Zad. 4 $\{X_n\}$ i.i.d., $X_1 \sim \mathcal{E}xp(\cancel{1})$, $f_{X_1}(x) = \cancel{1} e^{-\cancel{1}x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$

$$\overset{\shortparallel}{e^{-x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)}$$

$$Z_k = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } X_{2k} > 3X_{2k-1} \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Skoro $\{X_n\}$ i.i.d., to $\{Z_k\}$ też i.i.d, bo kolejne zmienne losowe zależą od rozłącznych par X_{2k}, X_{2k-1}.

$$\mathbb{E} Z_k = \mathbb{P}[Z_k = 1] \cdot 1 + \mathbb{P}[Z_k = 0] \cdot 0 =$$

$$= \mathbb{P}[Z_k = 1] = \mathbb{P}[X_{2k} > 3X_{2k-1}]$$

$$= \mathbb{P}[0 > 3X_{2k-1} - X_{2k}]$$

Chcielibyśmy policzyć dystrybuantę $3X_{2k-1} - X_{2k}$ w punkcie 0. $3X_{2k-1} \sim \mathcal{E}xp(\frac{1}{3})$

$$f_{3X_{2k-1}}(x) = \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$$

$-X_{2k}$ ma gęstość $f_{-X_{2k}}(x) = \cancel{e^{x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}}$

$$e^{x} \mathbb{1}_{[-\infty,0]}(x)$$

(odbicie względem OY).

Zatem zm. los $3X_{2k-1} - X_{2k}$ ma gęstość

$$f(x) = \underset{\overset{\shortparallel}{f_1}}{f_{3X_{2k-1}}} * \underset{\overset{\shortparallel}{f_2}}{f_{-3X_{2k}}}(x) = \int_{\mathbb{R}} f_1(x-y) f_2(y)\, dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{3} e^{-\frac{(x-y)}{3}} \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x-y) \cdot e^{y}\, \mathbb{1}_{(-\infty,0]}(y)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{3} e^{-\frac{(x-y)}{3}} \cdot e^{y} \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x-y)\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\min\{x,0\}} \frac{1}{3} e^{-\frac{(x-y)}{3}} e^{y}\, dy = \int_{-\infty}^{\min\{x,0\}} \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}+\frac{y}{3}} e^{y}\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\min\{x,0\}} \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}} \cdot e^{\frac{y}{3}} \cdot e^{y}\, dy = \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}} \int_{-\infty}^{\min\{x,0\}} e^{\frac{4y}{3}}\, dy$$

$$= \frac{1}{3} e^{-x/3} \cdot \left(\frac{3}{4} e^{4/3\, y} \Big|_{-\infty}^{\min\{x,0\}} \right) =$$

$$\cancel{= \frac{1}{3} e^{-x/3} \cdot \left(3/4\, e^{4/3\, x} - 0 \right) = \frac{1}{4} e^{x}}$$

$$= \begin{cases} \cancel{\frac{1}{3} e^{-x/3}}\ \frac{1}{4} e^{x} & \text{dla } x < 0 \\ \frac{1}{4} e^{-x/3} & \text{dla } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{(ciągłe w 0!)}$$

Zatem $\mathbb{E} Z_k = \mathbb{P}[0 > 3X_{2k-1} - X_{2k}] = \int_{-\infty}^{0} \cancel{\frac{1}{4} e^{-x/3}} =$

$$\cancel{= \frac{1}{4} \cdot (-3) e^{-\frac{x}{3}} \Big|_{-\infty}^{0}} = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{4} e^{x}\, dx = \frac{1}{4} e^{x} \Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{4}$$

Zatem z MPWL mamy $\frac{Z_1 + \dots + Z_n}{n} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{4}$ (Zał. są spełnione, $\mathbb{E} Z_k$ istn. oraz $\{Z_k\}$ i.i.d.)