

RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA 1R
LISTA ZADAŃ NR 11

1*. Niech X_1, X_2, \dots będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o takim samym rozkładzie i spełniających $\mathbb{E}[X_1] = 0$ oraz $\mathbb{E}X^2 < \infty$. Korzystając z lematu Kroneckera pokaż, że dla każdego $\varepsilon > 0$

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n^{1/2}(\log n)^{1/2+\varepsilon}} \rightarrow 0 \quad \text{p.w.}$$

2*. Niech $\{X_n\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że $X_n \sim U[1/n, 1]$. Pokazać, że ciąg $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ jest zbieżny p.n. i wyznaczyć jego granicę.

3*. Niech $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładach:

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = p_n, \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - 2p_n.$$

Znaleźć warunek konieczny i dostateczny, by ciąg $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ spełniał MPWL.

4. Niech $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładach:

$$\mathbb{P}(X_n = n+1) = \mathbb{P}(X_n = -(n+1)) = \frac{1}{2(n+1)\log(n+1)}, \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{(n+1)\log(n+1)}.$$

Pokazać, że ciąg $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ spełnia SPWL, a nie spełnia MPWL.

5. Niech $\{X_n\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie $U[-1, 1]$. Czy ciąg $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^i$ jest zbieżny p.w.?

6. Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^\infty X_n$, jeśli $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładach:

- a) $\mathbb{P}(X_n = 2^{-n}) = \mathbb{P}(X_n = 0) = 1/2$;
- b) $\mathbb{P}(X_n = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0) = 1/n$;

7*. Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^\infty X_n$, jeśli $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie

$$\mathbb{P}(X_n = a_n) = \mathbb{P}(X_n = -a_n) = 1/2$$

dla pewnego ciągu $\{a_n\}_{n=1}^\infty$.

8*. Niech $\{X_n\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że X_n ma rozkład wykładniczy $\text{Exp}(\lambda_n)$. Pokaż, że szereg $\sum_{n=1}^\infty X_n$ jest zbieżny p.n. wtedy i tylko wtedy gdy $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\lambda_n}$ jest zbieżny.

Wskazówka: Skorzystaj z tw. Kołmogorowa o trzech szeregach.

9. Niech $\mathbb{P}(X_n = n) = \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{n^3}$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{2}{n^3}$. Pokaż, że $\sum_{n=1}^\infty X_n$ jest zbieżny p.n., chociaż $\sum_{n=1}^\infty \text{Var}(X_n) = \infty$.

10. Prawdopodobieństwo urodzenia chłopca wynosi 0,517. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wśród $n = 10000$ noworodków liczba chłopców nie przewyższy liczby dziewcząt?

11. Stwierdzono, iż przeciętnie 30% spośród ogólnej liczby studentów przyjętych na studia kończy je w terminie. Ile osób trzeba przyjąć na pierwszy rok, aby z prawdopodobieństwem co najmniej 0,9 co najmniej 50 osób skończyło studia w terminie?