RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA 1R
LISTA ZADAŃ NR 4

1. Zdarzenia A_1, $A_2, ..$ są niezależne i mają równe prawdopodobieństwa. Jaka jest szansa, że zajdzie skończenie wiele zdarzeń A_n?

2. Losujemy niezależnie nieskończenie wiele punktów z odcinka [0,1]. Uzasadnij, że z prawdopodobieństwem 1 w każdym otwartym odcinku $(a, b) \subset [0, 1]$ znajdzie się co najmniej 1 punkt.

3. Zdarzenia A_1, $A_2, ..$ są niezależne i $\mathbb{P}(A_n) = p_n \in (0, 1)$. Wykaż, że z prawdopodobieństwem 1 zachodzi co najmniej jedno ze zdarzeń A_n wtedy i tylko wtedy, gdy z prawdopodobieństwem 1 zachodzi nieskończenie wiele zdarzeń A_n.

4. Znajdź przykład przestrzeni probabilistycznej oraz ciągu zbiorów A_n takich, że $\sum \mathbb{P}(A_n) = \infty$, ale $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$.

5*. Rzucamy nieskończenie wiele razy monetą, w której orzeł wypada w prawdopodobieństwem $p \geq 1/2$. Niech A_n oznacza zdarzenie, że pomiędzy rzutem 2^n a 2^{n+1} otrzymano ciąg n kolejnych orłów. Pokaż, że zdarzenia A_n z prawdopodobieństwem 1 zachodzą nieskończenie wiele razy.

6*. Rzucamy nieskończenie wiele razy symetryczną monetą. Niech A_n-w pierwszych n rzutach było tyle samo orłów co reszek. Wykaż, że z prawdopodobieństwem 1 zachodzi nieskończenie wiele zdarzeń A_n.

7. Niech X, Y będą zmiennymi losowymi określonymi na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i niech $A \in \mathcal{F}$. Uzasadnij, że

$$Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega), & \text{gdy } \omega \in A \\ Y(\omega), & \text{gdy } \omega \in A^c \end{cases}$$

jest zmienną losową.

8. Niech X, Y będą zmiennymi losowymi określonymi na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pokaż, że

$$\sup_{A \in \mathcal{F}} \left| \mathbb{P}[X \in A] - \mathbb{P}[Y \in A] \right| \leq \mathbb{P}[X \neq Y].$$

9. Dana jest przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ oraz funkcja $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$. Uzasadnij, że jeżeli $X^{-1}(a, b) \in \mathcal{F}$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$, to X jest zmienną losową.

10. Podaj przykład przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i funkcji $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, która nie jest zmienną losową.

11. Niech $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem zmiennych losowych. Wykaż, że jeżeli funkcja $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ jest mierzalna, to $f(X_1, \ldots, X_n)$ jest zmienną losową. Wywnioskuj, że $X_1 + X_2$ oraz $X_1 \cdot X_2$ są zmiennymi losowymi. Uzasadnij, że $\inf_n X_n$, $\sup_n X_n$, $\liminf_n X_n$, $\limsup_n X_n$ są również zmiennymi losowymi.

12. Dystrybuanta zmiennej losowej X dana jest wzorem

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < -1 \\ (t+1)/2 & \text{dla } -1 \leq t < 0 \\ 3/4 & \text{dla } 0 \leq t < 4 \\ 1 & \text{dla } t \geq 4. \end{cases}$$

Oblicz $\mathbb{P}[X = -5]$, $\mathbb{P}[2 < X \leq 5]$, $\mathbb{P}[X = 4]$, $\mathbb{P}[-1 < X < 0]$.

13. Na skrzyżowaniu zamontowana jest sygnalizacja świetlna. W jednym z kierunków światło czerwone świeci się przez 2 minuty, a zielone 40 sekund. Samochód dojeżdża do skrzyżowania w losowym momencie. Niech X oznacza czas spędzony na skrzyżowaniu. Wyznacz rozkład X oraz dystrybuantę. Załóżmy, że po 1 minucie samochód wciąż nie przejechał skrzyżowania. Jakie jest prawdopodobieństwo, że opuści je w ciągu najbliższych 20 sekund?

14. Niech X będzie zmienną losową o ciągłej dystrybuancie F. Pokaż, że $Y = F(X)$ jest zmienną losową (tzn. że jest mierzalna) o rozkładzie $U([0, 1])$.

15. Niech U będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na $[0, 2]$. Znajdź dystrybuanty i rozkłady: $Y = U - 1$, $Y = U^4$, $Y = 1/(U + 2)$, $Y = \log(U + 2)$, $Y = |U - 1|$.