12.04.2021 MPWL kontynuacja

Przykład Liczbę $a \in [0,1]$ nazywamy normalną przy podstawie d ($d \in \{2,3,\dots\}$) jeśli ma ona przedstawienie

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{d^n}, \quad \varepsilon_n \in \{0,1,\dots,d-1\}$$

takie, że

$$\frac{\#\{i : \varepsilon_i = k, i \le n\}}{n} \to \frac{1}{d}$$

dla każdego $k = \{0,1,\dots,d-1\}$

Problem: • czy istnieją liczby, które są normalne przy każdej podstawie?

TAK (Borel)

• wskaż liczbę, która jest normalna przy każdej podstawie d.

PROBLEM OTWARTY

TW. 8.8 (Borel) Prawie wszystkie liczby (względem miary Lebesgue'a) z przedziału $[0,1]$ są normalne względem każdej podstawy.

D-d. Niech

$$A_d = \{x \in [0,1] : x \text{ normalny przy pods. } d\}$$

$$A = \bigcap_{d=2}^{\infty} A_d$$

Rozważamy przestrzeń prob. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}or([0,1]), \lambda)$. Wystarczy pokazać, że $\mathbb{P}[A_d] = 1$. Ustalmy d. Każdą l. $x \in [0,1]$ możemy zapisać w postaci

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n(x)}{d^n},$$

dla $\varepsilon_n(x) \in \{0, \dots, d-1\}$. Wtedy $\varepsilon_n(x)$ jest ciągiem zm. los. o rozkładzie jednostajnym na $\{0, 1, \dots, d-1\}$. Ustalmy $k \in \{0, \dots, d-1\}$.

Niech $X_n(x) \begin{cases} 1 & \text{gdy } \varepsilon_n(x) = k \\ 0 & \text{w p.w.} \end{cases}$

Wówczas $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{P}[X_n = 1] = 1/d$ oraz z MPWL

$$\frac{\#\{i \leq n : \varepsilon_i(x) = k\}}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{p.n.} \mathbb{E}X_1 = \frac{1}{d}$$

a zatem $\mathbb{P}[A_d] = 1$ oraz $\mathbb{P}[A] = 1$. ■

Tw. 8.9 (Kołmogorowa o 3 szeregach)

Ustalmy $c > 0$. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ jest zbieżny p.n. wtedy i tylko wtedy, gdy następujące 3 szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}X_n^{(c)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}\, X_n^{(c)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[|X_n| > c]$$

są zbieżne.

⌈ Dla $c > 0$ $X^{(c)} = \begin{cases} X & \text{dla } |X| \leq c \\ 0 & \text{dla } |X| > c \end{cases}$ ⌋

D-d. "$\Leftarrow$" Zał. że te 3 szeregi są zbieżne.

1. Ze zbieżności $\sum \mathbb{E}X_n^{(c)}$ i $\sum \mathrm{Var}\, X_n^{(c)}$ i tw. Kołmogorowa o dwóch

szeregach otrzymujemy, że $\sum X_n^{(c)}$ jest zbieżny.

2. Korzystamy z lematu Borela-Cantelliego. Skoro $\sum \mathbb{P}[|X_n| > c] < \infty$, to

$\mathbb{P}[|X_n| > c \text{ i.o.}] = 0$, zatem z p-stwem 1 $|X_n| < c$ dla dużych n.

TW. 9.1 (de Moivre'a - Laplace'a) **[Centralne tw. graniczne]**

Niech $X_n = \pm 1$ z p-stwem $1/2$ - niez. zm. los.

Z MPWL. $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$,

$$\frac{S_n}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{p.n.}$$

W szczególności $\forall \varepsilon > 0$ $|S_n| < \varepsilon \cdot n$ dla dużych n.

- Jaka jest typowa odl. S_n od 0 dla dużych n?

- Jak należy znormalizować S_n, aby otrzymać coś nietrywialnego?

$$\frac{S_n}{a_n} \longrightarrow \text{coś} \neq 0$$

Chcielibyśmy policzyć $\mathbb{E}|S_n|$ - to jest żmudne. Łatwiej policzyć $\mathbb{E}S_n^2 = \operatorname{Var} S_n$
$= \operatorname{Var}(X_1 + \ldots + X_n) = \operatorname{Var} X_1 + \ldots + \operatorname{Var} X_n$
$= 1 + \ldots + 1 = n.$

$S_n^2 \approx n \rightarrow |S_n| \approx \sqrt{n}$. Typowa odl. S_n od zera jest rzędu $\sqrt{n}$

Chcemy opisać $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$. Czy ten ciąg ma jakąś granicę? Strukturę?

<u>Treść TW. 3.1</u> Niech $\{X_n\}$ będzie ciągiem niezal. zm. los. t.że $\mathbb{P}[X_n = 1] = \mathbb{P}[X = -1] = 1/2$ i niech $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.
Wówczas, dla dowolnych $a < b$

$$\mathbb{P}\left[a \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq b\right] \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

$\Phi(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ jest dystrybuantą rozkładu normalnego.

D-d. Przypomnienie: formuła Stirlinga:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot \frac{n^n}{e^n} \quad \text{gdy } n \to \infty$$

Zał. że $n = 2m$ (granica po n parzystych).

Wtedy $\mathbb{P}[S_{2m} = 2k+1] = 0$.

$$\mathbb{P}[S_{2m} = 2k] = \binom{2m}{m+k} \frac{1}{2^{2m}} = \frac{(2m)!}{(m+k)!(m-k)!\, 2^{2m}}$$

$$\overset{\text{Stirling}}{\sim} \frac{e^{m+k} e^{m-k}}{e^{2m}} \frac{(2m)^{2m}}{(m+k)^{m+k} (m-k)^{m-k}} \cdot \frac{\sqrt{4\pi m}}{\sqrt{2\pi(m+k)}\sqrt{2\pi(m-k)}} \cdot \frac{1}{2^{2m}}$$

$$= \left(\frac{m}{m+k}\right)^{m+k} \left(\frac{m}{m-k}\right)^{m-k} \sqrt{\frac{m}{(m+k)(m-k)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$$= \left(1+\frac{k}{m}\right)^{-(m+k)} \left(1-\frac{k}{m}\right)^{-(m-k)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi m}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{m}}\sqrt{1-\frac{k}{m}}}$$

$$= \left(1-\frac{k^2}{m^2}\right)^{-m} \left(1+\frac{k}{m}\right)^{-k} \left(1-\frac{k}{m}\right)^{k} \frac{1}{\sqrt{m\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{m}}\sqrt{1-\frac{k}{m}}}$$

Ustalmy $x \in \mathbb{R}$. Jeżeli $2m \to \infty$, a $2k = x\sqrt{2m}$, to $\frac{k^2}{m} = \frac{x^2}{2}$, zatem

$$\left(1 - \frac{k^2}{m^2}\right)^{-m} \to e^{\frac{x^2}{2}},$$

$$\left(1 + \frac{k}{m}\right)^{-k} \to e^{-x^2},$$

$$\left(1 - \frac{k}{m}\right)^{k} \to e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Stąd wynika

$$\mathbb{P}[S_{2m} = 2k] \sim e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi m}}$$

Dalej

$$\mathbb{P}\left[a \leq \frac{S_{2m}}{\sqrt{2m}} \leq b\right] = \sum_{x \in [a,b] \cap \frac{2\mathbb{Z}}{\sqrt{2m}}} \mathbb{P}[S_{2m} = x\sqrt{2m}]$$

$$\sim \sum_{x \in [a,b] \cap \frac{2\mathbb{Z}}{\sqrt{2m}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2}{m}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \sim \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

Zadanie: Jakie jest p-stwo, że w 100 rzutach kostką otrzymamy co najmniej 100 orłów? Rozwiązanie:

Niech $X_i = 1$ gdy w i-tym rzucie wypadł orzeł i $X_i = -1$ w p.p.

$S_{100} = X_1 + \ldots + X_{100}$, Chcemy $S_{100} = 20$.

Z tw. 9.1

$$\mathbb{P}[S_{100} \geq 20] = \mathbb{P}[S_{100}/10 \geq 2] \approx 1 - \Phi(2)$$
$$\approx 0{,}02.$$

Cel: Chcemy sformalizować zb. wg rozkładu. Co znaczy ciąg miar μ_n zbieżny do miary μ?

Zbieżność wg rozkładu definiuje się na funkcjach ciągłych. Oznaczmy

$$C(\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ ciągłe i ogr.}\}$$

Definicja 9.2 Niech μ_n będzie ciągiem miar prob. na $\mathcal{Bor}(\mathbb{R})$. Mówimy, że μ_n **zbiegają słabo** do miary prob. μ ($\mu_n \Rightarrow \mu$) jeżeli dla każdej funkcji $f \in C(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_n(dx) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(dx)$$

$$(f, \mu_n) \longrightarrow (f, \mu)$$

Przykład. $a_n \to a \in \mathbb{R}$, wtedy $\delta_{a_n} \Rightarrow \delta_a$.

Niech $f \in C(\mathbb{R})$.

$$\int_{\mathbb{R}} f\, d\delta_{a_n} = f(a_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(a) = \int_{\mathbb{R}} f\, d\delta_a$$

Przykład $\mu_n(\{\frac{k}{n}\}) = \frac{1}{n}$, $k \in \{1, \dots, n\}$

Niech $f \in C(\mathbb{R})$.

$$\int_{\mathbb{R}} f\, d\mu_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{[0,1]} f\, d\lambda$$

TW. 9.3 Niech μ_n, μ będą miar. prob. na $(\mathbb{R}, Bor(\mathbb{R}))$. NWSR

1° $\mu_n \Rightarrow \mu$

2° Dla $f \in C(\mathbb{R})$ i jedn. ciągłej

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu_n \xrightarrow{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu$$

3° Dla każdego domkniętego $F \subset \mathbb{R}$

$$\limsup_{n \to \infty} \mu_n(F) \leq \mu(F)$$

4° Dla każdego otwartego $G \subset \mathbb{R}$

$$\liminf_{n \to \infty} \mu_n(G) \geqslant \mu(G)$$

5° Dla każdego $A \in Bor(\mathbb{R})$ t. że $\mu(\partial A) = 0$

$$\lim_{n \to \infty} \mu_n(A_n) = \mu(A)$$

brzeg A