Lista zadań. Nr 2. 12 marca 2021

Algorytmy i Struktury Danych

IIUWr.

1. (0pkt) Przeczytaj notatkę do wykładu o algorytmach zachłannych.
2. (1pkt) Danych jest n odcinków $I_j = \langle p_j, k_j \rangle$, leżących na osi OX, $j = 1, \ldots, n$. Ułóż algorytm znajdujący zbiór $S \subseteq \{I_1, \ldots, I_n\}$, nieprzecinających się odcinków, o największej mocy.
3. (1pkt) Rozważ następującą wersję problemu wydawania reszty: dla danych liczb naturalnych a, b ($a \leq b$) chcemy przedstawić ułamek $\frac{a}{b}$ jako sumę różnych ułamków o licznikach równych 1. Udowodnij, że algorytm zachłanny zawsze daje rozwiązanie. Czy zawsze jest to rozwiązanie optymalne (tj. o najmniejszej liczbie składników)?
4. (1,5pkt) Ułóż algorytm, który dla danego n-wierzchołkowego drzewa i liczby k, pokoloruje jak najwięcej wierzchołków tak, by na każdej ścieżce prostej było nie więcej niż k pokolorowanych wierzchołków.
5. (2pkt) Udowodnij poprawność algorytmu Boruvki (Sollina).
6. (2pkt) Ułóż algorytm, który dla danego spójnego grafu G oraz krawędzi e sprawdza w czasie $O(n + m)$, czy krawędź e należy do jakiegoś minimalnego drzewa spinającego grafu G. Możesz założyć, że wszystkie wagi krawędzi są różne.
7. (2pkt) System złożony z dwóch maszyn A i B wykonuje n zadań. Każde z zadań wykonywane jest na obydwu maszynach, przy czym wykonanie zadania na maszynie B można rozpocząć dopiero po zakończeniu wykonywania go na maszynie A. Dla każdego zadania określone są dwie liczby naturalne a_i i b_i określające czas wykonania i-tego zadania na maszynie A oraz B (odpowiednio). Ułóż algorytm ustawiający zadania w kolejności minimalizującej czas zakończenia wykonania ostatniego zadania praz maszynę B.
8. (2pkt) Ułóż algorytm, który dla danych liczb naturalnych a i b, sprawdza, czy zachłanna strategia dla problemu wydawania reszty jest poprawna, gdy zbiór nominałów jest równy $X = \{1, a, b\}$.
9. (2pkt) Dla ważonego drzewa $T = (V, E; c)$, gdzie $c : V \to \mathcal{R}_+$, określamy jego *zewnętrzną długość* $EL(T)$ jako:

   $$EL(T) = \sum_{v-liść \in T} c(v) \cdot d(v),$$

   gdzie $d(v)$ jest długością ścieżki od korzenia do liścia v (mierzoną liczbą krawędzi na ścieżce).

   Rozważmy następujący problem. Dany jest n-elementowy zbiór $\{w_1, \ldots, w_n\}$ dodatnich liczb rzeczywistych. Zadaniem jest znalezienie ważonego drzewa binarnego T o n liściach, takiego, że każda liczba w_i jest wagą dokładnie jednego liścia oraz T ma minimalną wagę $EL(T)$ pośród wszystkich drzew o tej własności.
10. (**Z** 2pkt) *Wariancją* wag krawędzi grafu $G = (V, E; w)$ nazywamy wielkość

    $$s(G) = \frac{1}{|E|} \sum_{e \in E} (w(e) - \overline{w})^2$$

    gdzie $\overline{w}$ jest średnią wag krawędzi (a więc $\overline{w}$ jest równe $\frac{1}{|E|} \sum_{e \in E} w(e)$).

    Ułóż algorytm, który dla zadanego grafu znajduje drzewo spinające T o minimalnej wartości $s(T)$.

    Uwaga: Nawet rozwiązania o dużej złożoności (zwykle nie akceptowalnej na AiSD) mogą okazać się interesujące. Uprzedzając Wasze pytania: rozwiązania o złożoności wykładniczej nie będą interesujące:-(