5.05.2021

Lemat 8.3 (Kroneckera)

Załóżmy, że a_n jest ciągiem liczbowym takim, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ jest zbieżny. Wtedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \to 0$$

D-d. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}$, $S_n = S_{n-1} + \frac{a_n}{n}$

$$a_n = n(S_n - S_{n-1}) \quad (*)$$

Przypomnienie z AM 1: Jeśli $S_n \to S$, to średnie $\frac{S_1 + \ldots + S_n}{n} \longrightarrow S$. $(**)$

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \overset{(*)}{=} \frac{S_1 + 2(S_2 - S_1) + \ldots + n(S_n - S_{n-1})}{n} =$$

$$= \frac{-S_1 - S_2 - \ldots - S_{n-1} + nS_n}{n} = S_n - \frac{S_1 + \ldots + S_{n-1}}{n}$$

$$\xrightarrow{(**)} S - S = 0$$

Tw. 8.4 (Mocne Prawo Wielkich Liczb Kołmogorowa)

Załóżmy, że $\{X_n\}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych (i.i.d, independent, identically distributed) o tym samym rozkładzie.

1. Jeżeli $\mathbb{E}|X_1| < \infty$ i $m = \mathbb{E}X_1$, to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} = m \quad \text{p.n.}$$

2. Jeżeli $\mathbb{E}|X_1| = \infty$, to

$$\mathbb{P}\left[\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right| = \infty\right] = 1$$

D-d. Z lematu Kroneckera wystarczy pokazać, że szereg $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n - m}{n}}_{(*)}$ jest zbieżny p.n. Wówczas

$$\frac{(X_1 - m) + (X_2 - m) + \ldots + (X_n - m)}{n} =$$

$$= \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - m \xrightarrow{\text{p.n.}} 0$$

Dowód 1. Załóżmy dodatkowo, że $\mathbb{E}X_n^2 < \infty$.

Pokażemy zbieżność szeregu (*) korzystając z tw. o 2 szeregach:

1° $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\frac{X_i - m}{i}\right] = 0 < \infty$

2° $$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Var}\left(\frac{X_i - m}{i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \mathrm{Var}(X_i) =$$

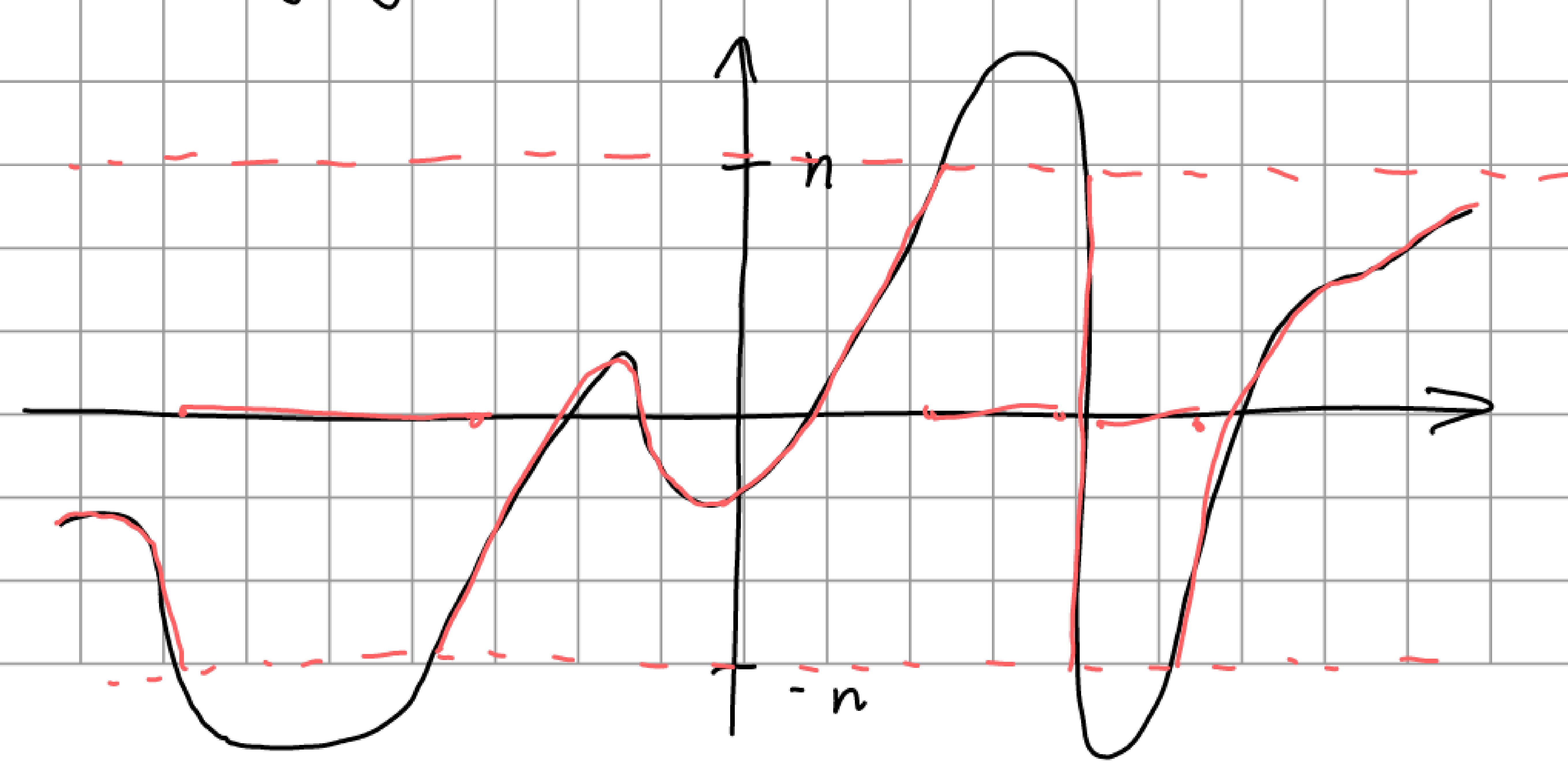
$$= \mathrm{Var}\, X_1 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} < \infty$$

Wtedy $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i - m}{i} < \infty$. $\blacksquare$

Dowód w pełnej ogólności.

Załóżmy $\mathbb{E}|X_n| < \infty$.

Zdefiniujmy $X_n' = X_n \cdot \mathbb{1}_{\langle -n, n \rangle}(X_n) = \begin{cases} X_n & \text{jeżeli } |X_n| < n \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$



Zmienne losowe X_n' są nzl. oraz ograniczone, więc również $\mathbb{E}(X_n')^2 < \infty$. Mamy

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - m = \frac{(X_1 + \ldots + X_n) - (X_1' + \ldots + X_n')}{n} + \frac{(X_1' + \ldots + X_n') - (\mathbb{E}X_1' + \ldots + \mathbb{E}X_n')}{n} + \frac{\mathbb{E}X_1' + \ldots + \mathbb{E}X_n'}{n} - m$$

$$= \mathrm{I}_n + \mathrm{II}_n + \mathrm{III}_n$$

Pokażemy, że $\mathrm{I}_n \to 0$, $\mathrm{II}_n \to 0$, $\mathrm{III}_n \to 0$.

III: Z tw. Lebesgue'a o zbieżności zdominowanej $\mathbb{E}X_n' = \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{\langle -n,n\rangle}(X_n)] = \mathbb{E}[X_1 \mathbb{1}_{\langle -n,n\rangle}(X_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}X_1 = m$, a zatem $\mathrm{III}_n \to 0$ (+ przypomnienie z AM1).

I: $\frac{X_1 + \ldots + X_n - (X_1' + \ldots + X_n')}{n} = \frac{(X_1 - X_1') + \ldots + (X_n - X_n')}{n}$

Pokażemy, że z p-stwem 1 dla dużych n $X_n = X_n'$

$$\mathbb{P}[\{\omega : \exists N_\omega\ \forall n > N_\omega\ X_n = X_n'\}] = 1$$

$$X_n - X_n' \to 0 \quad \text{p.n.}$$

A zatem $I_n \to 0$ p.n. (bo to są śr. arytmetyczne ciągu $X_n - X_n'$).

Żeby pokazać, że $X_n - X_n' \to 0$, skorzystamy z lematu Borela-Cantelliego.

Zauważmy, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[X_n \neq X_n'] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[|X_n| \geq n] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[|X_1| \geq n] = (\star)$$

Przewidujemy, że $\mathbb{E}|X_1| < \infty$ da nam zbieżność szeregu.

$$(\star) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}[k \leq |X_1| < k+1] = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k} \mathbb{P}[k \leq |X_1| < k+1]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}[k \leq |X_1| < k+1]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k \leq |X_1| < k+1} k \, d\mathbb{P} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k \leq |X_1| < k+1} |X_1| \, d\mathbb{P} \leq \mathbb{E}|X_1| < \infty$$

Z lematu B-C $\mathbb{P}[X_n \neq X_n' \text{ i.o.}] = 0$

$\Rightarrow \mathbb{P}[X_n = X_n' \text{ od pewnego miejsca}] = 1$

II_n: Z lematu Kroneckera wystarczy pokazać, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n' - \mathbb{E}X_n'}{n}$ jest zbieżna p.n. Z tw. Kołmogorowa wystarczy pokazać, że szereg wariancji jest zbieżny.

$$\sum_{n=1}^{\infty} Var\left(\frac{X_n' - \mathbb{E}X_n'}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} Var(X_n')$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(\mathbb{E}(X_n')^2 - (\mathbb{E}X_n')^2\right)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \mathbb{E}(X_n')^2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k-1 \leq |X_n'| < k} (X_n')^2 \, d\mathbb{P}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1 \leq |X_n'| < k} (X_1)^2 \, d\mathbb{P}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \cdot \int_{k-1 \leq |X_1| < k} |X_1| \, d\mathbb{P}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \mathbb{E}\left[|X_1| \cdot \mathbb{1}_{[k-1,k)}(|X_1|)\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{k}{n^2} \mathbb{E}\left[|X_1| \mathbb{1}_{[k-1,k)}(|X_1|)\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k\, \mathbb{E}\left[|X_1| \mathbb{1}_{[k-1,k)}(|X_1|)\right] \cdot \underbrace{\sum_{n=k}^{\infty} 1/n^2}_{\leq 2/k} = (\star)$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=k}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{n^2}\,dx \leq \sum_{n=k}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{2}{x^2}\,dx$$

$$= \int_k^{\infty} \frac{2}{x^2}\,dx = \frac{2}{k}$$

$$(\star) \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[|X_1| \mathbb{1}_{[k-1,k)}(|X_1|)\right]$$

$$= 2\,\mathbb{E}|X_1| < \infty \qquad \blacksquare$$

Zastosowania MPWL

1° Metoda Monte Carlo. Cel: aproksymować $\int_0^1 f(x)\,dx$

Generujemy ciąg nzl. zm. los. $\{X_n\}$ o rozkładzie z gęstością g ($g \geq 0$, $\int_0^1 g(x)\,dx = 1$)

Obliczmy $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{f(X_i)}{g(X_i)}}_{\text{i.i.d.}} \xrightarrow{\text{MPWL}} \mathbb{E}\left[\frac{f(X_1)}{g(X_1)}\right] =$

$$= \int_0^1 \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx$$

2° Igła Buffona.

Igła dł. l, deski szerokości a

$$\mathbb{P}[\text{igła przetnie deskę}] = \frac{2l}{a\pi}$$

Wykonujemy n doświadczeń:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{w } i\text{-tym rzucie igła przecina deskę} \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}X_i = \mathbb{P}[X_i = 1] = \frac{2l}{a\pi}$$

Z MPWL

$$\frac{\text{liczba przecięć}}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \to \mathbb{E}X_1 = \frac{2l}{a\pi}$$

$$\pi \approx \frac{2ln}{ak}$$

W 1901 roku Mario Lazzarini wykonał 3408 rzutów i otrzymał

$$\pi \approx \frac{355}{113} = \underbrace{3.1415992}_{\text{zgadza się}}9203$$

Przykład. Oblicz:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{x_1^3 + \dots + x_n^3}{x_1 + \dots + x_n} dx_1 \dots dx_n$$

Niech $\{X_n\}$ będzie ciągiem nzl. zm. los. o rozkładzie $\mathcal{U}([0,1])$. Wtedy

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{x_1^3 + \dots + x_n^3}{x_1 + \dots + x_n} dx_1 \dots dx_n = \mathbb{E}\left[\frac{X_1^3 + \dots + X_n^3}{X_1 + \dots + X_n}\right]$$

Z MPWL

$$\frac{X_1^3 + \dots + X_n^3}{X_1 + \dots + X_n} = \frac{\frac{X_1^3 + \dots + X_n^3}{n}}{\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}} \xrightarrow{p.n.} \frac{\mathbb{E}X_1^3}{\mathbb{E}X_1} = \frac{1}{2}$$

Podsumowując

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{x_1^3 + \dots + x_n^3}{x_1 + \dots + x_n} dx_1 \dots dx_n = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{X_1^3 + \dots + X_n^3}{X_1 + \dots + X_n}\right] \underset{\text{tw. Leb}}{=} \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} \frac{X_1^3 + \dots + X_n^3}{X_1 + \dots + X_n}\right] = \frac{1}{2}$$

Przykład [Dystrybuanta empiryczna]

Powtarzamy wielokrotnie pewne doświadczenie o nieznanym rozkładzie. Na podstawie otrzymanych wyników $X_1, \dots, X_n$ chcemy wyznaczyć ich dystrybuantę F. Definiujemy

$$\left[F_n(x,\omega) = \right] F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_n \leq x\}}$$

Powyższa funkcja $F_n(x) = F_n(x,\omega)$ nazywa się **dystrybuantą empiryczną**.

Tw. 8.5 (Gliwienko-Cantelli)

Zachodzi

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \to 0 \text{ p.n.}$$

Zauważmy, że dla zm. los. $Y_k = \mathbb{1}_{\{X_n \leq x\}}$ zachodzi $\mathbb{E}Y_k = \mathbb{P}[X_k \leq x] = F(x)$

a z MPWL

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k\leq x\}} = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n} \to \mathbb{E}Y_1 = F(x) \text{ p.n.}$$

Tw. 8.6 Jeżeli $\{X_n\}$ jest ciągiem n.z.l. o takim samym rozkładzie oraz istnieje stała c taka, że

$$\mathbb{P}\left[\lim_n \frac{X_1+\dots+X_n}{n} = c\right] > 0$$

to $\mathbb{E}|X_1| < \infty$ oraz $c = \mathbb{E}X_1$

D-d. Z prawa 0-1 Kołmogorowa

$$\mathbb{P}\left[\lim_n \frac{X_1+\dots+X_n}{n} = c\right] = 1$$

a stąd

$$\frac{X_n}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{S_{n-1}}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} \xrightarrow{0} \text{p.n.}$$

Zatem z p-stwem 1 zajdzie jedynie skończenie wiele zdarzeń $\{|X_n| > n\}$.

Lemat Borela-Cantelliego implikuje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[|X_1| > n] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[|X_n| > n] < \infty$$

a stąd wynika, że

$$\mathbb{E}|X_1| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[|X_1| > n] < \infty$$

z MPWL wynika więc

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \longrightarrow \mathbb{E}X_1 \quad \text{p.n.}$$

TW. 8.7, ciekawostka raczej

MPWL, Etemadi

Niech $\{X_n\}$ ciąg zm. los. które są PARAMI niezależne i mają jednakowy rozkład. Jeżeli $\mathbb{E}|X_1| < \infty$, to

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \longrightarrow \mathbb{E}X_1 \quad \text{p.n.}$$