9.08.2021 Chcemy badać ciągi zm. los. $\{X_n\}$ i.i.d. i ich sumy $X_1 + \ldots + X_n = S_n$.

Pytamy, czy S_n zbiega (po odpowiednim znormalizowaniu) i w jakim sensie?

TW. 10.3 (Bochnera)

Funkcja φ jest f. char. pewnego rozkładu p-stwa wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest ciągła, $\varphi(0) = 1$ i jest dodatnio określona, tzn. dla każdego ciągu $t_1, \ldots, t_n$ oraz $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ zachodzi

$$\sum_{k,j \leq n} \varphi(t_k - t_j) z_k \overline{z_j} \geq 0$$

D-d. "$\Rightarrow$" $\sum_{k,j \leq n} \varphi(t_k - t_j) z_k \overline{z_j} = \sum_{k,j} \mathbb{E}\left[e^{i(t_k - t_j)X} z_k \overline{z_j}\right]$

$$= \mathbb{E}\left[\sum_{k,j} e^{it_kX} z_k \left(\overline{e^{it_jX} z_j}\right)\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_k e^{it_kX} z_k\right)\left(\overline{\sum_j e^{it_jX} z_j}\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\left|\sum_k e^{it_kX} z_k\right|^2\right] \geq 0 \qquad \left(z\overline{z} = |z|^2\right)$$

TW. 10.4 Załóżmy, że X jest zm. los. taką, że $\mathbb{E}|X_k|^k < \infty$ dla pewnej liczby naturalnej k. Wtedy f. char. φ_X ma k-tą ciągłą pochodną oraz

$$\varphi_X^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}\left[e^{itX} X^k\right].$$

W szczególności

$$\varphi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k].$$

Ponadto

$$\varphi_X(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(it)^k}{k!} \cdot \mathbb{E}X^k + o(|t|^n)$$

gdzie ostatni składnik spełnia

$$\lim_{t \to 0} \frac{o(|t|^n)}{|t|^n} = 0.$$

"Dowód" $\varphi_X(t) = \mathbb{E}e^{itX}$. Jak zróżniczkować φ_X?

Krok. 1 Należy pokazać, że $\varphi_X'(t) = \mathbb{E}[(e^{itX})']$

Krok. 2 $\varphi_X'(t) = \mathbb{E}[iXe^{itX}]$

Dowód kroku 1.

Dla $k=1$ mamy

$$\frac{\varphi_X(t+h)-\varphi_X(t)}{h} = \mathbb{E}\left[\frac{e^{i(t+h)X}-e^{itX}}{h}\right] = \mathbb{E}\left[e^{itX}\frac{e^{ihX}-1}{h}\right].$$

Zauważmy, że $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^{ihX}-1}{h} = iX$ $\left(\text{pochodna } e^{itX}\right)$

Chcemy użyć tw. Lebesgue'a. W tym celu piszemy

$$\left|e^{itX}\cdot\frac{e^{ihX}-1}{h}\right| \le \frac{|\cos(hX)-1|}{|h|} + \frac{|\sin(hX)|}{|h|}$$

$$= |X|\cdot\left(\underbrace{\sin\frac{hX}{2}\cdot\frac{\sin\left(\frac{hX}{2}\right)}{h|X|/2}}_{\le 1} + \underbrace{\frac{|\sin hX|}{|h||X|}}_{\le 1}\right) \le 2|X|$$

Z zał. $\mathbb{E}|X|<\infty$ możemy odwołać się do tw. Lebesgue'a i stąd

$$\varphi_X'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{\varphi_X(t+h)-\varphi_X(t)}{h} = \mathbb{E}\left[e^{itX}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{e^{ihX}-1}{h}\right]$$

$$= i\,\mathbb{E}\left[e^{itX}\cdot X\right]$$

TW. 10.5 Jeżeli X, Y są niezl. zm. los. to
$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$$
D-d. $\varphi_{X+Y}(t) = \mathbb{E}e^{it(X+Y)} = \mathbb{E}e^{itX}\mathbb{E}e^{itY} = \varphi_X(t)\varphi_Y(t).$ $\blacksquare$

TW. 10.6 (o jednoznaczności)

Jeżeli rozkłady μ i ν na $\mathbb{R}$ mają równe funkcje charakterystyczne
$$\varphi_\mu(t) = \varphi_\nu(t), \quad t \in \mathbb{R}$$
to $\mu = \nu$.

D-d. Pokażmy, że
$$\left.\begin{aligned} &\forall f \in C(\mathbb{R}) \\ &\int_{\mathbb{R}} f\,d\mu = \int_{\mathbb{R}} f\,d\nu \end{aligned}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} \mu = \nu$$

Narzędzie: tw. Weierstrassa: jeżeli f jest funkcją ciągłą i okresową na $\mathbb{R}$ (o okr. T, $f(x+T) = f(x)$) to możemy f przybliżyć ciągiem wiel. tryg. o tym samym okresie co f.

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(a_k \sin\frac{2\pi k x}{T} + b_n \cos\frac{2\pi k x}{T} \right)$$

$$f_n \rightrightarrows f$$

Wiemy: $\varphi_\mu(t) = \varphi_\nu(t)$, czyli

$$\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, d\nu(x)$$

$$\sin tx = \frac{e^{itx} - e^{-itx}}{2i}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \sin tx\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \sin tx\, d\nu(x)$$

$$\int_{\mathbb{R}} \cos tx\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \cos tx\, d\nu(x)$$

Zatem również

$$\int f_n(x)\, d\mu(x) = \int f_n(x)\, d\nu(x)$$ dla każdego wiel. tryg. f_n

Z tw. Weierstrassa mamy również

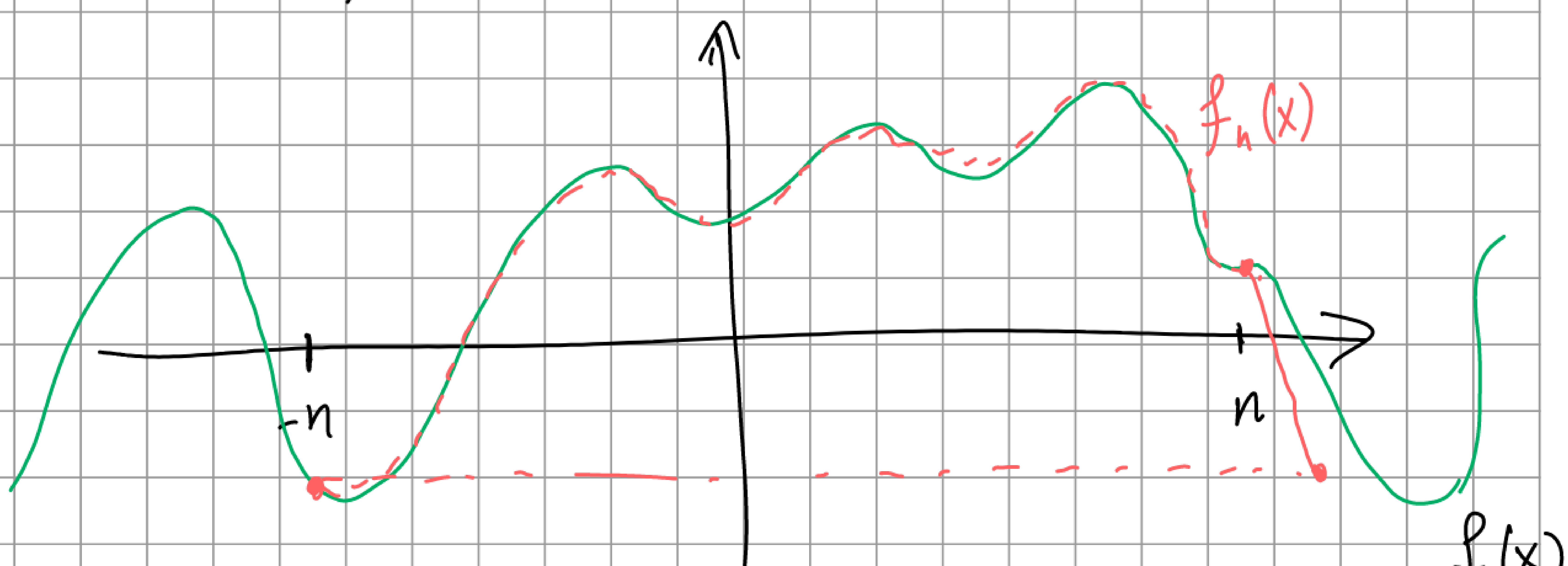
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,d\nu(x)$$

dla każdej f ciągłej i okresowej.

Niech $f \in C(\mathbb{R})$. Istnieje ciąg $\{f_n\}$ funkcji ciągłych i okresowych.

1) $f(x) = f_n(x)$ dla $x \in [-n, n]$

2) $\sup |f_n(x)| \leq \sup |f(x)|$



$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\,d\mu(x) - \int_{\mathbb{R}} f(x)\,d\nu(x)\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)|\,d\mu(x)$$

$$+ \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\,d\mu(x) - \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,d\mu(x)\right| + \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)|\,d\nu(x)$$

$$\leq 2\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \left(\mu\left((-n,n)^c\right) + \nu\left((-n,n)^c\right)\right) \longrightarrow 0$$

$\blacksquare$

<u>Przykład</u> Jeśli X_1, X_2 są niezależne i mają rozkłady $N(m_1, \sigma_1^2)$, $N(m_2, \sigma_2^2)$, to X_1+X_2 ma rozkład $N(m_1+m_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

Istotnie, możemy napisać $X_j = m_j + \sigma_j Y_j$, gdzie Y_j ma rozkład $N(0,1)$. Możemy obliczyć φ_{X_j}:

$$\varphi_{X_j}(t) = \varphi_{m_j+\sigma_j Y_j}(t) = e^{im_j}\varphi_{Y_j}(\sigma_j t) = e^{im_j t} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

Zatem

$$\varphi_{X_1+X_2}(t) = \varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t) = e^{im_1 t}e^{-\frac{\sigma_1^2 t^2}{2}} \cdot e^{im_2 t}e^{-\frac{\sigma_2^2 t^2}{2}} = e^{i(m_1+m_2)t} e^{-\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2}{2}}$$

Powyższa funkcja jest f. char. $N(m_1+m_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$.
Z tw. o jednoznaczności wynika więc, że X_1+X_2 ma taki rozkład.

TW. 10.7 (Lévy, Cramér)

Niech μ_n będą rozkładami na $\mathbb{R}$. Wówczas

1. Jeżeli $\mu_n \Rightarrow \mu$, to dla każdego t

$$\varphi_{\mu_n}(t) \longrightarrow \varphi_\mu(t).$$

2. Jeżeli $\varphi_{\mu_n}(t) \longrightarrow \varphi(t)$ dla pewnej funkcji φ ciągłej w 0, to φ jest funkcją char. pewnego μ t.że $\mu_n \Rightarrow \mu$.

D-d.

1. $$\varphi_{\mu_n}(t) = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx)\, d\mu_n(x) + i \int_{\mathbb{R}} \sin(tx)\, d\mu_n(x)$$

$$\longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \cos(tx)\, d\mu(x) + i \int \sin(tx)\, d\mu(x) = \varphi_\mu(t)$$

2. Krok 1. Pokażemy, że jeżeli $\varphi_{\mu_n} \to \varphi$ i φ jest ciągła w 0, to rodzina miar $\{\mu_n\}$ jest ciasna.

Ustalmy $x \in \mathbb{R}$, $u > 0$ i zauważmy

$$\int_{-u}^{u} (1 - e^{itx})\, dt = 2u - \int_{-u}^{u} \cos(tx)\, dt = 2u - \frac{2\sin(ux)}{x}$$

Podzielmy obie strony przez u i scałkujmy po x względem miary μ_n. Wtedy

$$\frac{1}{u}\int_{-u}^{u}\left(1-\varphi_{\mu_n}(t)\right)dt = 2\int_{\mathbb{R}}\left(1-\frac{\sin ux}{ux}\right)d\mu_n(x)$$

$$\geqslant 2\int_{\{|x|\geqslant \frac{2}{u}\}}\left(1-\frac{1}{u|x|}\right)d\mu_n(x) \geqslant \mu_n(\{x : |x| > \tfrac{2}{u}\}).$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Z ciągłości $\varphi(t)$ w 0 istnieje małe u t. że

$$\frac{1}{u}\int_{-u}^{u}\left(1-\varphi(t)\right)dt < 2\varepsilon.$$

Ze zbieżności $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ wynika, że dla dużych n

$$\frac{1}{u}\int_{-u}^{u}\left(1-\varphi_n(t)\right)dt < 3\varepsilon.$$

Zatem $\mu_n(\{x : |x| > \frac{2}{u}\}) < 3\varepsilon$ a to implikuje ciasność $\{\mu_n\}$.

Krok 2. Chcemy pokazać, że istnieje μ t. że $\mu_n \Rightarrow \mu$. oraz $\varphi_\mu = \varphi$. Z tw. Prochorowa ciąg $\{\mu_n\}$ zawiera podciąg $\{\mu_{n_k}\}$ słabo zbieżny $\mu_{n_k} \Rightarrow \mu$. Ponieważ $\mu_{n_k} \Rightarrow \mu$ to z pkt. 1 $\begin{array}{l} \varphi_{n_k}(t) \longrightarrow \varphi_\mu(t) \\ \quad\quad \searrow \varphi(t) \end{array}$, a zatem $\varphi_\mu = \varphi$.

Pozostaje $\mu_n \Rightarrow \mu$. Zał. nie wprost, że $\mu_n \not\Rightarrow \mu$, tzn. μ_n zawiera podciąg $\{\mu_{m_k}\}$ niezbieżny do μ. Ten podciąg $\{\mu_{m_k}\}$ jest ciasny, z tw. Prochorowa zawiera podciąg zbieżny $\{\mu_{m_k'}\}$ do pewnej miary μ_0. Z pkt. 1 $\varphi_\mu(t) \longleftarrow \varphi_{\mu_{m_k'}}(t) \rightarrow \varphi_{\mu_0}(t)$

Z tw. o jednoznaczności $\mu = \mu_0$.

TW. 11.1 (Centralne twierdzenie graniczne)

Niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o takim samym rozkładzie i takim, że $\mathbb{E}X_1 = m$, $\operatorname{Var} X_1 = \sigma^2$. Wówczas

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - nm}{\sqrt{n}\,\sigma} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$$

D-d. Dla uproszczonej notacji $Y_j = X_j - m$. Wtedy $\mathbb{E}Y_j = 0$, $\operatorname{Var} Y_j = \sigma^2$. Zmienna losowa $Y = Y_1$ ma pierwszy i drugi moment, zatem funkcja φ_Y jest dwukrotnie różniczkowalna w 0.

$$\varphi_Y(0) = 1$$

$$\varphi_Y'(0) = 0$$

$$\varphi_Y''(0) = -\mathbb{E}Y^2 = -\operatorname{Var} Y = -\sigma^2$$

Zatem z tw. 10.4 w otoczeniu 0

$$\varphi_Y(t) = \varphi_Y(0) + \varphi_Y'(0)\cdot t + \varphi_Y''\cdot\frac{t^2}{2} + o(t^2) = 1 - \frac{t^2\sigma^2}{2} + h(t)$$

gdzie $\frac{h(t)}{t^2} \xrightarrow{t\to 0} 0$. Funkcja h może być zespolona. Poniżej przydatna będzie następująca obserwacja: jeżeli $\{c_n\}$ jest ciągiem liczb zespolonych t. że $c_n \to c \in \mathbb{C}$, to

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{c_n}{n}\right)^n = e^c.$$

Ustalmy t. Mamy

$$\varphi_{\frac{X_1+\ldots+X_n-nm}{\sqrt{n}\sigma}}(t) = \varphi_{\frac{Y_1+\ldots+Y_n}{\sqrt{n}\sigma}}(t) = \left(\varphi_{\frac{Y}{\sqrt{n}\sigma}}(t)\right)^n$$

$$= \left(\varphi_Y\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right)^n = \left(1-\frac{\sigma^2}{2}\cdot\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)^2 + h\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right)^n$$

$$= \left(1-\frac{t^2}{2n^2} + h\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right)^n$$

Weźmy $c_n = n\left(-\frac{t^2}{2n} + h\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right)$.

Wówczas $c_n \to -\frac{t^2}{2}$, a więc

$$\varphi_{\frac{X_1+\ldots+X_n-nm}{\sqrt{n}\sigma}}(t) \xrightarrow{n\to\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Funkcja $e^{-\frac{t^2}{2}}$ jest funkcją charakterystyczną zm. los. o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$. Z tw. Lévy'ego – Craméra wnioskujemy tezę.

$\blacksquare$