Franciszek Malinka

Zad. 1

(a) B – wyciągnięcie białej kuli. Skorzystamy ze wzoru na p-stwo całkowite

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}[B|A_k]\cdot\mathbb{P}[A_k] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \cdot \sum_{k=0}^{n} k =$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \cancel{\frac{n^2+n}{2n^2+4n+2}} = \frac{1}{2}$$

(b) ~~Skorzystamy ze wzoru Bayesa~~

$$\mathbb{P}[A_k|B] = \frac{\mathbb{P}[A_k \cap B]}{\mathbb{P}[B]} = \frac{\mathbb{P}[B|A_k]\cdot\mathbb{P}[A_k]}{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2 \cdot \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n+1} = \cancel{\frac{2}{k(n+1)}} \; \frac{2k}{n(n+1)}$$

Zad. 2 Dla $t < n$

$$\mathbb{P}[X+Y \in (-\infty, t]] = \mathbb{P}[X+Y \in (-\infty, 0)] +$$
$$+ \mathbb{P}[X+Y \in [0,1)] + \mathbb{P}[X+Y \in [1,2)] + \ldots +$$
$$+ \mathbb{P}[X+Y \in [\lfloor t \rfloor, t]] = (*)$$

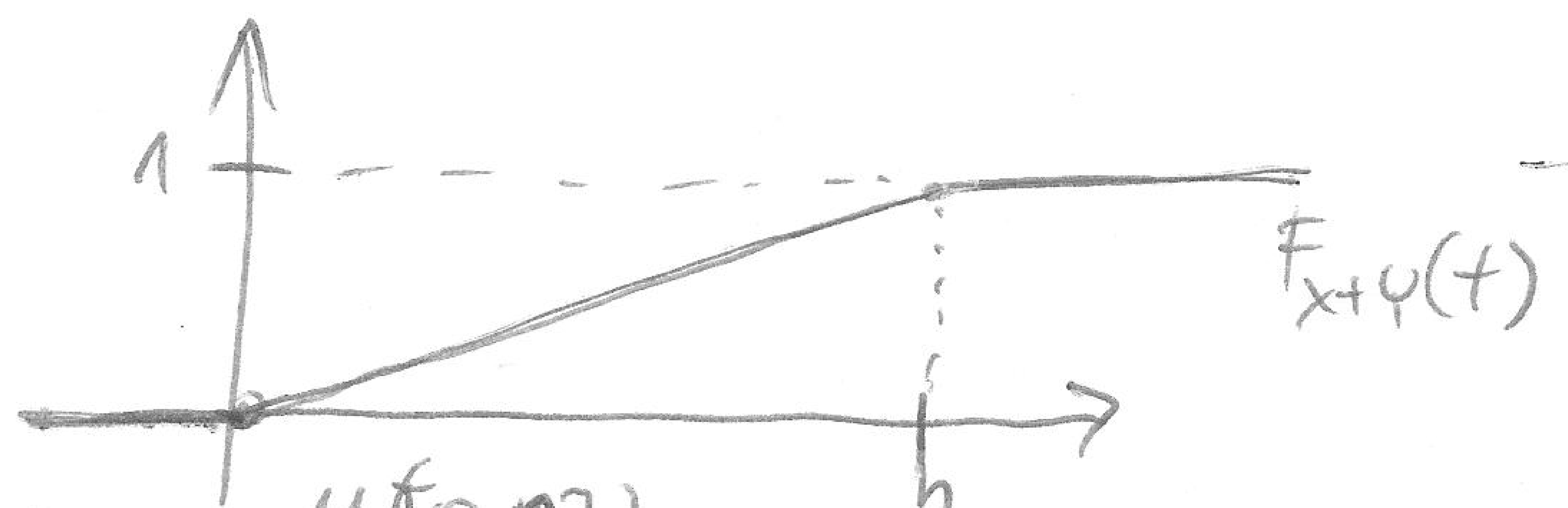
podłoga

$$\mathbb{P}[X+Y \in [0,1)] = \mathbb{P}[Y < 1] = \frac{1}{n}$$
$$\mathbb{P}[X+Y \in [1,2)] = \mathbb{P}[1 \leq Y < 2] = \frac{1}{n}$$
$$\vdots$$
$$\mathbb{P}[X+Y \in [k, k+1)] = \mathbb{P}[k \leq Y < k+1] = \frac{1}{n}$$
dla $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$

$$(*) = 0 + \lfloor t \rfloor \cdot \frac{1}{n} + \mathbb{P}[X+Y \in [\lfloor t \rfloor, t]] =$$
$$= \lfloor t \rfloor \cdot \frac{1}{n} + \mathbb{P}[X \in [0, t - \lfloor t \rfloor], Y = \lfloor t \rfloor] \overset{\text{niezal. } X, Y}{=}$$
$$= \lfloor t \rfloor \cdot \frac{1}{n} + (t - \lfloor t \rfloor) \cdot \frac{1}{n} = \frac{t}{n}$$

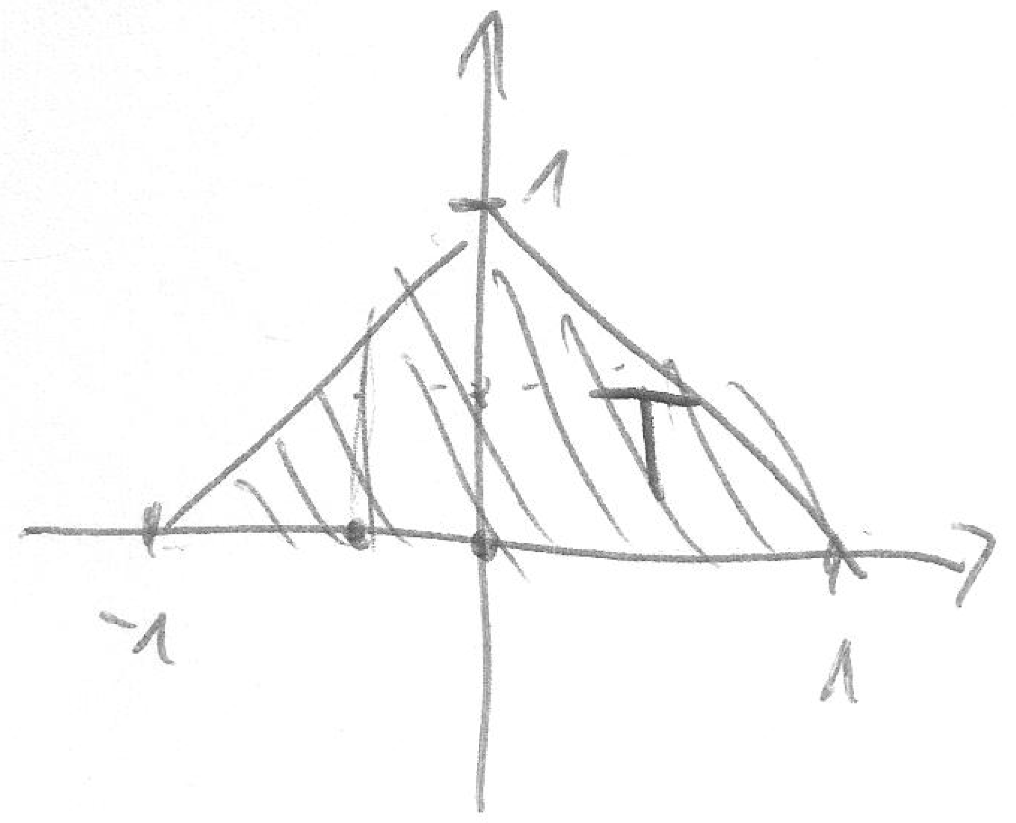
Dla $t \geq n$ $\mathbb{P}[X+Y \leq t] = 1$. Zatem

$$F_{X+Y}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{t}{n} & t < n \\ 1 & t \geq n \end{cases}$$



Jest to rozkład jednostajny na $U([0,n])$

Zad. 3



$f_{(X,Y)} = \mathbb{1}_T(x,y)$

Dla $A \in \mathcal{B}or([-1,1])$

Fubini

$\mathbb{P}[X \in A] = \int_{A\times\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy =$

$= \int_A \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_T(x,y)\,dy\,dx =$

$= \int_A \int_0^{1-|x|} 1\,dy\,dx = \int_A \underbrace{1-|x|}_{\text{gęstość } X}\,dx$

Analogicznie $\mathbb{P}[Y \in A] = \int_{\mathbb{R}\times A} \mathbb{1}_T(x,y)\,dx\,dy =$

$= \int_A \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_T(x,y)\,dx\,dy = \int_A \int_{y-1}^{1-y} 1\,dx\,dy =$

$= \int_A 1-y-(y-1)\,dy = \int_A \underbrace{2-2y}_{\text{gęstość } Y}\,dy$

X, Y są niezależne $\Leftrightarrow f_{(X,Y)} = f_X \cdot f_Y$

$f_X \cdot f_Y \neq 1$ dla bardzo wielu punktów, więc nie są niezależne.

np. $f_X(\frac{1}{2}) \cdot f_Y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \neq 1 = \mathbb{1}_T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Zad. 4

A_k - w k-tym razie losowania wyciągnęliśmy białą kulę.

$$\mathbb{P}[A_k] = \frac{1}{k}, \quad \sum \mathbb{P}[A_k] = \infty$$

Zdarzenia są oczywiście niezależne, zatem z lematu Borela-Cantellego

$$\mathbb{P}[\limsup_k A_k] = 1$$

$$\Updownarrow$$

A_k zachodzi ∞ razy

Zad. 5

$$\mathbb{P}[X<t, Y<1] = \frac{1}{2}\mathbb{P}[X<t]$$

a) $\mathbb{P}[Y<1]$ Niech $A_n =$ " $X<n, Y<1$ "

Wtedy $A_n \nearrow A =$ " $Y<1$ "

Zatem z tw. o ciągłości

$$\mathbb{P}[Y<1] = \mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[\lim_n A_n] =$$

$$= \lim_n \mathbb{P}[A_n] = \lim_n \mathbb{P}[X<n, Y<1] =$$

$$= \lim_n \frac{1}{2}\mathbb{P}[X<n] = \frac{1}{2}\lim_n \mathbb{P}[X<n] = \frac{1}{2}$$

z własn. dystrybuanty.

(b)

$\mathbb{P}[X\in B, Y<1]$

Wiemy, że $\mathbb{P}[X\in(-\infty,t], Y<1] = \frac{1}{2}\mathbb{P}[X\in(-\infty,t]]$.

Niech $\mathcal{K} = \{(-\infty,t] : t\in\mathbb{R}\}$. Jest to π-układ.

Niech $\mathcal{L} = \{B\in \mathcal{B}or(\mathbb{R}) : \mathbb{P}[X\in B, Y<1] = \frac{1}{2}\mathbb{P}[X\in B]\}$.

$\mathcal{L}$ jest λ-układem, bo

1° $\cancel{\Omega}$ $\mathbb{R}\in\mathcal{L}$ (z (a))

2° Weźmy $A, B \in \cancel{\mathcal{B}or(\mathbb{R})}\ \mathcal{L}$ t. że $A\subseteq B$.

~~Czyli~~ Wtedy $\mathbb{P}[X\in B\setminus A, Y<1] = \mathbb{P}[X\in B, Y<1] -$

$$- \mathbb{P}[X\in A, Y<1] = \frac{1}{2}(\mathbb{P}[X\in B] - \mathbb{P}[X\in A]) =$$

$$= \frac{1}{2}\mathbb{P}[X\in B\setminus A] \Rightarrow B\setminus A\in\mathcal{L}$$

3° Weźmy $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ wstępujący, zawarty w $\mathcal{L}$. $A = \bigcup_n^{\infty} A_n$

$$\mathbb{P}[X \in A, Y < 1] = \lim_n \mathbb{P}[X \in A_n, Y < 1] = \lim_n \frac{1}{2}\mathbb{P}[X \in A_n] = \frac{1}{2}\mathbb{P}[X \in A]$$

z tw. o ciągłości miary

tw. o ciągłości miary.

Zatem $\mathcal{L}$ jest λ-układem.

Z tw. Dynkina $\underbrace{\sigma(\mathcal{K})}_{\mathrm{Bor}(\mathbb{R})} \subseteq \mathcal{L} \subset \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$,

zatem $\mathcal{L} = \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$ ∎