Zad. 5 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $X_n \sim Geom(p_n)$

$$\mathbb{P}[X_n \geq k] = (1-p_n)^{k-1}, \quad k \geq 1.$$

Zakł. $p_n \longrightarrow 0$. $\quad \mathbb{P}[X_n = k] = p_n(1-p_n)^{k-1}$

Policzmy f. char. zmiennej $p_n X_n$:

$$\cancel{\varphi_{p_n X_n}(t) = \varphi_{X_n}(p_n t), \quad \varphi_{X_n}(t) = \mathbb{E} e^{itX_n} =}$$

$$\cancel{= \mathbb{E}\cos tX_n + i\mathbb{E}\sin tX_n}$$

$$\cancel{(1) = \int_1^\infty}$$

Zmienna $p_n X_n$ ma rozkład dyskretny, więc $\varphi_{X_n}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{X_n}(k) \cdot e^{itk}$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} p_n (1-p_n)^{k-1} e^{itk} =$$

$$= p_n e^{it} \sum_{k=0}^{\infty} (1-p_n)^{k} e^{itk} =$$

$$= p_n e^{it} \cdot \frac{1}{1-(1-p_n)e^{it}} = \frac{p_n e^{it}}{1-(1-p_n)e^{it}}$$

Zatem $\varphi_{p_n X_n}(t) = \varphi_{X_n}(p_n t) = \dfrac{p_n e^{ip_n t}}{1-(1-p_n)e^{ip_n t}}$

$\lim_n \varphi_{p_n X_n}(t) = \lim_n \varphi_{X_n}(p_n t)$ ~~Coś nie tak...~~

$$= \lim_n \frac{p_n e^{ip_n t}}{1-(1-p_n)e^{ip_n t}} \overset{H[\frac{0}{0}]}{=} \cancel{\lim_n \frac{ip_n^2 e^{ip_n t}}{-ip_n t(1-p_n)e^{ip_n t}} = \lim_n -\frac{p_n e^{ip_n t}}{(1-p_n)e^{ip_n t}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{ip_n t} + itp_n e^{ip_n t}}{+e^{ip_n t} - (1-p_n)it e^{ip_n t}} = \frac{1+0}{1-it}$$

Z tw. o jednoznaczności wiemy że to f. char. rozkł. wykładniczego z par. 1.

Zatem $p_1 X_n \xrightarrow{d} Exp(1)$