19.05.2021

D-d. tw. 9.3

- "2 ⇒ 3" Ustalmy zbiór domknięty F. Dla $\varepsilon > 0$ oznaczmy przez

$$F_\varepsilon = \{ x \in \mathbb{R} : d(x, F) < \varepsilon \}$$

ε-otoczkę zbioru F. Ustalmy $\delta > 0$ i weźmy $\varepsilon > 0$ taki, że

$$\mu(F_\varepsilon) < \mu(F) + \delta .$$

Taki ε istnieje, gdyż z domkniętości F: $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_{1/n}$, a z lematu o ciągłości miary $\mu(F_{1/n}) \to \mu(F)$. Niech f będzie jednostajnie ciągłą funkcją taką, że

$$\mathbb{1}_F \leq f \leq \mathbb{1}_{F_\varepsilon}$$

(można np. przyjąć $f(x) = \phi(d(x,F)/\varepsilon)$, dla $\phi(t) = 1, 1-t, 0$ dla $t \leq 0$, $t \in (0,1)$, $t \geq 1$)

Wówczas

$$\limsup \mu_n(F) \leq \limsup \int f \, d\mu_n = \int f \, d\mu \leq \mu(F_\varepsilon)$$
$$\leq \mu(F) + \delta$$

Z dowolności δ mamy tezę.

- "4 ⇒ 1" Załóżmy, że $g \in C(\mathbb{R})$ oraz $g \geq 0$.

Wówczas korzystając kolejno z:
tw. Fubiniego, lematu Fatou oraz pkt. 4:

$$\liminf \int_{\mathbb{R}} g(x) \mu_n(dx) = \liminf \int_{\mathbb{R}} \int_0^{g(x)} dt \, \mu_n(dx)$$

$$\stackrel{\text{Fubini}}{=} \liminf \int_0^\infty \int_{\{x : g(x) > t\}} \mu_n(dx) \, dt$$

$$= \liminf \int_0^\infty \mu_n\{x : g(x) > t\} \, dt$$

$$\stackrel{\text{Fatou}}{\geq} \int_0^\infty \liminf \mu_n\{x : g(x) > t\} \, dt$$

g ciągła, więc $\{x : g(x) > t\}$ otwarty

$$\stackrel{\text{pkt. 4}}{\geq} \int_0^\infty \mu\{x : g(x) > t\} \, dt$$

$$= \dots = \int_{\mathbb{R}} g(x) \mu(dx)$$

• "3, 4 $\Rightarrow$ 5" Bierzemy A t. że $\mu(\partial A) = 0$.

$$0 = \mu(\partial A) = \mu(\bar{A}) - \mu(\mathrm{Int}\, A) \Rightarrow \mu(\bar{A}) = \mu(\mathrm{Int}\, A).$$

$$\begin{aligned}\mu(\bar{A}) &\overset{3)}{\geq} \limsup \mu_n(\bar{A}) \overset{A \subseteq \bar{A}}{\geq} \limsup \mu_n(A) \\ &\geq \liminf \mu_n(A) \overset{A \supseteq \mathrm{Int} A}{\geq} \liminf \mu_n(\mathrm{Int}\, A) \\ &\geq \mu(\mathrm{Int}\, A)\end{aligned}$$

Ale $\mu(\bar{A}) = \mu(\mathrm{Int}\, A)$, zatem

$$\lim \mu_n A = \mu \bar{A} = \mu\, \mathrm{Int} A = \mu A.$$

• "5 $\Rightarrow$ 3" Ustalmy domknięty F. Definiujemy F_ε. Patrzymy na ∂F_ε - są to zbiory $(F_{\varepsilon_1} \cap F_{\varepsilon_2} = \emptyset$ gdy $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2)$ rozłączne $\mu(\partial F_\varepsilon) > 0$ jedynie dla przeliczalnie wielu ε: $F^c \supset \bigcup_{\varepsilon > 0} \partial F_\varepsilon$,

$$\mu\Big(\bigcup_{\varepsilon>0} \partial F_\varepsilon\Big) \leq \mu(F^c) \leq 1,$$

$$\parallel$$

$$\sum_{\varepsilon > 0} \partial F_\varepsilon \leftarrow \text{nieprzeliczalnie wiele,}$$

więc tylko przeliczalnie wiele może być > 0.

Istnieje więc ciąg $\{\varepsilon_k\}$ t. że $\varepsilon_k \to 0$ oraz $\mu(\partial F_{\varepsilon_k}) = 0$. Ustalmy k.

$$\limsup \mu_n(F) \leq \limsup \mu_n(F_{\varepsilon_k}) \overset{5.}{=} \mu(F_{\varepsilon_k})$$

Gdy $k \to \infty$ z lematu o ciągłości miary $\mu(F_{\varepsilon_k}) \longrightarrow \mu(F)$. ∎

<u>**TW. 9.4**</u> Jeśli μ, ν są miarami prob. na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R}))$ t. że dla każdej funkcji $f \in C(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} f \, d\nu$$

to $\mu = \nu$, tj. $\mu(A) = \nu(A)$ dla każdego $A \in \mathcal{B}or(\mathbb{R})$.

<u>**Wniosek**</u> Granica w def. słabej zbieżności jest jednoznacznie wyznaczona.

D-d. Z lematu Dynkina o π-λ układach wystarczy pokazać, że $\mu(F) = \nu(F)$ dla dow. dom. $F \in \mathcal{B}or(\mathbb{R})$. Istotnie, niech $\mathcal{K}$ będzie rodziną wszystkich domkniętych zbiorów borelowskich, a

$$\mathcal{L} = \{A \in \mathcal{B}or(\mathbb{R}) : \mu(A) = \nu(A)\}.$$

$\mathcal{K}$ jest π-układem, $\mathcal{L}$ jest λ-układem.

Niech $\mu_n = \mu$. Wtedy z zał. $\mu_n \Rightarrow \nu$, z tw. 9.3 pkt. 3 mamy

$$\mu(F) = \limsup \mu_n(F) \leq \nu(F)$$

Analogicznie pokazujemy $\nu(F) \leq \mu(F)$ co daje równość obu miar

$$\left(\mathcal{K} \subset \mathcal{L} \Rightarrow \underset{\substack{\| \\ \mathcal{B}or(\mathbb{R})}}{\sigma(\mathcal{K})} \subset \mathcal{L} \right)$$

■

TW. 9.5 Niech $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$, μ będą rozkładami na $\mathbb{R}$ o dystrybuantach $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, F. Wtedy $\mu_n \Rightarrow \mu$ wtedy i tylko wtedy, gdy $F_n(x) \to F(x)$ dla każdego x, w którym F ciągła.

Wniosek Niech $\{X_n\}$ i.i.d., $X_n = \pm 1$ z pstwem $1/2$. $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Z tw. Moivre'a-Laplace'a

$$\mu_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$\left(\overset{\shortparallel}{\mu(dx)},\ \mu(A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)$$

bo $\mathbb{P}\left[\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq b\right] \to \Phi(b)$

D-d. TW 9.5

- "$\Rightarrow$" zał. $\mu_n \Rightarrow \mu$. Ustalmy x - pkt. ciągłości F.

Weźmy $A = (-\infty, x]$, $\partial A = \{x\}$, $\mu(\{x\}) = 0$. (bo x nie jest atomem).

$$F_n(x) = \mu_n(A) \xrightarrow{\text{z pop. tw.}} \mu(A) = F(x)$$

• "$\Leftarrow$" Załóżmy, że $F_n \to F$ dla x w których F ciągła. Pokażemy $\liminf \mu_n G \geq \mu(G)$ dla każdego otwartego $G \subset \mathbb{R}$.

Ustalmy $G \subset \mathbb{R}$, otwarty. Zbiór G możemy zapisać w postaci $G = \bigcup_{i=1}^{N} I_k$, gdzie $I_k = (a_k, b_k)$ i są rozłączne. (może być $N=\infty$)

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wybieramy a_k', b_k':

- a_k', b_k' były pkt. ciągłości F
- $F(b_k') - F(a_k') = \mu((a_k', b_k'))$
$$\geq \mu(I_k) - \varepsilon/2^k$$

Ustalmy m.

$$\liminf \mu_n(G) \geq \liminf \mu_n\left(\bigcup_{i=1}^{m} I_k\right)$$
$$\geq \sum_{i=1}^{m} \liminf \mu_n((a_k', b_k'))$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \liminf \left(F_n(b_k') - F_n(a_k')\right)$$
$$\overset{\text{z zał.}}{=} \sum_{i=1}^{m} F(b_k') - F(a_k')$$
$$\geq \sum_{i=1}^{m} \mu(I_k) - \varepsilon/2^k \geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} I_k\right) - \varepsilon$$

Gdy przejdziemy z $m \to \infty$, to z lematu o ciągłości miary

$$\liminf \mu_n(G) \geq \mu(G) - \varepsilon.$$

Z dowolności ε, przy $\varepsilon \to 0$

$$\liminf \mu_n(G) \geq \mu(G).$$

Z popr. tw.

$$\mu_n \Rightarrow \mu.$$

$\blacksquare$

__Przykład__ Niech $a_n \to a \in \mathbb{R}$. Wtedy $\delta_{a_n} \Rightarrow \delta_a$, bo dystrybuanta F miary δ_a ma tylko jeden punkt nieciągłości: a. Dla każdego $x \neq a$ $F_n(x) \to F(x)$.

__Przykład__ Niech $\mu(\{\frac{k}{n}\}) = 1/n$ i $\mu = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\,dx$. Wówczas zbieżność $\mu_n \Rightarrow \mu$ wynika z popr. tw.

Definicja 9.6 Mówimy, że ciąg zm. los. $\{X_n\}$ zbiega **według rozkładu** do zmiennej losowej X $\left(X_n \xrightarrow{d} X\right)$, jeżeli $\mu_{X_n} \Rightarrow \mu_X$ lub równoważnie $F_n(x) \to F(x)$ dla punktów ciągłości F.

Często będziemy używać nieco innej notacji i np. pisać $X_n \xrightarrow{d} N(0,1)$ co oznacza, że X_n zbiegają wg rozkładu do pewnej zmiennej losowej o rozkładzie $N(0,1)$.

Uwaga $X_n \xrightarrow{d} X \iff \mathbb{E}f(X_n) \to \mathbb{E}f(X)$ dla każdej $f \in C(\mathbb{R})$.

Przykład Niech $\{X_n\}$ będzie ciągiem niezależnych zm. los. t.że $\mathbb{P}[X_n = \pm 1] = 1/2$ i niech $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Wówczas

$$S_n/\sqrt{n} \xrightarrow{d} N(0,1)$$