26.05.2021 Przypomnienie:

Ciąg miar $\{\mu_n\}$ zbiega słabo do miary μ jeżeli ($\mu_n \Rightarrow \mu$)

$$\forall f \in C(\mathbb{R}) \quad \int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\mu_n(x) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\mu(x)$$

ciągłe i ograniczone

($X_n \xrightarrow{d} X$)

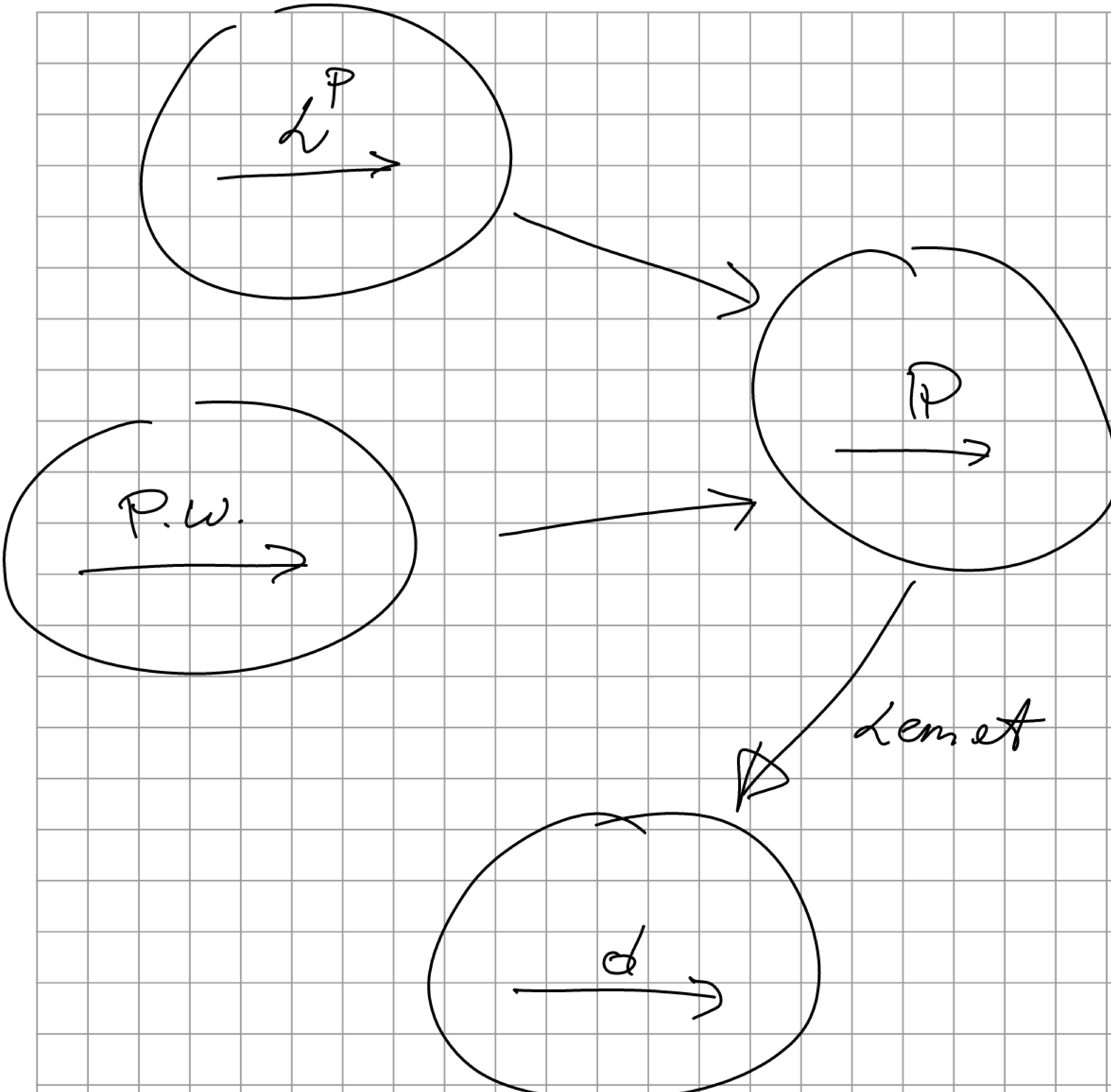
Ciąg zm. los. $\{X_n\}$ zb. wg rozkładu do zm. los. X jeżeli $\mu_{X_n} \Rightarrow \mu_X$, tzn.

$$\forall f \in C(\mathbb{R}) \quad \mathbb{E} f(X_n) \longrightarrow \mathbb{E} f(X).$$

Lemat 9.7 $\{X_n\}, \{Y_n\}$ – ciągi zm. los.

Wtedy:

- jeżeli $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, to $X_n \xrightarrow{d} X$
- jeżeli $X_n \xrightarrow{d} X$ i $\mathbb{P}[X = c] = 1$, to $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$
- jeżeli $X_n \xrightarrow{d} X$, to $aX_n + b \xrightarrow{d} aX + b$, dla $a, b \in \mathbb{R}$
- jeżeli $X_n \xrightarrow{d} X$, $Y_n \xrightarrow{d} c$, to $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$ oraz $X_n Y_n \xrightarrow{d} cX$



Przykład. Zbieżność wg rozkładu nie implikuje zb. wg. p-stwa.

a) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathrm{Bor}([0,1]), \lambda)$,

$$X_k = \begin{cases} \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]} & \text{gdy } k \text{ nieparzyste} \\ \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]} & \text{gdy } k \text{ parzyste} \end{cases}$$

X_k ma rozkład $\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$, więc

$\mu_{X_n} \Longrightarrow \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$, ale nie

ma zb. wg. p-stwa.

b) $Y \sim N(0,1)$, $X_n = (-1)^n Y$

<u>Tw. 9.8</u> (Skorochoda)

Zał. że $\{X_n\}$ jest ciągiem zm. los. określonych na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i t. że $X_n \xrightarrow{d} X$ dla pewnej zm. los X. Istnieją zm. los $\{X_n'\}$ oraz X' określone na $((0,1), Bor(0,1), \lambda)$ t. że $X_n \stackrel{d}{=} X_n'$, $X \stackrel{d}{=} X'$ (a więc w szczególności $X_n' \xrightarrow{d} X'$) oraz

$$X_n' \longrightarrow X' \quad \text{p.n.}$$

<u>Def. 9.9</u> **Dystrybuanta ułomna** to funkcja F spełniająca warunki:

- F jest niemalejąca
- $0 \le F(t) \le 1$
- F jest prawostronnie ciągła
- $\lim_{t\to\infty} F(t) - \lim_{t\to-\infty} F(t) = p \le 1$.

Rozważmy rodzinę dyst. ułomnych $\{F_n\}$ zbieżnych do F (czyli $F_n(x) \to F(x)$ dla każdego x - punktu ciągłości F)

<u>Tw. 9.10</u> (Helleya o wyborze)

Każdy ciąg dystrybuant zawiera podciąg słabo zbieżny do dystrybuanty ułomnej:

$\{F_n\}$ dyst., $\exists \{n_k\}$ t.że $F_{n_k} \to F$ dyst. uł.

<u>D-d.</u> Idea: chcemy wybrać $\{F_{n_k}\}$ który będzie zbieżny punktowo we wszystkich liczbach wymiernych.

Ustawmy l. wymierne w ciąg $w_1, w_2, w_3, \dots$

Krok 1

Ciąg $\{F_n(w_1)\}$ jest ograniczony (bo $F_n \in [0,1]$)

Z tw. Bolzano - Weierstrassa ten ciąg zawiera podciąg zbieżny $F_{n_{1,k}}$:

$$\lim_{n \to \infty} F_{n_{1,k}}(w_1) =: F_0(w_1)$$

Krok 2

Ciąg $\{F_{1,k}(w_2)\}_k$ jest ograniczony, więc zawiera podciąg zbieżny $\{F_{2,n}(w_2)\}$

$$\lim_{n\to\infty} F_{2,n}(w_2) =: F_0(w_2)$$

Krok 3

Analogicznie do poprzednich

$$\lim_{n\to\infty} F_{3,n}(w_3) =: F_0(w_3)$$

$\vdots$

$$\begin{array}{ccccc}
F_{1,1}(w_1) & F_{1,2}(w_1) & F_{1,3}(w_1) & \dots & \to F_0(w_1) \\
F_{2,1}(w_2) & F_{2,2}(w_2) & F_{2,3}(w_2) & \dots & \to F_0(w_2) \\
F_{3,1}(w_3) & F_{3,2}(w_3) & F_{3,3}(w_3) & \dots & \to F_0(w_3) \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Wybieramy podciąg $\{F_{n_{k,k}}\}$ – podciąg dystrybuant, który spełnia

$$\lim_{k\to\infty} F_{n_{k,k}}(w) = F_0(w) \quad \forall w \in \mathbb{Q}$$

Definiujemy F_0 na $\mathbb{R}$:

$$F_0(t) = \inf\{F_0(w) : t < w,\ w \in \mathbb{Q}\}$$

<u>Przykład.</u> $F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < n \\ 1 & x \geq n \end{cases}$

Zauważmy, że $F_n(x) \longrightarrow 0$ gdy $n \to \infty$, więc $\{F_n\}$ zb. słabo do dystrybuanty ułomnej $F \equiv 0$ $(\delta_n \Rightarrow 0)$

<u>Przykład</u> $F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < -n \\ 1 & x \geq n \end{cases}$

$\{F_n\}$ zbiega do $F \equiv 1$ - dyst. ułomna.

<u>Problem</u>: Znaleźć warunki, przy których dystrybuanta graniczna jest prawdziwą dystrybuantą.

<u>Def. 8.11</u> Rodzina $\{\mu_t\}_{t \in T}$ rozkładów p-stwa na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R}))$ nazywana jest ciasną (jędrną, ang. tight), jeżeli

dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór zwarty K t. że

$$\mu_t(K) > 1-\varepsilon, \quad \forall t \in T$$

$$\left(\mu_t(K^c) < \varepsilon\right)$$

(np. $K = [-N, N]$ dla pewnego "dużego" N.)

<u>Przykład.</u> Niech $\{X_t\}_{t \in T}$ będzie rodziną zm. los. t. że istnieje $\delta > 0$:

$$\sup_{t \in T} \mathbb{E}|X_t|^\delta = M < \infty$$

Wtedy rodzina $\{\mu_{X_t}\}_{t \in T}$ jest ciasna.

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wtedy dla $t \in T$

$$\mu_t([-n,n]^c) = \mathbb{P}[|X_t| > n] \leq \mathbb{P}[|X_t|^\delta > n^\delta] \leq$$

$$\leq \frac{\mathbb{E}|X_t|^\delta}{n^\delta} \leq \frac{M}{n^\delta} < \varepsilon \quad \text{dla dużych } n.$$

<u>Tw. 9.12</u> (Prochorowa)

Rodzina rozkładów p-stwa jest ciasna

$$\Updownarrow$$

z każdego ciągu elem. tej rodziny można wybrać podciąg słabo zbieżny do pewnego rozkładu p-stwa.

D-d. "$\Rightarrow$" Zał. $\{F_t\}_{t\in T}$ jest ciasna.

Z tw. Helleya istnieje $\{F_{n_k}\}$ do pewnej ułomnej dystrybuanty F. Pokażemy, że F jest dystrybuantą. Ustalmy $\varepsilon > 0$.

Z ciasności wynika, że istnieje M t. że $\mu_{n_k}([-M, M]) > 1-\varepsilon$. Możemy założyć, że M, $-M$ są pkt. ciągłości F oraz F_{n_k} dla każdego k. Wówczas

$$F_{n_k}(M) - F_{n_k}(-M) = \mu_{n_k}([-M,M]) > 1-\varepsilon$$

$$\Big\downarrow k \to \infty$$

$$F(M) - F(-M)$$

Pokazaliśmy, że $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M_\varepsilon \ (F(M_\varepsilon) - F(M_\varepsilon) < 1-\varepsilon)$

Zatem $\lim\limits_{M_\varepsilon \to \infty} F(M_\varepsilon) - F(-M_\varepsilon) = 1$.

Zatem F jest prawdziwą dystrybuantą.

"$\Leftarrow$" ćwiczenie. $\blacksquare$

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow$ funkcja tworząca $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow$ funkcje charakterystyczne (transformata Fouriera) $\Big\}$ Centralne tw. graniczn

Def. 10.1 **Funkcją charakterystyczną** zmiennej losowej X nazywamy funkcję $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zdefiniowaną wzorem

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E} e^{itX} = \mathbb{E}[\cos(tX) + i\sin(tX)]$$
$$= \mathbb{E}\cos tX + i\,\mathbb{E}\sin tX$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{its}\, d\mu_X(s)$$

$$\left[\text{Z analizy} \quad \hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)\,dx \right]$$

Przykład.

1) $X = a$ p.w., $\varphi_X(t) = \mathbb{E}e^{itX} = \mathbb{E}e^{ita} = e^{ita}$

2) $X \sim \mathcal{U}(0,1)$, $\varphi_X(t) = \int_0^1 e^{its}\,ds = \int_0^1 \cos ts\,ds + i\int_0^1 \sin ts\,ds = \frac{\sin ts}{t}\Big|_0^1 - i\frac{\cos ts}{t}\Big|_0^1 =$

$$= \frac{\sin t}{t} - \frac{i\cos t}{t} + \frac{i}{t} = \frac{1}{it}(i\sin t + \cos t - 1) = \frac{e^{it}-1}{it}$$

(dla $t=0$ to nie działa, ale łatwo wprost policzyć tę całkę)

3) $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, wtedy $\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$. Jak to policzyć?

1) Metoda z analizy zespolonej.

2) $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

$+ \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\sin(tx) e^{-\frac{x^2}{2}}}_{\text{funkcja nieparzysta}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

Różniczkujemy po t:

$$\varphi'(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \sin tx \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin tx \, e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{t}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= -t\varphi(t)$$

otrzymaliśmy równanie $\varphi' = -t\varphi$, $\varphi(0) = 1$.

$\frac{d\varphi}{dt} = -t\varphi \to \int \frac{d\varphi}{\varphi} = -\int t\,dt \to \log|\varphi| = -\frac{t^2}{2} + c$

$$\varphi = C \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad C = 1.$$

Podsumowując:

- $\delta_a \to e^{ita}$
- $U(0,1) \to \dfrac{e^{it}-1}{it}$
- $N(0,1) \to e^{-\frac{t^2}{2}}$

Tw. 10.2 Niech φ_X będzie f. char. zm. los. X.

Wtedy:

1) $\varphi_X(0) = 1$
2) $|\varphi_X(t)| \leqslant 1$
3) $\varphi_X(t) = \overline{\varphi_X(-t)}$ $\left(\mathbb{E}e^{itX} = \mathbb{E}\overline{e^{-itX}} = \overline{\mathbb{E}e^{-itX}} = \overline{\varphi(-t)}\right)$
4) $\varphi_X(t)$ jest rzeczywist $\Leftrightarrow$ rozkład X jest symetryczny
5) φ_X jest jednostajnie ciągła.
6) $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb}\varphi_X(at)$

D-d 5) $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \forall x,y \ |x-y|<\delta \Rightarrow |\varphi_X(x)-\varphi_X(y)|<\varepsilon$

$|\varphi_X(t+h) - \varphi_X(y)| = |\mathbb{E}e^{i(t+h)X} - \mathbb{E}e^{itX}| = |\mathbb{E}[e^{itX}(e^{ihX}-1)]|$

$\leqslant \mathbb{E}|e^{ihX}-1| \to 0$ gdy $h \to 0$.

6) $$\varphi_{aX+b}(t) = \mathbb{E}\, e^{it(aX+b)} = e^{itb}\, \mathbb{E}\, e^{i(at)X} = e^{itb}\, \varphi_X(at)$$

$\blacksquare$