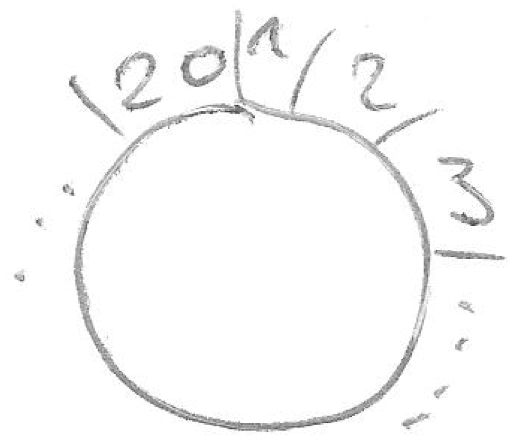
Zad.1

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{jeśli na i-tym krześle siedzi dziewczyna między chłopakami} \\ 0 & \neg \end{cases}$$



$$X = \sum_{i=1}^{20} X_i \qquad EX = \sum_{i=1}^{20} EX_i = (*)$$

$$EX_i = 1 \cdot \mathbb{P}[\text{na i-tym miejscu dziewczyna, obok niej chłopcy}]$$

$$= \binom{10}{1} \cdot \binom{10}{2} \cdot 17! \cdot 2! \cdot \frac{1}{20!}$$

tyle jest wszystkich ustawień

ustawiamy chłopaków obok dziewczyny

resztę ustawiamy dowolnie

wybieramy chłopaków, którzy mają być obok niej

wybieramy dziewczynę, która ma usiąść na i-tym krześle

$$= \frac{10 \cdot \frac{10 \cdot 9}{\cancel{2}} \cdot 17! \cdot \cancel{2}}{20!} = \frac{10 \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{9}}{{}_2\cancel{20} \cdot 19 \cdot \cancel{18}_2} =$$

$$= \frac{10}{4 \cdot 19}$$

$$(*) = 20 \cdot \frac{10}{4 \cdot 19} = \frac{50}{19}$$

Zad. 2

$X_i \sim \mathcal{E}xp(1) \iff f_{X_i}(x) = e^{-x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}, \quad \mathbb{E}X_i = 1$

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n + n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} + 1 \xrightarrow[\text{p.w.}]{\text{MPWL}} \mathbb{E}X_1 + 1 = 2$$

$$\frac{X_1^2 + \dots + X_n^2 + \sqrt{n}}{n} = \frac{X_1^2 + \dots + X_n^2}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} = (*)$$

$$\mathbb{E}X_1^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_{X_1}(x)\,dx = \int_0^\infty x^2 e^{-x}\,dx =$$

$$= -x^2 e^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty 2x e^{-x}\,dx$$

$$= \underbrace{-x^2 e^{-x}\Big|_0^\infty}_{=0} + 2\int_0^\infty x e^{-x}\,dx$$

$$= 0 + 2\mathbb{E}X_1 = 2$$

$$(*) \xrightarrow[\text{p.w.}]{\text{MPWL}} 2$$

Stąd
$$\frac{X_1 + \dots + X_n + n}{X_1^2 + \dots + X_n^2 + \sqrt{n}} = \frac{\frac{X_1 + \dots + X_n + n}{n}}{\frac{X_1^2 + \dots + X_n^2 + \sqrt{n}}{n}} \longrightarrow 1$$

Zad. ~~3~~ 4 $\quad X \sim Exp(\lambda)$, $Y \sim Exp(\mu)$

$\mathbb{E} Z = \quad f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $f_Y(x) = \mu e^{-\mu x}$

$\cancel{= \mathbb{E} \min\{X, Y\} = \int_\Omega \min\{X, Y\} \, d\mathbb{P}}$ $\quad$ Dla $t < 0$ $\quad F_Z(t) = 0$,

dla $t \geq 0$

$$F_Z(t) = \mathbb{P}[\min\{X, Y\} \leq t]$$

$$= \mathbb{P}[(X \leq t) \cup (Y \leq t)]$$

$$= \mathbb{P}[X \leq t] + \mathbb{P}[Y \leq t] - \mathbb{P}[X \leq t, Y \leq t]$$

$$\overset{\text{niezal.}}{=} 1 - e^{-\lambda t} + 1 - e^{-\mu t} - (1 - e^{-\lambda t})(1 - e^{-\mu t})$$

$$= 2 - e^{-\lambda t} - e^{-\mu t} - 1 + e^{-\lambda t} + e^{-\mu t} - e^{-\lambda t - \mu t}$$

$$= 1 - e^{-\lambda t - \mu t} = 1 - e^{-t(\lambda + \mu)}$$

Zatem $\quad Z \sim Exp(\lambda + \mu)$

Stąd $\quad \mathbb{E} Z = \frac{1}{\lambda + \mu}$, $\quad Var Z = \frac{1}{(\lambda + \mu)^2}$

Zad. 5 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, $X_n \sim \mathcal{U}(-n,n)$, $f_{X_n}(x) = \frac{1}{2n} \mathbb{1}_{[-n,n]}$

Z tw. Kołmogorowa o 3 szeregach wiemy, że

$\sum\limits_{n\geq 1} \frac{X_n}{n^\alpha}$ zb. p.w. iff dla ustalonego $c>0$

zbiegają szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\frac{X_n}{n^\alpha}\right)^{(c)}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}\left[\left(\frac{X_n}{n^\alpha}\right)^{(c)}\right]$

oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[\left|\frac{X_n}{n^\alpha}\right| > c\right]$.

~~Ustalmy $c=1$. Zauważmy, że $\left(\frac{X_n}{n^\alpha}\right)^{(c)} \sim \mathcal{U}($~~

~~Z tą~~ Najpierw:

$$\mathbb{E}\frac{X_n}{n^\alpha} = \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{n^\alpha} f_{X_n}(x)\,dx = \int_{-n}^{n} \frac{x}{n^\alpha}\cdot\frac{1}{2n}\,dx$$

$$= \frac{1}{2n^{\alpha+1}}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-n}^{n} = 0; \quad \text{zatem } \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}\left(\frac{X_n}{n^\alpha}\right) = 0.$$

Ponadto $\mathbb{E}\left(\frac{X_n}{n^\alpha}\right)^2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{n^{2\alpha}}\cdot f_{X_n}(x)\,dx = \int_{-n}^{n}\frac{x^2}{n^{2\alpha}}\cdot\frac{1}{2n}\,dx =$

$$= \frac{1}{2n^{2\alpha+1}}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-n}^{n} = \frac{n^3}{3n^{2\alpha+1}} = \frac{1}{3}n^{2-2\alpha}$$

Stąd $\mathrm{Var}\frac{X_n}{n^\alpha} = \frac{1}{3}n^{2-2\alpha}$.

Z analizy wiemy, że szereg $\sum\limits_{n\geq 1}\mathrm{Var}\frac{X_n}{n^\alpha} = \frac{1}{3}\sum\limits_{n\geq 1} n^{2-2\alpha}$

zb. p.w., gdy $2-2\alpha < -1 \iff \frac{3}{2} < \alpha$.

Zatem z tw. Kołmogorowa o 2 szeregach

$\sum \frac{X_n}{n^\alpha}$ zb. p.w., gdy $\alpha > \frac{3}{2}$

Zauważmy, że $\sum_{n\geq 1} \frac{X_n}{n^\alpha} \geq \sum_{n\geq 1} \frac{X_n}{n^\beta}$ gdy $\alpha \leq \beta$.

Jeżeli pokażemy rozbieżność szeregu dla $\alpha = 3/2$, to pokażemy rozbieżność dla wszystkich $\alpha \leq \frac{3}{2}$. Ustalmy $c=1$.

Wtedy $\left(\frac{X_n}{n^{3/2}}\right)^{(1)} = \begin{cases} \frac{X_n}{n^{3/2}} & \text{gdy } |X_n| \leq n^{3/2} \\ 0 & \neg \end{cases} =$

$$= \frac{X_n}{n^{3/2}}, \text{ bo } |X_n| \leq n \leq n^{3/2}.$$

Zatem $\sum_{n=1}^{\infty} Var\left(\frac{X_n}{n^{3/2}}\right)^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} Var \frac{X_n}{n^{3/2}} =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 1/3\, n^{2-3} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Longrightarrow \infty$$

Zatem z tw. Kołmogorowa o 3 szeregach $\sum_{n\geq 1} \frac{X_n}{n^\alpha}$ rozbiega dla $\alpha \leq 3/2$.

Stąd $\alpha > 3/2$

Zad. 6 $\mathbb{P}[X_n=n]=\mathbb{P}[X_n=-n]=\frac{1}{n^2}$, $\mathbb{P}[X_n=0]=1-\frac{2}{n^2}$

Chcemy pokazać, że $\{X_n\}$ mają wspólnie ograniczoną wariancję (są nieskorelowane, bo są niezależne).

$$\operatorname{Var} X_n = \mathbb{E}X_n^2 - \underbrace{(\mathbb{E}X_n)^2}_{=0} = \mathbb{E}X_n^2 =$$

$$= n^2 \cdot \mathbb{P}[X_n^2=n^2] = n^2 \cdot \frac{2}{n^2} = 2.$$

Zatem zm. losowe spełniają założenie SPWL, więc

$$\frac{X_1+\ldots+X_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$