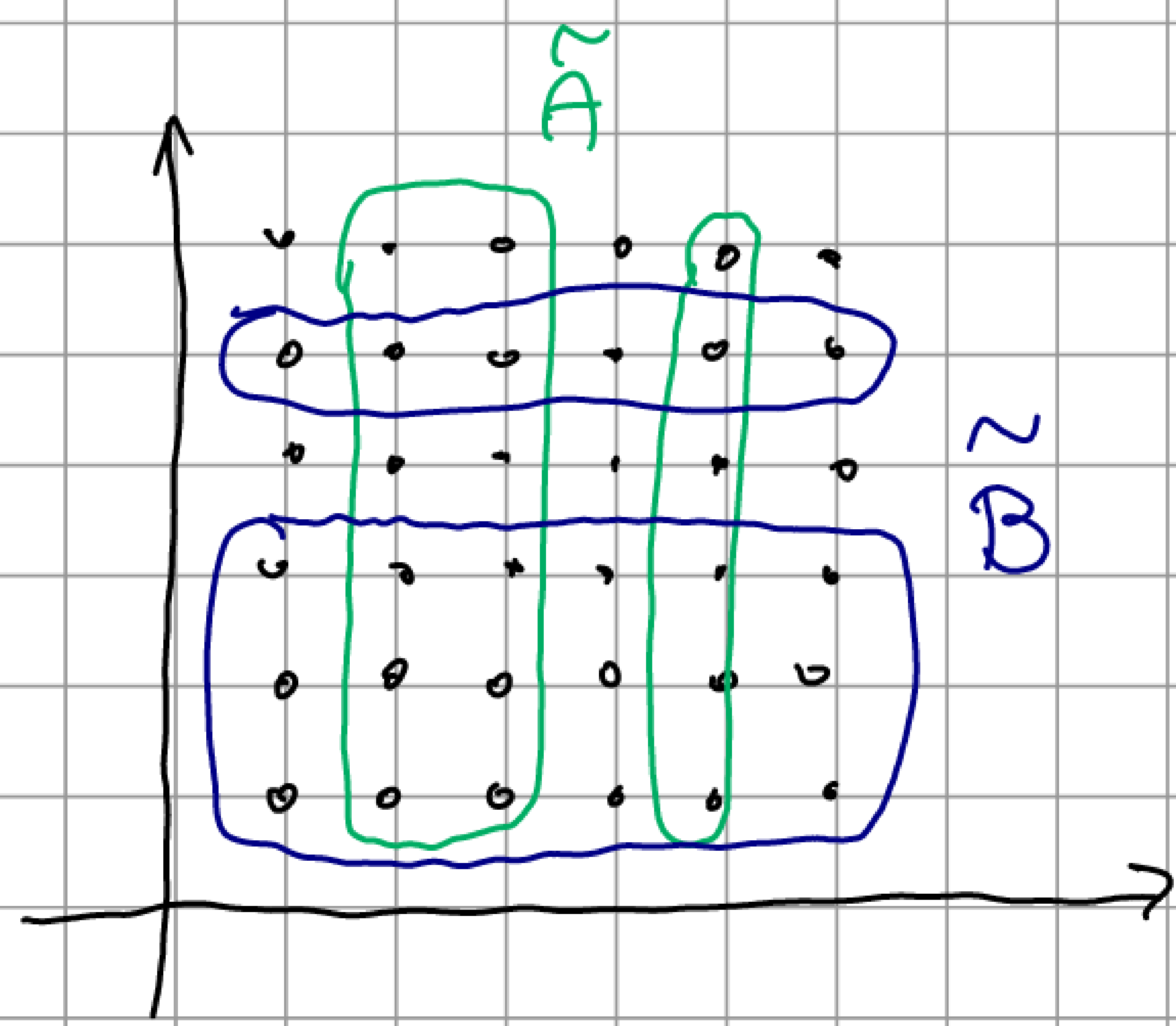
$$\mathcal{F}_1 = \{A \times \{1, \ldots, 6\} : A \subset \{1, \ldots, 6\}\}$$

$$\mathcal{F}_2 = \{\{1, \ldots, 6\} \times B : B \subset \{1, \ldots, 6\}\}$$

Pokazać, że $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ są niezależne.

Rozw. $\underbrace{A \times \{1, \ldots, 6\}}_{= \tilde{A}} \in \mathcal{F}_1$, $\underbrace{\{1, \ldots, 6\} \times B}_{= \tilde{B}} \in \mathcal{F}_2$.

$$\mathbb{P}[\tilde{A} \cap \tilde{B}] = \mathbb{P}[A \times B] = \frac{|A| \cdot |B|}{36} = \mathbb{P}[\tilde{A}]\mathbb{P}[\tilde{B}].$$



$A = \{2, 3, 5\}$

$B = \{1, 2, 3, 5\}$

$\tilde{A}, \tilde{B}$ to sumy poziomych / pionowych prostokątów.

$$\mathbb{P}[\tilde{A}] = \frac{6 \cdot |A|}{36} = \frac{|A|}{6}$$

$$\mathbb{P}[\tilde{B}] = \frac{6 \cdot |B|}{36} = \frac{|B|}{6}$$

Co jest naszym celem?

Chcemy na tyle, na ile się da, przenieść intuicje na formalny język.

RPis polega na tym że wykonujemy doświadczenie $n \to \infty$ razy. Potrzebujemy jakąś przestrzeń, która pozwoli nam np. rzucić nieskończenie wiele razy monetą.

To są na razie pierwsze kroki
w uogólnianiu dyskretnej probabilistyki.