W drugą stronę, dla

Zad. 1

$$\prod_{j=1}^{n}(1+a_j) \le (1+u)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^k =$$

$$= 1 + u\binom{n}{1} + u^2\binom{n}{2} + \dots + u^n\binom{n}{n} =$$

$$= 1 + \frac{u\,n!}{1!(n-1)!} + \dots + \frac{u^n (n!)}{n!(n-n)!} =$$

$$= 1 + \frac{u\,n}{1!} + \frac{u^2 n(n-1)}{2!} + \dots + \frac{u^n n(n-1)\dots 2\cdot 1}{n!} \le$$

$$\le 1 + \frac{un}{1!} + \frac{(un)^2}{2!} + \dots + \frac{(un)^n}{n!} =$$

$$= 1 + un\left(1 + \frac{un}{2!} + \dots + \frac{(un)^{n-1}}{n!}\right) \le$$

(kolejne elem. są ponad 100 razy mniejsze od poprzedniego)

$$\le 1 + un \cdot 1.01$$

Analogicznie w drugą stronę.

zad. 2

Zauważmy, że q może być dowolnie blisko p^2, a zatem

$$\lim_{q \to p} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{q}{p^2}}} = +\infty$$

oraz

$$\lim_{q \to p} -\frac{1+\overbrace{\sqrt{1-\frac{q}{p^2}}}^{\to 0}}{\underbrace{q\sqrt{1-\frac{q}{p^2}}}_{\to 0}} = -\infty$$

Zatem błąd jest ~~potem~~ dowolnie duży, zatem zadanie jest źle uwarunkowane.

zad. 4

~~Zad.~~ Zad. 3

Weźmy $m_x = \overbrace{1111\ldots110}^{t}$, $m_y = \overbrace{\underbrace{11\ldots1}_{r}000\ldots0}^{t}$

Wtedy $\dfrac{m_x - m_y}{m_x} = \dfrac{\overbrace{00\ldots0}^{r}11\ldots10}{\underbrace{11\ldots110}_{t}} =$

$$= \frac{2^{-r-1} + \ldots + 2^{-s+1}}{2^0 + 2^{-1} + \ldots + 2^{-s+1}} = \frac{2^{-r-1} \cdot \frac{1-2^{-s+r+1}}{1-\frac{1}{2}}}{2^0 \cdot \frac{1-2^{-s}}{1-\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{2^{-r}\left(1-2^{-s+r+1}\right)}{2\left(1-2^{-s}\right)} = \frac{2^{-r-1}\left(1-2^{-s+r+1}\right)}{1-2^{-s}} \geqslant 2^{-q}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{2^{-r-1+q}\left(1-2^{-s+r+1}\right)}{1-2^{-s}} \geqslant 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{2^{-s} - 2^{-s-(r+1)+q}}{2^{-s} - 1} \geqslant 1$$

$$\Downarrow$$

$$-(r+1) + q \geqslant 0$$

$$\Downarrow$$

$$q > r$$

W drugą stronę analogiczny rachunek dla $m_x = \underbrace{11\ldots1}_{r}110\ldots01$, $m_y = \underbrace{11\ldots1}_{r}0\,11\ldots11$ doprowadzi nas do ~~tam~~ nierówności z drugiej strony.

zad. 4

$$fl\left(\left(\ldots\left(a_n x + a_{n-1}\right)x + a_{n-2}\right)\ldots\right)x + a_0\Big)\Big) =$$

$$= fl\left(\left(\ldots\left(fl\left(\left[a_n x(1+\alpha_n) + a_{n-1}\right](1+\alpha_n')\right)x + a_{n-2}\right)\ldots\right)x + a_0\right) =$$

$$= a_n x (1+\alpha_n)(1+\alpha_n')\cdot\ldots\cdot(1+\alpha_1)(1+\alpha_1') +$$

$$+ a_{n-1}x(1+\alpha_n')(1+\alpha_{n-1})(1+\alpha_{n-1}')\ldots(1+\alpha_1)(1+\alpha_1') +$$

$$+ \ldots + a_1 x(1+\alpha_2')(1+\alpha_1)(1+\alpha_1') + a_0(1+\alpha_1') =$$

$$= a_n x(1+\Theta_n) + a_{n-1}x(1+\Theta_{n-1}) + \ldots + a_0(1+\Theta_0) \leq$$

$$\leq (a_n x + a_{n-1} + \ldots + a_0)(1+2nu)$$ z zad. 5 z L 1

a taki błąd jest OK.

zad. 7

a) $f(x) = \frac{1}{x^2+c}$ $\quad C_f(x) = \left|\frac{x f'(x)}{f(x)}\right| =$

$$= \frac{x\cdot\left(\frac{1}{x^2+c}\right)'}{\frac{1}{x^2+c}} = \frac{x\cdot\left(-\frac{1}{x^4+2x^2c+c^2}\right)\cdot 2x}{\frac{1}{x^2+c}} =$$

$$= -\frac{2x^2(x^2+c)}{(x^2+c)^2} = \frac{-2x^2}{x^2+c}$$ $\longrightarrow$ zad. dobrze uwarunkowane,

b) $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$ $C_f(x) = \left| \frac{x\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)'}{\frac{1-\cos x}{x^2}} \right| =$

$= \left| \frac{x\cdot\left(\sin x \cdot x^2 - 2x(1-\cos x)\right)}{x^4} \cdot \frac{x^2}{1-\cos x} \right| =$

$= \left| \frac{\sin x \cdot x^2 - 2x(1-\cos x)}{x} \right| =$

$= \left| \frac{x\sin x - 2 + 2\cos x}{1} \right| = \left| x\sin x + 2\cos x - 2 \right|$

Zadanie źle uwarunkowane — dla dużych x wartość jest duża
$x \approx \frac{\pi}{2}\cdot 2k$