Zad. 6 $\{X_n\}$ i.i.d., $X_n \sim \mathcal{E}xp(1)$

$$\mathbb{P}\left[\limsup_n \frac{X_n}{\log n} = 1\right] = 1$$

Ustalmy $\delta > 0$. Niech $A_n = \left\{\frac{X_n}{\log n} > 1+\delta\right\}$.

$$\mathbb{P}[A_n] = \mathbb{P}\left[\frac{X_n}{\log n} > 1+\delta\right] = \mathbb{P}[X_n > (1+\delta)\log n]$$

$$= 1 - \mathbb{P}[X_n \leqslant (1+\delta)\log n] = 1 - 1 + e^{-(1+\delta)\log n} =$$

$$= n^{-(1+\delta)} = \frac{1}{n^{1+\delta}}$$

Z analizy wiemy, że $\sum \mathbb{P}[A_n] = \sum \frac{1}{n^{1+\delta}}$ zb.,
zatem z lematu Borela-Cantelliego

$$\mathbb{P}[\limsup A_n] = 0.$$

Z drugiej strony, niech $B_n = \left\{\frac{X_n}{\log n} > 1-\delta\right\}$.

$$\mathbb{P}[B_n] = (\text{analogicznie})\ \frac{1}{n^{1-\delta}}.$$

Z analizy wiemy, że $\sum \mathbb{P}[B_n] = \infty$.
Co więcej, skoro $\{X_n\}$ niezależne, to $\{B_n\}$ też,
zatem z lematu B-C

$$\mathbb{P}[\limsup B_n] = 1.$$

~~Wiemy~~ Idąc z $\delta \to 0$ dostajemy, że

$$\mathbb{P}\left[\limsup_n \frac{X_n}{\log n} \geqslant 1\right] = 1 \quad (\text{z } B_n)$$

$$\mathbb{P}\left[\limsup \frac{X_n}{\log n} > 1\right] = 0 \quad (\text{z } A_n)$$

Zatem $\mathbb{P}\left[\limsup \frac{X_n}{\log n} = 1\right] = 1.$ ∎
(przekrój zdarzeń)