

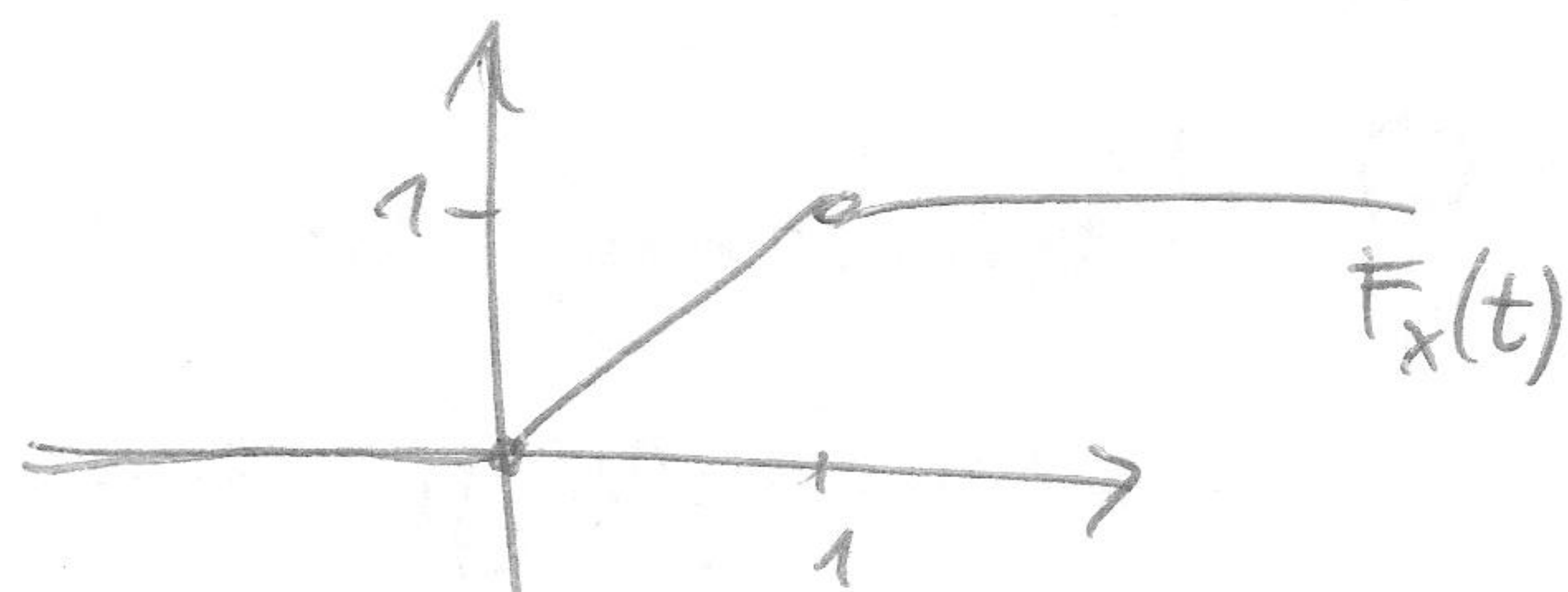
Zad. 2 $\{X_n\}$ i.i.d., $X_n \sim U([0,1])$

Teraz a) Policzmy dystrybuantę

zmiennej $Y_1 = 1 - X_1$: $F_{Y_1}(t) = P[Y_1 \leq t]$

$$= P[X_1 - X_1 \leq t] = P[1 - t \leq X_1] = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \leq 0 \\ t & \text{dla } 0 < t < 1 \\ 1 & \text{dla } t \geq 1 \end{cases}$$

Zatem $F_{Y_1} = F_{X_1}$ czyli $1 - X_1$ i X_1 mają ten sam rozkład.



b) $M_n = \min_{1 \leq k \leq n} X_k$. ~~Wierzymy $\epsilon > 0$. Chcemy pokazać, że $P[M_n \geq \epsilon] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.~~

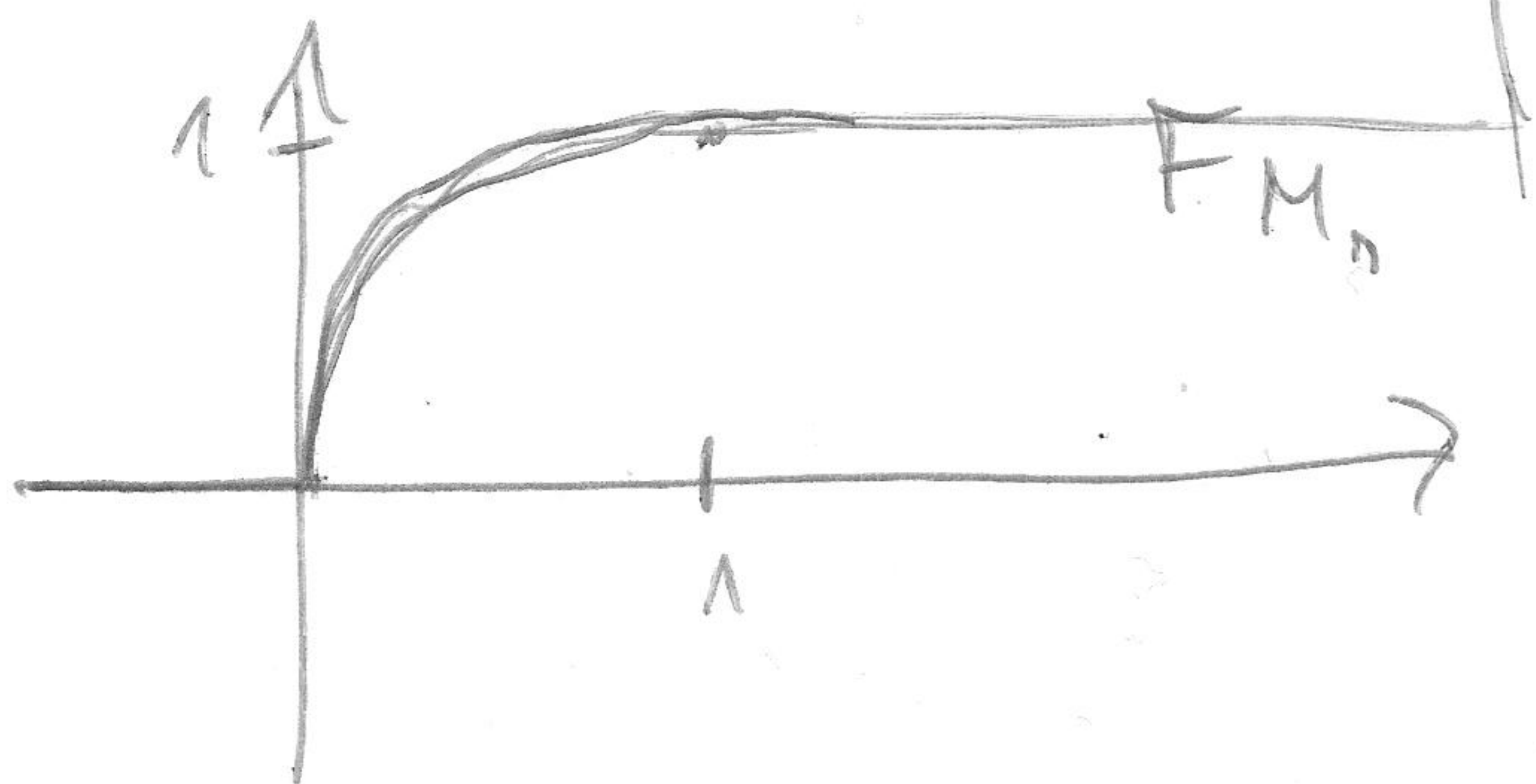
~~Chcemy pokazać, że $M_n \xrightarrow{d} 0$. To implikuje~~

~~$M_n \xrightarrow{P} 0$. Rozkład M_n :~~

$$P[M_n \leq t] = P[X_1 \leq t \text{ lub } X_2 \leq t \text{ lub } \dots \text{ lub } X_n \leq t] =$$

$$= 1 - P[X_1 \geq t \text{ i } \dots \text{ i } X_n \geq t] \stackrel{\text{nd.}}{=} 1 - P[X_1 \geq t] \dots P[X_n \geq t]$$

$$= 1 - \prod_{k=1}^n (1 - P[X_k \leq t]) = \begin{cases} 1 - (1-t)^n & \text{dla } t \in [0,1] \\ 0 - 1 = 0 & \text{dla } t < 0 \\ 1 - 0 = 1 & \text{dla } t \geq 1 \end{cases}$$



$$1 - 1 = 0 \quad \text{dla } t < 0$$

$$1 - 0 = 1 \quad \text{dla } t \geq 1$$

Dla $\epsilon \in [0,1]$

$$P[M_n \geq \epsilon] =$$

$$= 1 - P[M_n \leq \epsilon]$$

$$= 1 - (1 - (1-\epsilon)^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$\frac{1}{1} > 0$

Zatem $M_n \xrightarrow{P} 0$.

c) Załóżmy, że ciąg zm. los. $\{1 - M_n\}$ jest niemalejący, ponadto skoro $M_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, to $1 - M_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$. Zatem z tw. z teorii miary, jeżeli niemalejący ciąg miary funkcji mierzalnych zbiega \mathbb{P} -mierz, to zbiega też \mathbb{P} -w. Zatem $1 - M_n \xrightarrow{\mathbb{P}\text{-w.}} 1 \Rightarrow M_n \xrightarrow{\mathbb{P}\text{-w.}} 0$.

d)
$$\mathbb{P}[X_1 < X_2 \text{ oraz } X_2 < X_3] =$$

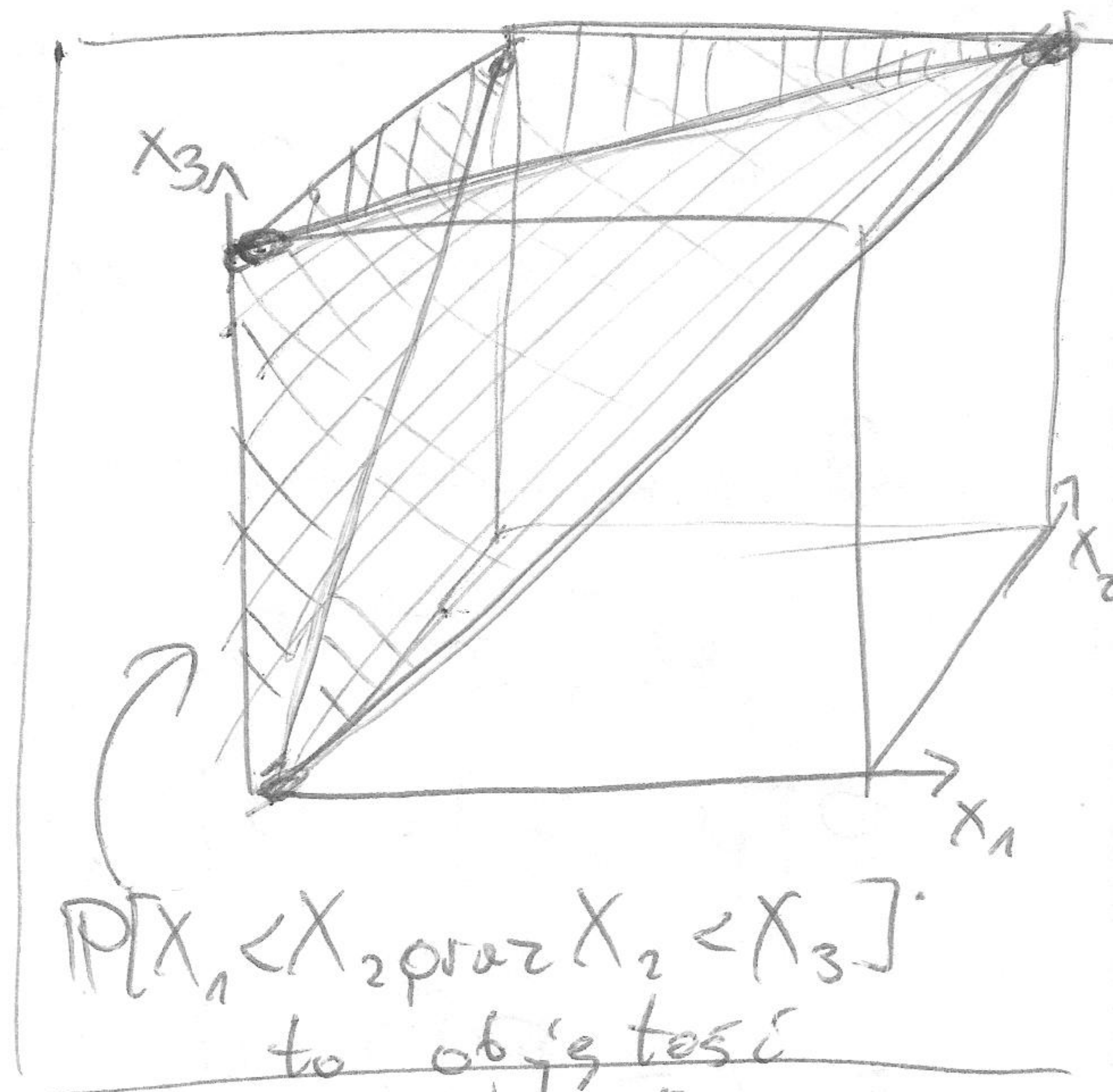
$$= \frac{1 \cdot 1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Ale $\mathbb{P}[X_1 < X_2] =$

$$= \mathbb{P}[X_2 < X_3] = \frac{1}{2},$$

zatem $\mathbb{P}[X_1 < X_2] \cdot \mathbb{P}[X_2 < X_3] = \frac{1}{4}$

Więc te zdarzenia nie są wzl.



$\mathbb{P}[X_1 < X_2 \text{ oraz } X_2 < X_3]$ to objętość tego czworościana