Zad. 5 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, $X_n \sim \mathcal{U}(-n,n)$, $f_{X_n}(x) = \frac{1}{2n}\mathbb{1}_{[-n,n]}$

Z tw. Kołmogorowa o 3 szeregach wiemy, że

$\sum_{n\geq 1}\frac{X_n}{n^{\alpha}}$ zb. p.w. iff dla ustalonego $c>0$ zbiegają szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\frac{X_n}{n^{\alpha}}\right)^{(c)}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}\left[\left(\frac{X_n}{n^{\alpha}}\right)^{(c)}\right]$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[\left|\frac{X_n}{n^{\alpha}}\right| > c\right]$.

~~Ustalmy $c=1$. Zauważmy, że $\left(\frac{X_n}{n^{\alpha}}\right)^{(c)} \sim \mathcal{U}($~~

~~Z ita~~ Najpierw:

$$\mathbb{E}\,\frac{X_n}{n^{\alpha}} = \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{n^{\alpha}} f_{X_n}(x)\,dx = \int_{-n}^{n} \frac{x}{n^{\alpha}}\cdot\frac{1}{2n}\,dx$$

$$= \frac{1}{2n^{\alpha+1}}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{-n}^{n} = 0; \quad \text{zatem } \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}\left(\frac{X_n}{n^{\alpha}}\right) = 0.$$

Ponadto $\mathbb{E}\left(\frac{X_n}{n^{\alpha}}\right)^2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{n^{2\alpha}}\cdot f_{X_n}(x)\,dx = \int_{-n}^{n}\frac{x^2}{n^{2\alpha}}\cdot\frac{1}{2n}\,dx =$

$$= \frac{1}{2n^{2\alpha+1}}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{-n}^{n} = \frac{n^3}{3n^{2\alpha+1}} = \frac{1}{3}n^{2-2\alpha}$$

Stąd $\mathrm{Var}\,\frac{X_n}{n^{\alpha}} = \frac{1}{3}n^{2-2\alpha}$.

Z analizy wiemy, że szereg $\sum_{n\geq 1}\mathrm{Var}\,\frac{X_n}{n^{\alpha}} = \frac{1}{3}\sum_{n\geq 1} n^{2-2\alpha}$ zb. p.w., gdy $2-2\alpha < -1 \iff \frac{3}{2} < \alpha$.

Zatem z tw. Kołmogorowa o 2 szeregach $\sum \frac{X_n}{n^{\alpha}}$ zb. p.w., gdy $\alpha > \frac{3}{2}$

Zauważmy, że $\sum_{n\geq 1} \frac{X_n}{n^\alpha} \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{X_n}{n^\beta}$ gdy $\alpha \leq \beta$.

Jeżeli pokażemy rozbieżność szeregu dla $\alpha = 3/2$, to pokażemy rozbieżność dla wszystkich $\alpha \leq \frac{3}{2}$. Ustalmy $c=1$.

Wtedy $\left(\frac{X_n}{n^{3/2}}\right)^{(1)} = \begin{cases} \frac{X_n}{n^{3/2}} & \text{gdy } |X_n| \leq n^{3/2} \\ 0 & \neg \end{cases} =$

$= \frac{X_n}{n^{3/2}}$, bo $|X_n| \leq n \leq n^{3/2}$.

Zatem $\sum_{n=1}^{\infty} Var\left(\frac{X_n}{n^{3/2}}\right)^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} Var \frac{X_n}{n^{3/2}} =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} n^{2-3} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Longrightarrow \infty$

Zatem z tw. Kołmogorowa o 3 szeregach $\sum_{n\geq 1} \frac{X_n}{n^\alpha}$ rozbiega dla $\alpha \leq 3/2$.

Stąd $\alpha > 3/2$