Zad. 13

a) $\Omega = \{ (\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \{b, c\} \}$

Niech $X_k(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \omega_k = b \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$

Wtedy $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$ opisuje liczbę białych kul po n losowaniach. Zatem:

$$\mathbb{E}X = \sum \mathbb{E}X_k = \sum \left(\mathbb{P}[X_k = 1] \cdot 1 + \mathbb{P}[X_k = 0] \cdot 0 \right) =$$

$$= \sum \mathbb{P}[X_k = 1] = \sum \mathbb{P}[\omega_k = b] = n \frac{b}{b+c}$$

Dlaczego $\mathbb{P}[\omega_k = b] = \frac{b}{b+c}$?

Wyobraźmy sobie, że kule są ~~pomalowane~~ ponumerowane i pytamy o to jakie jest p-stwo że na k-tym miejscu znajdzie się jakaś konkretna, wybrana biała kula B? Zauważmy, że jeśli myślimy o ponumerowanych kulach, to każde zdarzenie elementarne jest równie prawdopodobne. Wszystkich losowań jest $\binom{b+c}{n} \cdot n!$, natomiast losowań, w których B jest na k-tym miejscu jest $\binom{b+c-1}{n-1} \cdot (n-1)!$. Zatem p-stwo, że B jest na k-tym miejscu wyraża się wzorem

$$\frac{\binom{b+c-1}{n-1} \cdot (n-1)!}{\binom{b+c}{n} \cdot n!} = \frac{(b+c-1)! \cdot (b+c-n)!}{(b+c)! \cdot (b+c-n)!} = \frac{1}{b+c}$$

Białych kul jest b, zatem p-stwo że jakaś biała kula jest na k-tym miejscu wynosi $b \cdot \frac{1}{b+c} = \frac{b}{b+c}$.

$\operatorname{Var} X$ obliczymy innym sposobem.

Niech teraz X_k oznacza l. wylosowanych białych kul do k-tego rzutu. Wtedy $X = X_n$. Ponadto $\operatorname{Var} X_0 = 0$. Dla $k \geq 1$:

$$\operatorname{Var} X_k = \mathbb{E} X_k^2 - (\mathbb{E} X_k)^2 = \mathbb{E} X_k^2 \cdot \mathbb{1}_{\omega_k = b} +$$

$$+ \mathbb{E} X_k^2 \mathbb{1}_{\omega_k = c} - (\mathbb{E} X_k)^2 = \mathbb{E}(1 + X_{k-1})^2 \cdot \mathbb{1}_{\omega_k = b}$$

$$+ \mathbb{E} X_{k-1}^2 \mathbb{1}_{\omega_k = c} - (\mathbb{E} X_k)^2 \overset{\text{nzl.}}{=} \mathbb{E}(1 + X_{k-1})^2 \cdot \mathbb{E} \mathbb{1}_{\omega_k = b}$$

$$+ \mathbb{E} X_{k-1}^2 \cdot \mathbb{E} \mathbb{1}_{\omega_k = c} - (\mathbb{E} X_k)^2 =$$

$$= \frac{b}{b+c} \mathbb{E}(1 + 2X_{k-1} + X_{k-1}^2) + \frac{c}{b+c} \mathbb{E} X_{k-1}^2 - (\mathbb{E} X_k)^2 =$$

$$= \frac{b}{b+c} + \frac{2b}{b+c} \mathbb{E} X_{k-1} + \mathbb{E} X_{k-1}^2 - (\mathbb{E} X_k)^2$$

$$= \frac{b}{b+c} + \frac{2b}{b+c} \cdot \frac{(k-1)b}{b+c} + \mathbb{E} X_{k-1}^2 - \left(\frac{kb}{b+c}\right)^2$$

$$= \underbrace{\frac{b}{b+c} + \frac{2b^2(k-1)}{(b+c)^2}} - \frac{k^2b^2}{(b+c)^2} + \underbrace{\mathbb{E}X_{k-1}^2}$$

$$\cancel{= \frac{b}{b+c} + \frac{b^2(2(k-1)-k^2)}{(b+c)^2} + \mathbb{E}X_{k-1}^2}$$

$$\mathbb{E}X_k^2$$

$$\mathbb{E}X_k^2 = \frac{b}{b+c} + \underbrace{\frac{2b^2(k-1)}{(b+c)^2}} + \mathbb{E}X_{k-1}^2 =$$

$$= \frac{kb}{b+c} + \frac{2b^2}{(b+c)^2} \cdot \frac{(k-1)k}{2} = \frac{kb}{b+c} + \frac{b^2 \cdot k(k-1)}{(b+c)^2}$$

Stąd $\operatorname{Var} X = \operatorname{Var} X_n = \frac{nb}{b+c} + \frac{b^2 n(n-1)}{(b+c)^2} - \frac{n^2b^2}{(b+c)^2} =$

$$= \frac{nb}{b+c} + \frac{-b^2n}{(b+c)^2} = \frac{nb^2 + nbc - b^2n}{(b+c)^2} = \frac{nbc}{(b+c)^2}$$

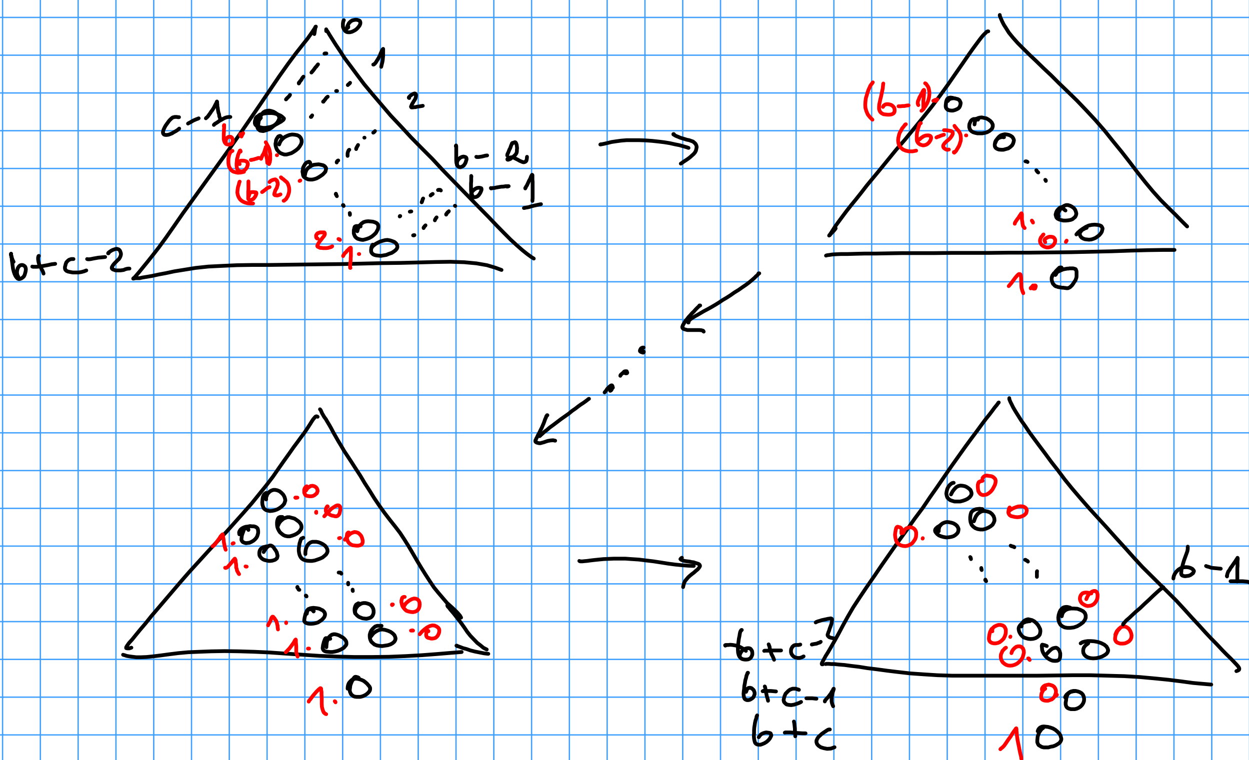
Zad. 13

b)
$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{b} k\,\mathbb{P}[\omega_1 = \ldots = \omega_k = b,\ \omega_{k+1} = c] =$$

$$= \sum_{k=1}^{b} k \cdot \frac{b}{b+c}\,\frac{b-1}{b+c-1} \cdot \ldots \cdot \frac{b-k+1}{b+c-k+1} \cdot \frac{c}{b+c-k}$$

$$= c\sum_{k=1}^{b} k \cdot \frac{b!}{(b-k)!} \cdot \frac{(b+c-k-1)!}{(b+c)!} = \frac{c\,b!}{(b+c)!}\sum_{k=1}^{b} k \cdot \binom{b+c-k-1}{b-k} \cdot (c-1)! =$$

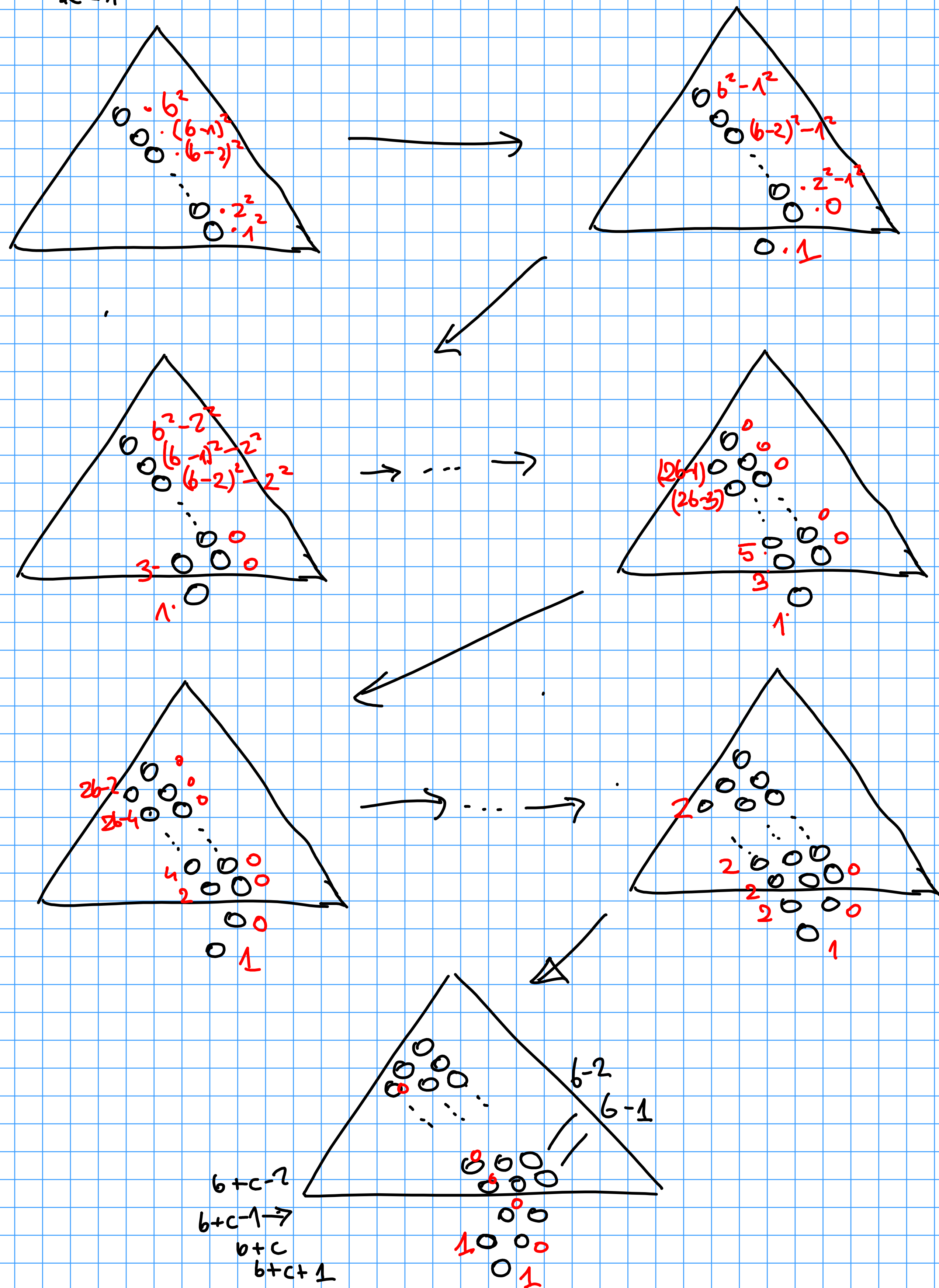
$$= \frac{c!\,b!}{(b+c)!} \cdot \sum_{k=1}^{b} k \cdot \binom{b+c-k-1}{b-k} = (*)$$



$$(*) = \frac{c!\,b!}{(b+c)!} \cdot \binom{b+c}{b-1} = \frac{c!\,b!}{(b+c)!} \cdot \frac{(b+c)!}{(b-1)!\,(c+1)!} = \frac{b}{c+1}$$

$$\operatorname{Var} X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = (\star)$$

$$\mathbb{E}X^2 = \frac{c\,b!}{(c+b)!}\sum_{k=1}^{b} k^2 \binom{b+c-k-1}{b-k} = (\star)$$



$$(\star) = \frac{b!\,c!}{(b+c)!} \cdot \left[\binom{b+c}{b-2} + \binom{b+c+1}{b-1}\right] =$$

$$= \frac{b!\,c!}{(b+c)!}\left(\frac{(b+c)!}{(b-2)!\,(c+2)!} + \frac{(b+c+1)!}{(b-1)!\,(c+2)!}\right)$$

$$= \frac{b(b-1)}{(c+1)(c+2)} + \frac{b(b+c+1)}{(c+1)(c+2)} = \frac{2b^2+bc}{(c+1)(c+2)}$$

$$(\star) = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{2b^2+bc}{(c+1)(c+2)} - \frac{b^2}{(c+1)^2} =$$

$$= \frac{(2b^2+bc)(c+1) - b^2(c+2)}{(c+1)^2(c+2)} = \frac{2b^2c + 2b^2 + bc^2 + bc - b^2c - 2b^2}{(c+1)^2(c+2)} =$$

$$= \frac{bc(b+c+1)}{(c+1)^2(c+2)}$$