Zad. 4 $\{X_n\}$ i.i.d., $X_1 \sim Exp(\cancel{1})$, $f_{X_1}(x) = \cancel{1} e^{-\cancel{1}x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$

$$\overset{\shortparallel}{e^{-x}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)}$$

$$Z_k = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } X_{2k} > 3X_{2k-1} \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Skoro $\{X_n\}$ i.i.d., to $\{Z_k\}$ też i.i.d, bo kolejne zmienne losowe zależą od rozłącznych par X_{2k}, X_{2k-1}.

$$\mathbb{E} Z_k = \mathbb{P}[Z_k = 1]\cdot 1 + \mathbb{P}[Z_k = 0]\cdot 0 =$$

$$= \mathbb{P}[Z_k = 1] = \mathbb{P}[X_{2k} > 3X_{2k-1}]$$

$$= \mathbb{P}[0 > 3X_{2k-1} - X_{2k}]$$

Chcielibyśmy policzyć dystrybuantę $3X_{2k-1} - X_{2k}$ w punkcie 0. $3X_{2k-1} \sim Exp(\frac{1}{3})$

$$f_{3X_{2k-1}}(x) = \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$$

$-X_{2k}$ ma gęstość $f_{-X_{2k}}(x) = \cancel{e^{x}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)}$

$$e^{x}\mathbb{1}_{[-\infty,0]}(x)$$

(odbicie względem OY).

Zatem zm. los $3X_{2k-1} - X_{2k}$ ma gęstość

$$f(x) = \underbrace{f_{3X_{2k-1}}}_{f_1} * \underbrace{f_{-3X_{2k}}}_{f_2}(x) = \int_{\mathbb{R}} f_1(x-y) f_2(y)\, dy =$$