Zad. 4 $X \sim Exp(\lambda)$, $Y \sim Exp(\mu)$

$EZ =$ $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $f_Y(x) = \mu e^{-\mu x}$

$= \mathbb{E} \min\{X, Y\} = \int_\Omega \min\{X, Y\} \, d\mathbb{P}$ Dla $t < 0$ $F_Z(t) = 0$,
dla $t \geq 0$

$F_Z(t) = \mathbb{P}[\min\{X, Y\} \leq t]$

$= \mathbb{P}[(X \leq t) \cup (Y \leq t)]$

$= \mathbb{P}[X \leq t] + \mathbb{P}[Y \leq t] - \mathbb{P}[X \leq t, Y \leq t]$

$\overset{\text{niezal.}}{=} 1 - e^{-\lambda t} + 1 - e^{-\mu t} - (1 - e^{-\lambda t})(1 - e^{-\mu t})$

$= 2 - e^{-\lambda t} - e^{-\mu t} - 1 + e^{-\lambda t} + e^{-\mu t} - e^{-\lambda t + \mu t}$

$= 1 - e^{-\lambda t - \mu t} = 1 - e^{-t(\lambda + \mu)}$

Zatem $Z \sim Exp(\lambda + \mu)$

Stąd $\mathbb{E} Z = \frac{1}{\lambda + \mu}$, $Var\, Z = \frac{1}{(\lambda + \mu)^2}$